Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Département fédéral de l'environnement, des transports, de l'énergie et de la communication DETEC
Dipartimento federale dell'ambiente, dei trasporti, dell'energia e delle comunicazioni DATEC

Bundesamt für Strassen
Office fédéral des routes
Ufficio federale delle Strade

Grundlagen zur Überprüfung und Bemessung von Steinschlagschutzgalerien

Principes de l'examen et du dimensionnement des galeries de protection lors de chutes de blocs

Principles of examination and dimensioning of rockfall protection galleries

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Baustatik und Konstruktion
Dr. sc. ETH Christina Röthlin, MSc Bauing. ETH
Prof. Thomas Vogel, dipl. Bauing. ETH

Matrisk GmbH, Affoltern a/A
Dr. sc. Rocco Custer, dipl. Ing. ETH
Dr. sc. ETH Matthias Schubert, dipl.-Ing.

Forschungsprojekt AGB 2011/014 auf Antrag der Arbeitsgruppe Brückenforschung (AGB)

August 2019 **697**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Département fédéral de l'environnement, des transports, de l'énergie et de la communication DETEC
Dipartimento federale dell'ambiente, dei trasporti, dell'energia e delle comunicazioni DATEC

Bundesamt für Strassen
Office fédéral des routes
Ufficio federale delle Strade

Grundlagen zur Überprüfung und Bemessung von Steinschlagschutzgalerien

Principes de l'examen et du dimensionnement des galeries de protection lors de chutes de blocs

Principles of examination and dimensioning of rockfall protection galleries

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Baustatik und Konstruktion
Dr. sc. ETH Christina Röthlin, MSc Bauing. ETH
Prof. Thomas Vogel, dipl. Bauing. ETH

Matrisk GmbH, Affoltern a/A
Dr. sc. Rocco Custer, dipl. Ing. ETH
Dr. sc. ETH Matthias Schubert, dipl.-Ing.

Forschungsprojekt AGB 2011/014 auf Antrag der Arbeitsgruppe Brückenforschung (AGB)

August 2019 **697**

Impressum

Forschungsstelle und Projektteam

Projektleitung
Prof. Thomas Vogel

Mitglieder
Dr. Rocco Custer
Dr. Christina Röthlin
Dr. Matthias Schubert

Begleitkommission

Präsident
Jean-Christophe Putallaz

Mitglieder
Dr. Manuel Alvarez
Stephane Cuennet
Dr. Hans Rudolf Ganz

Gäste
Dr. Vincent Labiouse, EPFL/HEIA
Lorenzo Sabato, SBB
Dr. Axel Volkwein, WSL

KO-Finanzierung des Forschungsprojekts

Schweizerische Bundesbahnen SBB

Antragsteller

Arbeitsgruppe Brückenforschung (AGB)

Bezugsquelle

Das Dokument kann kostenlos von http://www.mobilityplatform.ch heruntergeladen werden.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Zusammenfassung Teil A:
Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien

Stahlbetonplatten sind zentrale Tragelemente von Steinschlagschutzgalerien. Die Bemessung solcher Platten unter Stossbeanspruchung erfolgt häufig anhand elastischer Theorien mithilfe von statisch „äquivalenten", empirischen Ersatzkräften. Das plastische Verformungsvermögen – die Duktilität – wird dabei wiederum über empirische Faktoren berücksichtigt. Ein solches Vorgehen ist aus baupraktischer Sicht unbefriedigend, da erstens kein physikalischer Bezug zum wirklichen Tragverhalten erkennbar ist und zweitens keine Aussagen zum Traglastzustand möglich sind. Die zuverlässige Bestimmung der Traglast einer Stahlbetonplatte ist aus praktischer Sicht von zentraler Bedeutung. Anhand der Methoden der Plastizitätstheorie können im Vergleich zu aufwendigen nichtlinearen Methoden schnelle und zuverlässige Abschätzungen der (statischen) Traglast gemacht werden.

Das erhöhte Dissipationsvermögen von duktilen Tragelementen im Betonbau führt insbesondere bei aussergewöhnlichen dynamischen Einwirkungen, beispielsweise stossartigen Belastungen, zu einem günstigen Tragverhalten. Bei den Traglastverfahren der Plastizitätstheorie nimmt der Tragwiderstand eine zentrale Bedeutung ein. Die Bestimmung der Traglast von Stahlbetonplatten mit den Methoden der Plastizitätstheorie setzt ein duktiles Tragverhalten voraus, womit sich ein Versagen mit ausgeprägten plastischen Verformungen ausbilden kann. Die Erweiterung der Plastizitätstheorie zur Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonplatten unter stossartiger Beanspruchung ist bislang noch unzureichend erforscht. Diese Arbeit befasste sich mit der näherungsweisen Modellierung des Tragverhaltens und Verformungsvermögens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung, als typischem Tragelement von Steinschlagschutzgalerien, unter Aufprallstoss im Versagenszustand auf der Basis der Plastizitätstheorie. Dabei wird von einer energetischen Betrachtungsweise ausgegangen, wobei die Modellbildung auf klaren physikalischen Grundlagen basiert.

In Kapitel 2 werden die für die vorliegende Arbeit erforderlichen statischen und dynamischen Eigenschaften von Stahl und Beton sowie deren Zusammenwirken erläutert. Eine Möglichkeit, viskose Effekte zu berücksichtigen, ist die Annahme von „dynamischen" Materialfestigkeiten, welche unabhängig von den bei dynamischen Problemstellungen beobachteten Dehnraten sind, jedoch im Allgemeinen nicht den statischen Festigkeiten entsprechen [Lubliner 2005].

Die darauffolgenden Kapitel befassen sich mit dehnratenunabhängigen Theorien zur Lösung von dynamischen Problemen, d. h., viskose Vorgänge werden ausgeschlossen.

In Kapitel 3 werden die relevanten thermomechanischen Grundlagen erläutert. Einführend werden die statischen und kinematischen Beziehungen für beliebige Systeme formuliert. Das Prinzip der virtuellen Leistungen lässt sich mithilfe der zeitlichen Ableitung des Verformungszustandes aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gewinnen. Mit der Berücksichtigung der d'Alembert'schen Trägheitskräfte wird das Prinzip der virtuellen Leistungen auf dynamische Problemstellungen erweitert. Beide Prinzipien sind sowohl in der Elastizitätstheorie als auch in der Plastizitätstheorie gültig. Mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen lassen sich unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte und der Verwendung des Reaktions- und Schnittprinzips die Impuls- und Energiesätze herleiten. In der Kontinuumsmechanik gilt der erste Hauptsatz der Thermodynamik zur Beschreibung der Energieerhaltung in einem geschlossenen System (Energieprinzip der Mechanik). Sobald nichtkonservative Kräfte auf ein System wirken, kann die Kontinuumsmechanik nicht mehr von der Thermodynamik getrennt werden [Ziegler 1983]. In einem geschlossenen System bleibt die Energie unabhängig von der Zeit konstant und die Entropierate strebt ein Maximum an (1. und

2. Hauptsatz der Thermodynamik). Der irreversible Anteil der Entropierate wird als Dissipationsleistung bezeichnet. Des Weiteren werden die auf der Plastizitätstheorie basierenden Traglastverfahren erörtert und die Theorie des plastischen Potentials, die (statischen) Grenzwertsätze, die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb zur Beschreibung des Betons sowie die statischen und kinematischen Diskontinuitäten behandelt.

In Kapitel 4 werden die Traglastverfahren von Platten erläutert. Anschliessend an eine Zusammenstellung der statischen, kinematischen und dynamischen Beziehungen von Platten, des Biegewiderstandes und der Normalmomenten-Fliessbedingung wird mit der Fliessgelenklinientheorie nach [Johansen 1943] und [Johansen 1962] ausführlich das Traglastverfahren zur Ermittlung von oberen Grenzwerten der Traglast von Stahlbetonplatten unter monotoner Beanspruchung beschrieben. Mit diesem Verfahren lässt sich eine aufwendige, nichtlineare Berechnung von Platten unter monotoner Laststeigerung, welche eine Beschreibung der je nach Lastintensität verschiedenen Spannungszustände ermöglicht, umgehen, falls nur die Traglast von Interesse ist. Mit den Ausführungen zur Fliessgelenklinientheorie werden die Grundlagen für ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der dynamischen Auswirkungen von Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung in Kapitel 6 bereitgelegt. Schliesslich wird die Untersuchung des Kraftflusses in Stahlbetonplatten im Traglastzustand [Zweidler 2015] diskutiert. Anwendungsbeispiele schliessen das Kapitel über Platten ab.

In Kapitel 5 wird eine allgemeine Darstellung der dynamischen Modellbildung von Tragsystemen beschrieben. Einführend werden Schwingungen von Platten erläutert und die kinematischen Gleichungen aufgestellt. Ausgehend von einer Darstellung der Masse-Feder-Systeme mit einem Freiheitsgrad für linear elastisch-ideal plastisches und starr-ideal plastisches Materialverhalten werden deren Anwendungs- und Gültigkeitsbereiche diskutiert sowie Grenzbetrachtungen erarbeitet. Es wird gezeigt, dass die beiden Vereinfachungen – starr-plastische Modellierung und Impulsbelastung – zu Abweichungen mit entgegengesetztem Vorzeichen führen. Die Abweichungen aus den beiden Modellvereinfachungen nehmen mit zunehmender Stossdauer zu und erreichen ähnliche Werte. Die Annahme einer Impulsbelastung führt zu einer Überschätzung (konservativ), die Vernachlässigung elastischer Verformungen zu einer Unterschätzung der Verschiebungen.

Mit den Ausführungen zur starr-plastischen Modellierung des dynamischen Tragwerksverhaltens werden die Grundlagen für die vorgeschlagene Modellvorstellung in Kapitel 6 bereitgestellt. Die dynamischen Eigenschaften des starr-plastischen Tragverhaltens von Balken-, Platten- und Schalentragwerken weisen prinzipielle Ähnlichkeiten auf, nämlich das Ausbilden plastischer Gelenke respektive Gelenkbereiche als Funktion des Ortes und der Zeit sowie die Konvergenz zu einer stationären Modalform. Aufgrund der mathematischen Komplexität analytischer Lösungen kommt dabei den Näherungsverfahren eine wichtige Rolle zu. Das Konzept der Modalform-Konvergenz im Versagenszustand eines Tragwerks lässt dabei auf eine Vereinfachung schliessen, welche aus baupraktischer Sicht von hohem Wert ist, nämlich die Annahme einer stationären Modalform ([Martin & Symonds 1966], [Kaliszky 1970], Jones 2012]). Eine solche Vereinfachung führt zu einer Näherungslösung für die plastische Durchbiegung einer Platte am Aufprallort, wobei diese für zunehmende Massenverhältnisse der aufprallenden Masse zur Masse des Tragwerks eine verbesserte Genauigkeit liefert.

In Kapitel 6 wird eine dynamische, starr-plastische Modellbildung zur Beschreibung des Tragverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss im Versagenszustand mittels des Impulserhaltungssatzes und des Prinzips der virtuellen Leistungen vorgeschlagen. Zuerst werden die Wirkungsweise der granularen Eindeckung einer Stahlbetonplatte von Steinschlagschutzgalerien, der Einfluss der Eindeckung auf den Versagensmechanismus von Platten sowie die Modellierung der Eindeckung auf der Grundlage von experimentellen Erkenntnissen diskutiert. Dann wird ein dynamisches, starr-plastisches Lösungsverfahren für das Biegeverhalten von duktilen Stahlbetonplatten vorgeschlagen. Den Ausgangspunkt bildet die stationäre Modalform entsprechend der Mechanismuskonfiguration nach der Fliessgelenklinientheorie. Mithilfe des Prinzips der virtuellen Leistungen und des Impulserhaltungssatzes lässt sich die dynamische Lösung der Plattendurchbiegung am Aufprallort mittels Handberechnungen bestimmen. Voraussetzung für das Lösungsverfahren ist das Eintreten eines ausschliesslich duktilen Tragverhaltens der Stahlbetonplatten. Dies wird durch das Konzept der Kapazitätsbemessung in Bezug auf die Querkrafttraglast, die Verwendung einer granularen Eindeckung – vorzugsweise kompakt gelagerter Kies – sowie eine geeignete konstruktive Durchbildung sichergestellt.

Die maximale dynamische, plastische Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort infolge eines aufprallenden Körpers (Verformungsbedarf) wird durch das Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche (Verformungsvermögen) beschränkt.

Das vorgeschlagene Näherungsverfahren wird mit Versuchsresultaten verifiziert und seine baupraktische Anwendbarkeit diskutiert. Die Duktilität, welche massgeblich durch die Wahl des Betonstahls gesteuert werden kann, spielt eine entscheidende Rolle bei der Aufnahme grosser Stossenergien. Die Anwendung eines starr-plastischen anstelle eines elastischen Verfahrens führt zu einer wirtschaftlicheren Lösung, indem die vorhandene Duktilität (Verformungsvermögen) ausgenutzt wird und dadurch der Tragwiderstand reduziert werden kann.

Der Vergleich des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens mit Experimenten lieferte folgende Erkenntnisse: Die Annahme eines Verschiebungsfeldes respektive Geschwindigkeitsfeldes basierend auf der Fliessgelenklinientheorie konnte verifiziert werden. Die sich einstellende (bleibende) Modalform respektive das Rissbild der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss stimmt mit den Fliessgelenklinien für statische Lasten überein. Die Nachrechnungen der Versuche mit den angenommenen Vereinfachungen (starr plastisch, Impulserhaltung) ergeben plausible Resultate und zeigen das Potential des Ansatzes auf, da eine mit zahlreichen Unsicherheiten verbundene kraftbasierte Berechnung unter Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der granularen Eindeckung umgangen werden kann. In den Experimenten wurden kleine Tragwerksverformungen beobachtet. Somit konnten die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert und die Theorie erster Ordnung angewendet werden. Der Verformungsbedarf und das Verformungsvermögen wurden separat und unabhängig voneinander bestimmt. Die Rotationsduktilität (Verformungsvermögen) wurde als Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verformungen verwendet. Die Voraussetzung für das Einstellen des oben beschriebenen duktilen Biegebruchverhaltens von Stahlbetonplatten ist das Ausbleiben eines vorzeitigen lokalen Versagens infolge Durchstanzens am Aufprallort respektive eines spröden Querkraftversagens der Platte. Eine granulare Kieseindeckung von genügender Stärke, eine gute konstruktive Durchbildung sowie das Konzept der Kapazitätsbemessung stellen diesbezüglich die zentralen Einflussmöglichkeiten dar.

Zusammenfassung Teil B:
Probabilistische Betrachtungen und überarbeitetes Bemessungskonzept

Mit der Richtlinie ASTRA 12006 [ASTRA 2008] können Steinschlageinwirkungen auf Schutzgalerien bestimmt werden. Die Richtlinie ist 2008 erlassen worden und baut auf Forschungsresultaten aus den späten 1990er Jahren auf. In der Zwischenzeit konnten in einschlägigen Forschungsgebieten einige Erkenntnisse gewonnen werden (mitunter im Teil A dieses Berichtes); es ist deshalb sinnvoll, die Richtlinie mit den Erkenntnissen der letzten 20 Jahre zu überprüfen und gegebenenfalls anzupassen.

Im Teil B wird zuerst die Richtlinie ASTRA 12006 untersucht und Handlungsbedarf abgeleitet. Im zweiten Schritt werden einige ergänzende Modellierungen gemacht, die dann als Grundlage für ein überarbeitetes Bemessungskonzept dienen.

Beim Bemessungskonzept der Richtlinie ASTRA 12006 wurden verschiedene Unzulänglichkeiten erkannt. Das Sicherheitsniveau einer Galerie, die mit den heutigen Richtlinien und Normen bemessen wurde, wird massgebend von der Wahl des Bemessungsereignisses durch den Eigentümer beeinflusst. Der Zusammenhang zwischen Bemessungsereignis und Sicherheitsniveau wird in der Praxis aber mehrheitlich nur qualitativ verstanden. Es ist deshalb davon auszugehen, dass das effektive Sicherheitsniveau einer Galerie nicht bekannt ist und deshalb auch nicht auf die Konsequenzen eines Versagens abgestimmt werden kann. Überdies konnten weder in der Richtlinie noch in ihrer Dokumentation transparente und dokumentierte probabilistische Überlegungen gefunden werden.

In der Richtlinie ASTRA 12006 wird zuerst die charakteristische dynamische Einwirkung bestimmt. Durch Multiplikation mit einem Konstruktionsbeiwert wird die statische Ersatzlast bestimmt, die als Bemessungswert verwendet werden kann.

Die dynamische Steinschlageinwirkung gemäss ASTRA 12006 wird mit experimentellen Aufprallkräften von vier Versuchsreihen verglichen. Die Vergleiche deuten darauf hin, dass die Formulierung den Einfluss von Steinmasse und Aufprallgeschwindigkeit auf die Einwirkungskraft angemessen berücksichtigt, dass es aber systematische Abweichungen gibt, die innerhalb einer Versuchsserie konstant sind, zwischen den Versuchsserien aber unterschiedlich. Der Grund für diese Abweichungen konnte im Rahmen dieses Projektes nicht identifiziert werden. Es wird vorgeschlagen, die Gleichung so anzupassen, dass sie im Mittelwert mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Die Konstruktionsbeiwerte in der Richtlinie berücksichtigen dynamische Baustofffestigkeiten und eine elasto-plastische Antwort. Obwohl ihre Herleitung nach wie vor dem Stand des derzeitigen Wissens entspricht, wird empfohlen, bei der Überprüfung von bestehenden Galerien die Konstruktionsbeiwerte bauwerkspezifisch aus einem Antwortspektrum abzulesen.

Um für jede Galerie eine angemessene Sicherheit gewährleisten zu können, wird empfohlen, das Bemessungskonzept auf ein transparentes probabilistisches Modell abzustützen. Um ein entsprechendes Bemessungskonzept entwickeln zu können, werden drei Aspekte modelliert:

- Die Unsicherheiten der Einwirkung
- Die Konsequenzen eines Versagens der Steinschlagschutzgalerie
- Die Sicherheitskosten (die Kosten, die bei einer Erhöhung der Sicherheit durch die Schutzgalerie anfallen).

Mit diesen drei Modellen lassen sich die wirtschaftlich sinnvollen Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten für Steinschlagschutzgalerien bestimmen, sowie Teilsicherheitsbeiwerte γ_F zu deren Einhaltung.

Aus der Modellierung wird ein überarbeitetes Bemessungskonzept abgeleitet, das kohärent zu den Bemessungsprinzipen der SIA-Normen ist, aber eine gewichtige Neuerung enthält. Die grosse Mehrheit der Normen legt einen einzigen Teilsicherheitsbeiwert für alle Bemessungssituationen fest. Da jedoch die Anforderungen an Steinschlagschutzgalerien stark von den lokalen Gegebenheiten wie Häufigkeit und Grösse von Steinschlagereignissen und dem Verkehrsaufkommen abhängen, ist es schwierig, mit einem einzigen Teilsicherheitsbeiwert Sicherheit und Wirtschaftlichkeit in allen Bemessungssituationen sicherzustellen.

In diesem Bericht wird deshalb wie folgt vorgegangen:

- Die Ziel-Zuverlässigkeit wird als explizite Funktion des Verkehrsaufkommens festgelegt.
- Die Teilsicherheitsbeiwerte sind eine Funktion der Ziel-Zuverlässigkeit und des Variationskoeffizienten der Steinschlageinwirkung.

Bei der Umsetzung in ein überarbeitetes Bemessungskonzept wird darauf geachtet, dass sich der Mehraufwand bei einer Bemessung für den planenden Ingenieur in Grenzen hält.

Mit den variablen Teilsicherheitsbeiwerten können die örtlichen Gegebenheiten angemessen berücksichtigt und Steinschlagschutzgalerien so sicher wie nötig gebaut werden, ohne Ressourcen zu verschwenden.

Es wird empfohlen, das überarbeitete Bemessungskonzept in einer Revision der Richtlinie ASTRA 12006 zu berücksichtigen. Einwirkung und Widerstand werden wie bisher getrennt betrachtet, was eine direkte Umsetzung ermöglicht.

Einige Fragenstellungen bleiben jedoch offen:

- Zum Tragwerksverhalten von Steinschlagschutzgalerien wurden in den letzten zehn Jahren an der ETH Zürich drei Doktorarbeiten geschrieben und viel neues Wissen generiert ([Schellenberg 2008], [Ghadimi Khasraghy 2011], [Röthlin 2017]). Die möglichen Implikationen dieser drei Doktorarbeiten auf die Galeriebemessung müssen noch erarbeitet werden. Das überarbeitete Bemessungskonzept berücksichtigt die Erkenntnisse aus diesen Arbeiten nur teilweise, insbesondere, weil eine Umsetzung in ein Bemessungskonzept noch erfolgen muss und weil der Fokus im Teil B auf den Einwirkungen liegt.
- Der Grund für die systematischen Abweichungen zwischen der dynamischen Einwirkung nach ASTRA 12006 und den Versuchsresultaten konnte nicht identifiziert werden und sollte in Zukunft weiter untersucht werden.
- Die Bemessung einer Steinschlagschutzgalerie stützt sich naturgemäss auf Expertenschätzungen der Steinmassen für gewisse Wiederkehrperioden. Diese Schätzungen können mit grossen Unsicherheiten verbunden sein, die in diesem Bericht weder berücksichtigt noch diskutiert wurden. Sie sollten in Zukunft weiter untersucht und quantifiziert werden.
- Im Bericht werden für neue und bestehende Galerien Ziel-Zuverlässigkeiten empfohlen, die den kleinsten gesellschaftlich akzeptierten Werten entsprechen. Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen würden bei der Überprüfung von bestehenden Galerien noch kleinere Zuverlässigkeiten resultieren. Es ist abzuklären, inwiefern kleinere Zuverlässigkeiten bei Schutzbauten von der Gesellschaft akzeptiert werden können.

Résumé

Résumé de la partie A:
Dalles en béton armé des galeries de protection contre les chutes de pierres

Les dalles en béton armé sont des éléments structuraux essentiels des galeries de protection contre les chutes de pierres. Le dimensionnement de telles dalles sollicitées par un impact est souvent effectué au moyen de la théorie élastique et de forces de remplacement empiriques, statiquement équivalentes. La capacité de déformation plastique – la ductilité – est également prise en compte avec des coefficients empiriques. D'un point de vue pratique, une telle procédure est insatisfaisante vu que, d'une part, aucune relation physique avec le comportement réel à la portance de la structure ne peut être identifiée et que, d'autre part, une déclaration sur l'état limite ultime de charge n'est pas possible. D'un point de vue pratique, une détermination fiable de la capacité structurelle d'une dalle en béton armé revêt une grande importance. Comparées aux méthodes non linéaires fastidieuses, des estimations rapides et fiables de la capacité structurelle (statique) peuvent être obtenues avec les méthodes de la théorie de la plasticité.

La capacité de dissipation accrue des éléments structuraux ductiles en béton armé mène à un comportement structurel favorable, en particulier sous des actions dynamiques accidentelles telles que les chocs. Dans l'analyse selon la théorie de la plasticité, la capacité portante joue un rôle prédominant. Afin de permettre une rupture avec des déformations plastiques prononcées, la détermination de la charge ultime des dalles en béton armé présuppose un comportement ductile. Jusqu'à présent, l'extension de la théorie de la plasticité pour décrire le comportement structural des dalles en béton armé sollicitées par des charges d'impact n'est pas suffisamment étudiée. Le présent travail aborde la modélisation simplifiée et approximative du comportement structural et de la capacité de déformation des dalles en béton armé ductiles avec un remblai granulaire en tant qu'élément structural typique des galeries de protection contre les chutes de pierres soumises à une charge d'impact, à l'état limite ultime, sur la base de la théorie de la plasticité. Une approche basée sur l'énergie est utilisée avec des modèles fondés sur des principes physiques clairs.

Les propriétés statiques et dynamiques de l'acier et du béton requises pour le présent travail ainsi que leur interaction sont expliquées au chapitre 2. Une possibilité de considérer les effets visqueux est de faire l'hypothèse de résistances «dynamiques» des matériaux, qui ne dépendent pas des taux de déformation observés dans des problèmes dynamiques mais qui diffèrent généralement des résistances statiques [Lubliner 2005].

Les chapitres suivants traitent des théories indépendantes des taux de déformation pour la résolution de problèmes dynamiques, c'est-à-dire que les processus visqueux sont exclus.

Au chapitre 3 sont expliqués les principes thermomécaniques relevants . En introduction sont formulées les relations statiques et dynamiques de systèmes arbitraires choisis. Le principe des puissances virtuelles peut être obtenu à partir du principe des travaux virtuels, par dérivation dans le temps de l'état de déformation. En considérant les forces d'inertie d'Alembert, le principe des puissances virtuelles peut être étendu à des problèmes dynamiques. Les deux principes sont valables aussi bien pour la théorie d'élasticité que celle de la plasticité. Avec le principe des puissances virtuelles, on peut tirer les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, en tenant compte des forces d'inertie et en utilisant les principes de réaction et d'isolement d'un solide. En mécanique des milieux continus, la première loi de la thermodynamique pour décrire la conservation de l'énergie dans un système isolé est valable (principes de l'énergie en mécanique des structures). Dès que des forces non-conservatives agissent sur un système, la mécanique des milieux continus ne peut plus être séparée de la thermodynamique [Ziegler 1983]. Dans un système isolé, l'énergie reste constante dans le temps et le taux d'entropie tend vers un

maximum (1ère et 2ème loi de la thermodynamique). La part irréversible du taux d'entropie est nommée dissipation (de la puissance). De plus, les méthodes basées sur la théorie de l'analyse des limites plastiques sont illustrées et la théorie du potentiel plastique, le théorème de limite supérieure et inférieure (statique), le critère d'écoulement modifié de Coulomb pour le béton ainsi que les discontinuités statiques et cinématiques sont traitées.

L'analyse limite pour dalles en béton armé est expliquée au chapitre 4. Après une compilation des relations statiques, cinématiques et dynamiques pour les dalles, de leur résistance à la flexion et des conditions de plasticité sous flexion, la méthode des lignes de rupture selon [Johansen 1943] et [Johansen 1962] pour déterminer une borne supérieure de la charge limite des dalles en béton armé sollicitées par un chargement monotone est illustrée en détail. Avec cette procédure, un calcul laborieux non-linéaire de dalles soumises à un chargement monotone, décrivant différents états de contrainte en fonction de l'intensité de la charge, peut être évité si seule la capacité ultime est d'intérêt. Les explications sur la théorie des lignes de rupture constituent la base de la procédure d'approximation traitée au chapitre 6 pour déterminer les effets d'une action dynamique sur les dalles de béton armé sous choc. Finalement, l'étude de la transmission des forces dans les dalles en béton armé à l'état limite ultime [Zweidler 2015] est discutée. Des exemples d'application concluent le chapitre sur les dalles.

Au chapitre 5, une présentation générale de la modélisation dynamique de systèmes structuraux est décrite. En introduction sont illustrées les oscillations des dalles et sont établies les équations cinématiques respectives. Partant d'un système masse-ressort à un degré de liberté avec un comportement élastique linéaire-parfaitement plastique et rigide-parfaitement plastique, les domaines d'application et la validité sont discutés puis les états limites sont établis. Il peut être démontré que les deux simplifications – modèle rigide-plastique et chargement par impulsion – conduisent à des divergences de signe algébrique opposé. Les divergences des deux simplifications du modèle augmentent avec l'augmentation de la durée des chocs et atteignent des valeurs similaires. L'hypothèse d'un chargement par impulsion entraîne une surestimation (conservative) des déplacements. Par contre, les déplacements sont sous-estimés lorsque les déformations élastiques sont négligées.

Les explications concernant la modélisation rigide-plastique fournissent les bases du modèle proposé au chapitre 6. Les propriétés dynamiques du comportement structurel rigide-plastique des poutres, dalles et membranes montrent en principe des similarités, à savoir la formation de rotules plastiques ou de zones de rotules plastiques en fonction de la localisation et du temps ainsi qu'une convergence vers une forme modale stable. En raison de la complexité mathématique des solutions analytiques, les procédures d'approximations jouent un rôle majeur. Le concept de la convergence des formes modales à l'état limite ultime conduit à une simplification d'une grande valeur pratique, à savoir l'hypothèse d'une forme modale stable ([Martin & Symonds 1966], [Kaliszky 1970], [Jones 2012]). Une telle simplification conduit à une solution approximative pour la déformation plastique d'une dalle à l'endroit de l'impact, dont la précision augmente avec la croissance de la proportion de la masse qui s'écrase par rapport à la masse de la structure.

Un modèle dynamique, rigide-plastique, est proposé au chapitre 6 pour décrire le comportement structurel des dalles en béton armé avec un remblai granulaire soumises à des charges d'impact à l'état limite ultime, en utilisant la loi de conservation du moment et le principe des puissances virtuelles. L'effet du remblai granulaire sur les galeries de protection contre les chutes de pierres, l'influence du remblai sur le mode de rupture des dalles ainsi que la modélisation du remblai basée sur des résultats expérimentaux sont tout d'abord discutés. Une procédure de résolution dynamique, rigide-plastique, est ensuite proposée pour le comportement en flexion des dalles en béton armé ductile. Le point de départ est une forme modale stable, représentée par le mécanisme de rupture selon la méthode des lignes de ruptures. A l'aide du principe des puissances virtuelles et de la loi de conservation de la quantité de mouvement, la solution dynamique concernant la déflexion de la dalle à l'endroit de l'impact peut être déterminée avec des calculs effectués à la main. Cette procédure est conditionnée par un comportement structural exclusivement ductile des dalles en béton armé. Cela est garanti par un concept de dimensionnement selon la capacité en ce qui concerne la résistance à effort tranchant, par la mise en œuvre d'un remblai granulaire – de préférence du gravier bien compacté – ainsi que des dispositions constructives appropriées.

La déflexion plastique dynamique maximale de la dalle en béton armé à l'endroit de l'impact due à un corps s'écrasant (déformation nécessaire) est limitée par la capacité de rotation des rotules plastiques (capacité de déformation).

La procédure d'approximation proposée est comparée à des résultats expérimentaux et son applicabilité pratique est discutée. La ductilité, qui peut être considérablement influencée par le choix de l'acier d'armature, joue un rôle dominant dans la dissipation des grandes énergies d'impact. L'utilisation d'une procédure rigide-plastique au lieu d'une procédure élastique mène à une solution plus économique, car la ductilité disponible (capacité de déformation) est utilisée et la résistance finale peut ainsi être réduite.

La comparaison de la procédure d'approximation proposée avec des essais a fourni les résultats suivants: l'hypothèse d'un champ de déplacement ou de vitesse basé sur la méthode des lignes de rupture a pu être vérifiée. La forme modale (résiduelle) résultante et le schéma des fissures de la dalle en béton armé soumise à une charge d'impact correspondent aux lignes de rupture sous des charges statiques. Les recalculations des essais avec les simplifications supposées (rigidité plastique, conservation du moment) conduisent à des résultats plausibles et démontrent le potentiel de cette approche, car un calcul basé sur la force qui tient compte du comportement dynamique de la couverture avec diverses incertitudes peut être évité. Dans les tests, de petites déformations de la structure ont été observées. Les conditions d'équilibre ont ainsi pu être formulées pour le système non-déformé et la théorie du premier ordre a pu être appliquée. Le besoin de déformation et la capacité de déformation ont été déterminées séparément et indépendamment l'un de l'autre. La ductilité rotationnelle (capacité de déformation) a été utilisée comme paramètre pour la déformation plastique maximale possible. L'hypothèse d'une rupture par flexion ductile décrite ci-dessus est conditionnée par l'absence d'une défaillance locale prématurée due à un poinçonnement à l'endroit de l'impact ou à celle d'une rupture fragile de la dalle sous effort tranchant. Une couche de couverture granulaire d'une épaisseur adéquate, des dispositions constructives appropriées, ainsi que le concept de dimensionnement selon la capacité constituent à cet égard les principales possibilités d'influence.

Résumé de la partie B:
Considérations probabilistes et concept révisé de dimensionnement

Les actions de chutes de pierres sur les galeries de protection peuvent être déterminées avec la directive OFROU 12006 [ASTRA 2008]. La directive a été publiée en 2008 et est basée sur des résultats de recherches datant de la fin des années 1990. Depuis, la recherche sur ce sujet a considérablement progressé (entre autres, la recherche présentée dans la partie A du présent rapport); il est donc raisonnable de réévaluer la directive à la lumière des connaissances des vingt dernières années et, si nécessaire, de l'adapter.

Dans la partie B, la directive OFROU 12006 est d'abord analysée et la nécessité d'agir est évaluée. Dans un second temps, des modèles complémentaires sont développés pour servir de base à un concept de dimensionnement révisé.

Plusieurs lacunes sont identifiées dans le concept de dimensionnement de la directive OFROU 12006. Le niveau de sécurité d'une galerie conçue selon les directives actuelles dépend considérablement du choix de l'événement de dimensionnement effectué par le propriétaire de la galerie. Dans la pratique, la relation entre l'événement de dimensionnement et le niveau de sécurité n'est cependant compris que qualitativement. On peut donc supposer que le niveau effectif de sécurité d'une galerie de protection n'est pas connu et ne peut être ajusté aux conséquences d'une défaillance. De plus, aucune considération probabiliste transparente et documentée n'a pu être trouvée dans la directive ni dans sa documentation.

Dans la directive OFROU 12006, une action dynamique caractéristique des chutes de pierres est d'abord déterminée. La multiplication de cette action avec une valeur appelée coefficient de construction fournit la force statique de remplacement, qui peut être utilisée comme valeur de dimensionnement.

L'action dynamique de chutes de pierres selon la directive est comparée aux forces d'impact expérimentales de quatre séries d'essais. La comparaison indique que la masse du bloc et la vitesse d'impact sont considérées de manière appropriée pour déterminé l'action. Cependant, elle indique également une divergence systématique entre l'action dynamique selon la directive et les forces expérimentales. Celle-ci est constante dans une série de tests mais varie d'une série à l'autre. La raison de cette divergence n'a pu être identifiée dans le cadre du présent projet. Il est proposé d'adapter l'équation pour déterminer l'action chutes de pierres, de manière à ce qu'elle corresponde en moyenne aux résultats expérimentaux.

Les coefficients de construction de la directive tiennent compte de la résistance dynamique du matériau de construction, ainsi que d'une réponse élastique-plastique de la structure. Bien que leur dérivation soit encore conforme à l'état actuel des connaissances, il est suggéré pour la vérification des structures existantes, que les coefficients de construction soient directement déterminés, pour chaque objet, à partir d'un spectre de réponse en tenant compte de la période d'oscillation des structures.

Pour garantir que, pour chaque galerie, un niveau de sécurité approprié soit satisfait, il est recommandé de baser le concept de dimensionnement révisé sur un modèle probabiliste transparent. Afin de développer un tel concept de dimensionnement, trois aspects sont modélisés:

- L'incertitude de l'action de chutes de pierres.
- Les conséquences de la défaillance d'une galerie de protection contre les chutes de pierres.
- Les coûts de sécurité (c'est-à-dire les coûts directement liés à une augmentation de la sécurité de la galerie de protection).

En considérant ces trois aspects, il est possible d'identifier une fiabilité économiquement optimale pour les galeries de protection et de déterminer les coefficients de sécurité partiels γ_F pour garantir que la cible de fiabilité soit atteinte.

Un concept de dimensionnement révisé est proposé, qui est cohérent avec la modélisation mentionnée ci-dessus et avec les principes de dimensionnement des normes SIA mais qui contient une nouveauté importante. La grande majorité des normes conçoivent un seul coefficient de sécurité partiel pour toutes les cas de dimensionnement. Comme les exigences pour les galeries varient considérablement en termes de fréquence et d'ampleur des chutes de pierres ainsi que l'intensité du trafic, il est difficile de concevoir un seul coefficient de sécurité partiel garantissant, dans toutes les situations, la sécurité et la conception économique des galeries.

La procédure figurant dans ce rapport est donc la suivante:

- La fiabilité cible est définie comme une fonction explicite du trafic journalier moyen.
- Le coefficient de sécurité partiel pour l'action est une fonction de la fiabilité cible et de la variabilité de l'action de chutes de pierres.

En formulant un concept révisé de dimensionnement, il est prêté attention au fait que la complexité et la charge de travail pour les ingénieurs n'augmentent pas significativement par rapport à l'usage de la directive actuelle. Avec des coefficients de sécurité partiels variables, la spécificité de chaque situation peut être considérée de manière optimale et les galeries de protection peuvent être conçues en étant aussi sûres que nécessaire et sans gaspillage de ressources.

Il est recommandé de réviser la directive OFROU 12006 en prenant en compte le concept de dimensionnement présenté ici. Comme jusqu'à ce jour, les actions et les résistances sont considérées séparément, ce qui permet une mise en œuvre directe.

Plusieurs questions demeurent cependant ouvertes:

- Au cours des dix dernières années, plusieurs projets de recherche sur le sujet ont été réalisés, dont trois thèses de doctorat à l'ETH Zurich ([Schellenberg 2008], [Ghadimi Khasraghy 2011], [Röthlin 2017]). Des implications possibles de ces trois dissertations et d'autres recherches dans la procédure de dimensionnement des galeries nécessitent encore des mises au point. Le concept révisé de dimensionnement ne reflète pas l'ensemble des conclusions de ces travaux, car la transcription de toutes ces conclusions dans un concept doit encore être développé et parce que la partie B de ce rapport se concentre sur le côté action.
- La raison de la divergence systématique observée lors de la comparaison de l'action dynamique selon OFROU 12006 avec les forces expérimentales n'a pas pu être identifiée et devrait être examinée à l'avenir.
- Le dimensionnement d'une galerie de protection contre les chutes de pierres repose sur les estimations des experts en ce qui concerne des masses de blocs et des périodes de retour associées. Ces estimations peuvent être entachées d'incertitudes importantes, qui ne sont ni discutées ni prises en compte dans le présent rapport. Dans ce domaine également, une poursuite des recherches est recommandée.
- Dans ce rapport, des fiabilités cibles pour de nouvelles galeries et pour des galeries existantes, qui correspondent aux plus petites valeurs socialement acceptables, font l'objet de recommandations. Pour la vérification des galeries existantes, des considérations économiques conduiraient à une fiabilité encore plus petite. Il reste à clarifier dans quelle mesure la société pourrait accepter une fiabilité réduite des ouvrages de protection.

Summary

Summary Part A:
Reinforced concrete slabs of rockfall protection galleries

Reinforced concrete slabs are essential structural elements of rockfall protection galleries. The dimensioning of such slabs subjected to impact is usually based on elastic theories and empiric equivalent static forces. The plastic deformation capacity – the ductility – is also taken into account with empiric factors. From a practical viewpoint, such a procedure is not satisfying because (i) no physical relation to the real structural behaviour can be identified and (ii) no statements on ultimate limit states are possible. From a practical perspective, a reliable determination of the structural capacity of a reinforced concrete slab is of great importance. With the methods of the theory of plastic limit analysis, estimations of the (static) structural capacity can be made that are fast and reliable compared to time-consuming non-linear methods.

The increased dissipation capacity of ductile structural concrete members leads to a favourable structural behaviour especially for accidental dynamic actions like impact. In plastic limit analysis, the structural capacity plays a dominant role. The determination of the ultimate load of reinforced concrete slabs presumes a ductile behaviour, a precondition to allow a failure with pronounced plastic deformations, Up to now, the extension of the theory of plastic limit analysis to describe the structural behaviour of reinforced concrete slabs subjected to impact loads is not yet sufficiently explored. This work addresses the simplified, approximate modelling of load bearing and deformation behaviour of ductile reinforced concrete slabs as typical structural elements of rockfall protection galleries with granular cushion layers subjected to impact loading in the ultimate limit state on the basis of the theory of plastic limit analysis. An energy based approach is used with models based on stringent physical principles.

In chapter 2, the static and dynamic properties of steel and concrete as well as their interaction required for the present work are explained. One possibility to consider viscous effects is to assume "dynamic" material strengths, which do not depend on strain rates observed in dynamic problems but in general differ from static strengths [Lubliner 2005].

The following chapters cover the rate independent theories of dynamic problem solving, i. e. viscous processes are excluded.

The relevant thermo-mechanical principles are explained in chapter 3. As an introduction, the static and the dynamic relations for arbitrary systems are formulated. The principle of virtual power can be gained from the principle of virtual work by derivation over time of the deformation state. By considering d'Alembert's forces of inertia, the principle of virtual power can be extended to dynamic problems. Both principles are valid in elastic as well as in plastic theory. With the principle of virtual power, the law of conservation of momentum and energy can be derived by considering inertia forces and applying reaction and free body principles. In continuum mechanics, the first law of thermodynamics to describe energy conservation in an isolated system is valid (energy principles in structural mechanics). As soon as non-conservative forces act on a system, continuum mechanics cannot be separated from thermodynamics anymore [Ziegler 1983]. In an isolated system, energy remains constant in time and the entropy rate tends to a maximum (1^{st} and 2^{nd} law of thermodynamics). The irreversible share of the entropy rate is denoted (power) dissipation.

Furthermore, the methods based on the theory of plastic limit analysis are discussed and the theory of plastic potential, the upper and lower bound theorem, Coulomb's modified yield criterion for concrete as well as static and kinematic discontinuities treated.

In chapter 4 the limit analysis for slabs is explained. After a compilation of static, kinematic and dynamic relations for slabs, their bending capacity and the yield criterion for bending moments, the yield line theory according to [Johansen 1943], [Johansen 1962] to calculate an upper limit value of the load carrying capacity of reinforced concrete slabs subject to monotonic loading is exemplified in detail. With this procedure, a laborious non-linear calculation of slabs subject to monotone loading describing various stress states depending on the load intensity can be avoided if only the ultimate capacity is of interest. The statements on yield line theory form the basis for an approximation procedure covered in chapter 6 to determine the effects of dynamic action on reinforced concrete slabs subjected to impact. Finally, the investigation on the flow of forces in reinforced concrete slabs in the ultimate limit state [Zweidler 2015] is discussed and examples of application complete the chapter on slabs.

In chapter 5, a general representation of dynamic modelling of structural systems is described. As an introduction, oscillations of slabs are exemplified and the respective kinematic equations are stated. Starting from a single degree of freedom system with linear-elastic ideal-plastic and rigid ideal-plastic behaviour, the domains of application and validity as well as limit states are discussed. It can be shown that the two simplifications – rigid-plastic model and impulsive loading – lead to deviations of opposite algebraic sign. The deviations by the two simplifications of the model increase with increasing pulse duration and reach similar values. Assuming an impulsive loading leads to an overestimation (which is conservative), neglecting elastic deformations to an underestimation of displacements.

The statements on rigid-plastic modelling of the dynamic structural behaviour provide the basics for the proposed model in chapter 6. The dynamic properties of rigid-plastic structural behaviour of beams, slabs and shells show principal similarities, namely the formation of plastic hinges or hinge regions depending on space and time as well as a convergence to a steady modal form. Due to mathematical complexity of analytic solutions, approximations play a major role. The approach of convergence of modal forms in the ultimate limit state leads to a simplification with high practical significance, namely the assumption of a steady modal form ([Martin & Symonds], [Kaliszky 1970], [Jones 2012]). Such a simplification leads to an approximation for the plastic displacement of a slab at the location of impact with an accuracy increasing with the ratio of the impacting mass to the mass of the structure.

A dynamic, rigid-plastic model is proposed in chapter 6 to describe the structural behaviour of ductile reinforced concrete slabs with granular cushion layers subjected to impacting loads in the ultimate limit state using the law of conservation of momentum and the principle of virtual power. At first, the effectiveness of granular cushion layers of rockfall protection galleries, the influence of the cushion on the failure mode of slabs as well as the modelling of the cushion based on experimental findings are discussed. Then a dynamic rigid-plastic solving procedure is proposed for the bending behaviour of ductile reinforced concrete slabs. The starting point is a steady modal form represented by the failure mechanism according to yield line theory. With the principle of virtual power and the law of conservation of momentum, the dynamic solution of slab displacement at the location of impact can be determined by hand calculations. Precondition for the solving procedure is the occurrence of an exclusively ductile structural behaviour of the reinforced concrete slabs. The concept of capacity design with respect to shear force resistance, the application of a granular cushion – preferably well compacted gravel – as well as an appropriate detailing should secure this.

The maximum dynamic plastic displacement of the reinforced concrete slab at the location of impact due to an impacting body (deformation demand) is limited by the rotation capacity of plastic hinge regions (deformation capacity).

The proposed approximation procedure is compared with experimental results and its practical applicability is discussed. Ductility, which can be influenced considerably by the choice of the reinforcing steel, plays a dominant role for the dissipation of large impact energies.

The application of a rigid-plastic procedure instead of an elastic one leads to a more economical solution because the available ductility (deformation capacity) is used and ultimate resistance can be reduced.

The comparison of the proposed approximation procedure with experiments provided the following findings: The assumption of a displacement or velocity field based on yield line theory could be verified. The resulting (residual) modal form and the crack pattern of the reinforced concrete slab subjected to an impacting load coincide with the yield lines for static loads. Recalculations of the tests with the assumed simplifications (rigid-plastic, conservation of momentum) lead to plausible results and show the potential of the approach because a force-based calculation considering the dynamic behaviour of the cushion layer with various uncertainties can be avoided. In the tests, small structural deformations were observed. That is why equilibrium could be formulated for the undeformed system and first order theory could be applied. Deformation demand and deformation capacity were determined separately and independently from each other. Rotational ductility (deformation capacity) was used as a parameter for the maximum possible plastic deformation. The precondition for the occurrence of a ductile bending failure described above is the absence of a premature local failure due to punching shear at the location of impact or a brittle shear failure of the slab, respectively. A granular cushion layer of adequate thickness, appropriate detailing as well as the concept of capacity design are the principal influences in this respect.

Summary Part B:
Probabilistic considerations and revised design concept

The guideline FEDRO 12006 [ASTRA 2008] allows for assessing rockfall action on rockfall protection galleries. While released in 2008, the guideline is based on research from the late 1990ies. In the meantime, research on the subject has advanced significantly (amongst others, the research presented in Part A of this report); thus it is reasonable to reassess the guideline in the light of the findings of the last 20 years, and if necessary to adapt it.

In Part B of this report, the guideline FEDRO 12006 is analyzed and need for action is assessed. In a second step some additional models are developed that serve as a basis for a revised design concept.

Several shortcomings are identified in the design concept of the guideline. The safety level of a gallery designed with today’s standards and guidelines depends considerably on the choice of the design event by the gallery’s owner. The relation between design event and safety level, however, is in general only understood qualitatively. It can thus be assumed that the real safety level of a protection gallery is not known and cannot be adjusted to the consequences of a failure. Furthermore, no transparent and documented probabilistic considerations could be found in the guideline and its documentations.

In the guideline FEDRO 12006, at first a characteristic dynamic rockfall action is assessed. Through its multiplication with a so called construction coefficient, a static equivalent load results, which can be used as design value.

The dynamic rockfall action according to the guideline is compared to experimental impact forces from four test series. The comparison indicates that both, stone mass and impact velocity are appropriately considered. However, it also indicates that there is a systematic bias between dynamic guideline action and experimental forces, which is constant within one test series, but varies between test series. The reason for the bias could not be identified within this project. It is proposed to adapt the equation to determine rockfall action in a way that on average it coincides with the experimental results.

Construction coefficients in the guideline account for dynamic strength of construction material as well nonlinear structure response. Although their derivation is still state of the

art, it is suggested that for the verification of existing structures, construction coefficients are directly determined from a response spectrum of the respective structure.

To assure that an appropriate safety level is met for every design situation, it is recommended that a revised design concept is based on a transparent probabilistic model. In order to develop such a design concept, three aspects are modelled:

- The uncertainty in the rockfall action.
- The consequences of failure of a rockfall protection gallery.
- The safety costs (i.e. the costs occurring by increasing safety by the protection gallery).

With these three aspects considered, it is possible to identify the economically optimal target reliability for protection galleries. Partial safety factors γ_F are calibrated to assure that target reliability is met.

A revised design concept is proposed, which is consistent with aforementioned modelling and with the design principles of SIA design standards but contains an important novelty. The large majority of standards devise one single partial safety factor for all design situations. As requirements for galleries vary significantly in terms of frequency and magnitude of rockfall events as well as traffic intensity, it is not possible to devise one single partial safety factor, which assures safety and economical gallery designs in all situations.

Thus, the procedure in this report is as follows:

- Target reliability is an explicit function of average daily traffic.
- The partial safety factor for the action is a function of target reliability and the variability of the rockfall action.

In formulating a revised design concept, it is carefully considered that the additional workload for design engineers does not exceed certain limits. With variable partial safety factors, the specificity of each design situation can be optimally considered and protection galleries can be designed, which are as safe as necessary and do not waste resources.

It is recommended that the guideline FEDRO 12006 is revised with the design concept here presented. As before, actions and resistance are considered separately, which allows for a direct implementation.

Several questions remain open, however:

- Over the last ten years, several research projects on the subject have been carried out including three doctoral dissertations at ETH Zurich ([Schellenberg 2008], [Ghadimi Khasraghy 2011], [Röthlin 2017]). Possible implications of the three dissertations and other research on the dimensioning procedure of galleries have still to be worked out. The revised design concept does not reflect the entirety of findings of these work, as a design concept considering these findings still needs to be developed and because the focus of part B of this reports lies on the action side.
- The reason for the systematic bias observed in the comparison of dynamic action according to FEDRO 12006 and experimental test forces could not be identified. Further research is recommended.
- An important input to any rockfall protection gallery is the expert estimation of rockfall masses and return periods. These estimations might entail significant uncertainties which are neither discussed nor considered in this report. They should be further examined and quantified in future.
- In the report target reliabilities for new and existing galleries are recommended, which correspond to the smallest values accepted in society. Economic considerations would lead to even smaller values in the frame of the examination of existing structures. Clarity should be gained whether society would accept smaller reliabilities for protective structures.

Teil A: Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Platten sind neben Scheiben und Schalen die am häufigsten verwendeten Tragelemente im Betonbau. Die Ermittlung der Schnittgrössen erfolgt in der Regel nach den etablierten elastischen Plattentheorien, welche im ungerissenen Tragwerkszustand Gültigkeit haben. Das Überschreiten des Rissmomentes einer Stahlbetonplatte unter Lasterhöhung führt zu einer örtlichen Steifigkeitsabminderung. Die statische Unbestimmtheit von Platten führt zusätzlich zu elastischen Schnittgrössenumlagerungen. Bei weiterer Laststeigerung kann der Traglastzustand der Platte erreicht werden, welcher mit plastischen Schnittgrössenumlagerungen einhergeht.

Die Bemessung von Stahlbetonplatten erfolgt in der Praxis meistens anhand Methoden basierend auf dem unteren (statischen) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie. Dabei werden mittels der Finite-Elemente-Methode oder der Streifenmethode nach Hillerborg unter Vernachlässigung der Drillmomente die Schnittgrössen ermittelt und anhand der Normalmomenten-Fliessbedingung die Biegebewehrung bestimmt. Die so ermittelte Lösung liefert gemäss der Plastizitätstheorie einen statisch zulässigen Spannungszustand, womit die statische Traglast nicht überschritten werden kann und die Lösung somit auf der sicheren Seite liegt. Die auf dem oberen (kinematischen) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie beruhenden Methoden wie beispielsweise die Fliessgelenklinientheorie bieten für die Überprüfung von Stahlbetonplatten gute Dienste. Dabei wird ein kinematisch verträgliches Verformungsfeld für die Platte im Bruchzustand gewählt. Der so ermittelte obere Grenzwert der Traglast liegt auf der unsicheren Seite oder entspricht im besten Fall der vollständigen Lösung.

Die zuverlässige Bestimmung der Traglast einer Stahlbetonplatte ist aus baupraktischer Sicht von zentraler Bedeutung. Anhand der Methoden der Plastizitätstheorie können im Vergleich zu aufwendigen inkrementellen, nichtlinearen Methoden, welche die gesamten Last-Verformungsdiagramme liefern, schnelle und zuverlässige Abschätzungen der Traglast gemacht werden.

In der Plastizitätstheorie nimmt daher der Tragwiderstand eine zentrale Bedeutung ein. Dabei wird ein duktiles Verhalten der Stahlbetonplatte angestrebt, womit sich ein mit ausgeprägten plastischen Verformungen verbundenes Versagen einstellen kann. Der Tragwiderstand hängt dabei nicht von der Belastungs- und Zwängungsgeschichte ab und ein Versagen zeichnet sich frühzeitig ab. Die Anwendung dieser Modellvorstellung setzt ein ausreichend plastisches Verformungsvermögen der Platten voraus. Dafür sind ein geeignetes Tragwerkskonzept, eine geeignete Wahl der Baustoffe und eine entsprechende konstruktive Durchbildung erforderlich.

Bei Stossbelastungen infolge Steinschlags auf Schutzgalerien [ASTRA 2008] werden die Schnittgrössen in Platten infolge statisch „äquivalenten", empirischen Ersatzkräften nach elastischen Theorien ermittelt. Dabei wird die Duktilität über empirische Faktoren, welche keinen physikalischen Bezug zum wirklichen Tragverhalten haben, berücksichtigt. Dieses Vorgehen ist aus baupraktischer Sicht unbefriedigend und lässt keine Aussagen zum Traglastzustand zu, dessen zuverlässige Abschätzung von grosser Wichtigkeit ist.

Das erhöhte Dissipationsvermögen bei einem duktilen Tragwerk führt bei aussergewöhnlichen Einwirkungen, insbesondere bei stossartigen Belastungen, zu einem günstigen Tragverhalten. Das Fliessgelenklinienverfahren, welches einen oberen Grenzwert der Traglast nach der Plastizitätstheorie liefert, wird auch für die Überprüfung und Bemessung von Platten für Schutzbauten [Bundesamt für Zivilschutz 1994] angewendet. Ob die plastische Umverteilung der inneren Kräfte auch wirklich erfolgen kann und die dazugehörigen plastischen Verformungen auch auftreten können, bleibt dabei jedoch unbeantwortet. Das erforderliche Verformungsvermögen (Duktilität) versucht man durch geeignete konstruktive Massnahmen zu gewährleisten.

Die Erweiterung der Plastizitätstheorie auf dynamische Einwirkungen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts führte zu dynamisch-plastischen Grenzwertsätzen für die Dauer der Bewegung und die Durchbiegung von Tragstrukturen [Martin 1964], welche von zahlreichen Autoren diskutiert und erweitert wurden, sowie zu verschiedenen Näherungsverfahren für Balken-, Platten- und Scheibentragwerke ([Parkes 1955], [Martin & Symonds 1966], [Jones 2012] etc.). Die erarbeiteten Modellvorstellungen waren vorerst von theoretischer Natur und wurden später insbesondere mit Experimenten an Stahlbalken und -platten verifiziert und diskutiert. Dabei wurden auch Effekte grosser Verformungen berücksichtigt.

In der Dynamik stellt die „Zeit“ den Schlüsselparameter zur Modellbildung des Verhaltens sowohl auf der Material- als auch auf der Tragwerksebene dar. Um das dynamische Material- und Tragwerksverhalten zu verstehen, ist es unabdingbar, zu studieren, wie die „Zeit“ den Bruchmechanismus auf der jeweiligen Ebene beeinflusst und in welchem Zeitbereich sich der Bruchprozess ausbildet. Des Weiteren wirken bei dynamischen Einwirkungen sogenannte Trägheitskräfte, die einerseits das Tragwerksverhalten und andererseits das Materialverhalten der beteiligten Baustoffe beeinflussen. Auf der Strukturebene verändern die Trägheitskräfte somit den Spannungszustand, während sie auf der Materialebene die Rissbildung und den Rissöffnungsvorgang beeinflussen, was sich letztendlich auf den Bruchprozess innerhalb des Materials auswirkt.

Eine numerische Modellierung basierend auf einem inkrementellen Verfahren kann sehr detaillierte Informationen liefern, ist jedoch weniger aussagekräftig hinsichtlich des Verständnisses der grundlegenden physikalischen Gesetzmässigkeiten des plastischen Tragverhaltens. Ein analytisches und konzeptionelles Verständnis des Tragverhaltens kann besser erreicht werden durch geeignete Idealisierungen bezüglich des Material- und Tragverhaltens. Das Verhalten eines stossartig belasteten, starr-plastischen Tragwerks kann mit energetischen Überlegungen gut veranschaulicht werden. Die von den äusseren Einwirkungen verrichtete Arbeit wird während der Bewegung zum Teil in kinetische Energie und zum Teil in Dissipationsenergie (plastische Formänderungsenergie) umgewandelt.

Die vorliegende Arbeit untersucht die näherungsweise Modellierung und Bemessung von Stahlbetonplatten unter stossartiger Belastung. Stahlbetonplatten sind wichtige Bauteile von Steinschlagschutzgalerien. Insbesondere wird von der vereinfachten Modellierung des Materialverhaltens als starr-ideal plastisch und der Anwendung der Fliessgelenklinientheorie ausgegangen. Die Anwendung des Energie- und Impulserhaltungssatzes wird aufgezeigt. Die Untersuchung des Verformungsvermögens gibt Aufschluss über die Rotationsfähigkeit plastischer Gelenke. Diese Modellvereinfachungen erlauben eine übersichtliche Analyse der wichtigsten Stossparameter. Dadurch werden die wichtigsten Modellparameter ersichtlich und können diskutiert werden.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der Arbeit ist die näherungsweise Beschreibung des komplexen Trag- und Verformungsverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten unter stossartiger (einmaliger) Belastung auf der Grundlage der Plastizitätstheorie unter Einbezug der d’Alembert’schen Trägheitskräfte und der daraus sich ergebenden vereinfachten Modellierung und Bemessung. Für die Untersuchungen liegt der Fokus auf dem Anwendungsgebiet der Steinschlagschutzgalerien. Das Tragverhalten von Stahlbetonplatten unter Stossbelastungen wird mit physikalisch begründeten und analytisch fassbaren Modellvorstellungen beschrieben. Der Fokus liegt dabei auf dem Grenztragfähigkeitszustand von Stahlbetonplatten unter Stossbelastung.

Das erarbeitete Näherungsverfahren wird mit Versuchen verifiziert, um dessen Anwendbarkeit zu diskutieren. Die Anwendung der vorliegenden Untersuchungen für Bemessungsvorschriften wird vorgeschlagen.

1.3 Übersicht

In Kapitel 2 bis 4 werden die Materialeigenschaften, die Grundlagen der Thermomechanik und Plastizitätstheorie sowie die Traglastverfahren von Platten dargestellt. Kapitel 2 erläutert die Materialeigenschaften von Betonstahl und Beton sowie deren Zusammenwirken. Der Schwerpunkt wird dabei auf die einachsige Beanspruchung und die dynamischen Materialeigenschaften gelegt. Kapitel 3 befasst sich mit den Grundlagen der Thermomechanik. Ausgehend von einem Beschrieb der statischen und kinematischen Beziehungen, des Prinzips der virtuellen Arbeiten und der Kinetik werden die auf der Plastizitätstheorie basierenden Traglastverfahren erörtert. Dabei werden die Theorie des plastischen Potentials, die Grenzwertsätze (statischer Lasten), die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb und die Diskontinuitäten behandelt. Die Traglastverfahren von Platten werden in Kapitel 4 erläutert. Anschliessend an eine kurze Zusammenstellung der statischen, kinematischen und dynamischen Beziehungen von Platten, des Biegewiderstands und der Normalmomenten-Fliessbedingung wird die Fliessgelenklinientheorie ausführlich beschrieben. Schliesslich wird die Bestimmung des Kraftflusses im Traglastzustand diskutiert.

Im Kapitel 5 werden die Grundlagen der dynamischen Modellbildung diskutiert. Einführend werden die Schwingungen von Platten erläutert und die Grundgleichungen des Stosses vorgestellt. Ausgehend von einer Darstellung der Masse-Feder-Systeme mit einem Freiheitsgrad für linear elastisch-ideal plastisches und starr-ideal plastisches Materialverhalten werden deren Anwendungs- respektive Gültigkeitsbereiche diskutiert sowie Grenzbetrachtungen vorgenommen. Analytische Lösungen und Näherungslösungen werden basierend auf der dynamischen, starr-ideal plastischen Modellbildung erläutert.

In Kapitel 6 wird eine mögliche dynamische Modellbildung für duktile Stahlbetonplatten unter Aufprallstoss basierend auf dem Impulserhaltungssatz, dem Prinzip der virtuellen Leistungen und der Fliessgelenklinientheorie vorgestellt. Das Konzept der Kapazitätsbemessung sowie die Verwendung einer granularen Eindeckung (vorzugsweise: kompakt gelagerter Kies) sollen sicherstellen, dass das Tragverhalten der Platten ausschliesslich duktil erfolgt. Anhand einer Parameterstudie werden verschiedene Einflüsse untersucht. Zudem werden die Modellvorstellung mit Versuchsresultaten verglichen und praxisrelevante Überlegungen vorgestellt.

Kapitel 7 enthält eine Zusammenfassung sowie Folgerungen und Empfehlungen für zukünftige Forschungsarbeiten.

1.4 Abgrenzung

Die Thematik des „Steinschlagschutzes“ erfordert eine multidisziplinäre Herangehensweise zur Untersuchung/Modellierung der damit verbundenen Aspekte wie der Geologie der Ablösezone, der Topografie, der Falltrajektorien, der Schutzbauten etc. [Vogel et al. 2009].

Die vorliegenden Betrachtungen beschränken sich auf homogene, orthogonal und schlaff bewehrte Stahlbetonplatten mit konstanter Dicke als wesentliche Elemente von Steinschlagschutzgalerien (Schutzbauten). Das Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonplatten wird als starr-ideal plastisch modelliert.

Da grosse plastische Energiedissipation zugelassen und favorisiert ist und somit auch entsprechende Auswirkungen bei einem Extremereignis in Kauf genommen werden, ist das Ziel einzig, den Kollaps des gesamten Tragwerks zu vermeiden. Die Gebrauchstauglichkeit spielt daher eine untergeordnete Rolle. Platten unter geringer Stossintensität werden nicht betrachtet. Der Schwerpunkt der theoretischen Untersuchungen liegt in der dynamischen Modellbildung des Biegeverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie [Johansen 1943, Johansen 1962] unter Ausschluss von viskosen Vorgängen.

Es werden monoton steigende (quasi-)statische Belastungen und dynamische Stossbelastungen betrachtet. Wiederholende und zyklische dynamische Einwirkungen werden nicht betrachtet.

Kleine Tragwerksverformungen werden vorausgesetzt. Somit können die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert werden und Effekte zweiter Ordnung sind vernachlässigbar. Membranspannungszustände [Jones 2012] finden keine Berücksichtigung.

Elastische und plastische Wellenausbreitung infolge stossartiger Belastung von Tragwerken [Dual 2011], welche zu einer lokalen Schädigung des Betons führen können, sind nicht Bestandteil der Arbeit. Dieses Phänomen erfolgt im gleichen Zeitbereich, welchen die Wellen für die Ausbreitung durch die Plattenstärke benötigen (Kurzzeitverhalten). Die Entkoppelung dieser beiden Phänomene führt zu grossen Vereinfachungen für praktische Untersuchungen. Das Langzeit- und das Kurzzeitverhalten werden demzufolge entkoppelt voneinander betrachtet, da sich die Zeitdauer um einige Grössenordnungen unterscheidet.

Die vorliegende Arbeit (Teil A) erläutert deterministische Modellvorstellungen; es werden keine Aussagen zu probabilistischen Betrachtungen vorgenommen.

2 Baustoffeigenschaften

In diesem Kapitel werden die Baustoffeigenschaften von Betonstahl und Beton sowie deren Zusammenwirken erläutert. Die Baustoffeigenschaften werden aus Versuchen durch Idealisierungen gewonnen.

Eine ausführliche Darstellung der statischen Baustoffeigenschaften ist zum Beispiel bei [Sigrist 1995], [van Mier 1997] und [Marti 2014] zu finden.

Die Baustoffe Betonstahl, Beton und Stahlbeton (Verbundbaustoff) weisen unter stossartigen Belastungen gegenüber statischen Belastungen unterschiedliche mechanische Eigenschaften auf. Der zeitliche Verlauf der Belastung kann den Formänderungsvorgang des Baustoffs und schliesslich den Bruch massgeblich beeinflussen. Diese Baustoffeigenschaft, wie der Formänderungsvorgang vom zeitlichen Verlauf der Spannungen und Formänderungen beeinflusst wird, bezeichnet man als Viskosität. In der Literatur wird diesbezüglich auch vom sogenannten Erinnerungsvermögen (engl.: memory effect) des Baustoffs bei dynamischer Beanspruchung gesprochen, da das Verhalten des jeweiligen Baustoffs nicht nur vom momentanen Spannungszustand abhängt, sondern auch von früher erfahrenen plastischen Verzerrungen. Wird ein Baustoff bis in den plastischen Bereich beansprucht, so kann die Verzerrungsgeschwindigkeit respektive Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon} = \partial\varepsilon/\partial t$ einen Einfluss auf die Fliessbedingung ausüben. Das Formänderungsgesetz (konstitutive Gleichungen) lässt sich mit der allgemeinen Beziehung $f(\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}, t)$ formulieren und ist somit von den Spannungen und den Verzerrungen, deren Änderungsraten sowie von der Zeit abhängig.

Insbesondere zeigt Beton unter Zugbeanspruchung bereits bei relativ geringen Dehngeschwindigkeiten eine wesentliche Dehnratenabhängigkeit. Der Hauptgrund dafür liegt in der Heterogenität des Betons [Weerheijm 1992]. Das zeitabhängige Materialverhalten infolge dynamischer Einwirkungen wird im Folgenden für unterschiedliche Beanspruchungs- respektive Dehngeschwindigkeiten aufgezeigt. Eine detaillierte Übersicht über das dynamische Materialverhalten findet sich beispielsweise bei [Hjorth 1976], [Ammann 1983], [CEB 1988], [Bischoff & Perry 1991], [Malvar 1998], [Malvar & Ross 1998] und [Weerheijm 2013].

2.1 Betonstahl

2.1.1 Einachsige Beanspruchung

In der Stahlbetonbauweise wird der Betonstahl als einachsiger, in der Richtung der Stäbe beanspruchter Baustoff idealisiert. Seine Parameter können aus einachsigen Zugversuchen ermittelt werden. In Abb. 2.1 sind idealisierte, bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen dargestellt. Die bilineare Idealisierung in Abb. 2.1 (a) zeigt eine linear elastisch-linear verfestigende plastische Baustoffbeziehung, welche sich zur Beschreibung des plastischen Verformungsvermögens von Stahlbetonbauten eignet. Der elastische Anstieg ist durch den Elastizitätsmodul E_s charakterisiert. Bei einer Fliessdehnung ε_{sy} folgt ein mit dem Verfestigungsmodul E_{sh} charakterisierter weiterer linearer Anstieg der Stahlspannungen. Mit dem Erreichen der Zugfestigkeit f_{su} und der zugehörigen Bruchdehnung ε_{su} endet die Verfestigungsphase.

Bei einer linear elastisch-ideal plastischen Baustoffbeziehung tritt nach der Überschreitung der Fliessdehnung ein Fliessplateau auf (E_{sh} = 0) und es wird von einem uneingeschränkten plastischen Dehnungsvermögen ausgegangen, Abb. 2.1 (b). Eine solche idealisierte Spannungs-Dehnungsbeziehung eignet sich zur Beschreibung von Rissbildung und Verformungen der Stahlbetonbauten. Für Traglastberechnungen respektive zur Ermittlung von Tragwiderständen wird üblich von einer starr-ideal plastischen Baustoffbeziehung für den

Betonstahl ausgegangen, bei welcher die elastischen Verformungen ($E_s \rightarrow \infty$) und die Verfestigung ($E_{sh} = 0$) vernachlässigt werden, Abb. 2.1 (c).

Die Duktilität des Betonstahls ist die Eigenschaft, plastische Verformungsenergie bis zum Versagen zu dissipieren. Die Duktilität des Betonstahls wird massgeblich durch das Verfestigungsverhältnis f_{su}/f_{sy} und die Bruchdehnung ε_{su} charakterisiert. Die Duktilitätseigenschaften werden in den Bemessungsnormen festgelegt, beispielsweise wird in den SIA-Tragwerksnormen zwischen verschiedenen Duktilitätsklassen unterschieden (A, B, C).

Das plastische Verformungsvermögen von Stahlbetonbauten wird vor allem von den Verfestigungseigenschaften und von der Bruchdehnung des Stahls bestimmt. Weiter trägt die konstruktive Durchbildung der Bewehrung (z.B. Biegedruckzone, Verankerung der Bewehrung) wesentlich zum Verformungsvermögen bei [Sigrist 1995].

Das Verhalten des Betonstahls unter einachsiger Druckbeanspruchung entspricht etwa demjenigen unter Zugbeanspruchung unter der Voraussetzung, dass die Stäbe nicht ausknicken.

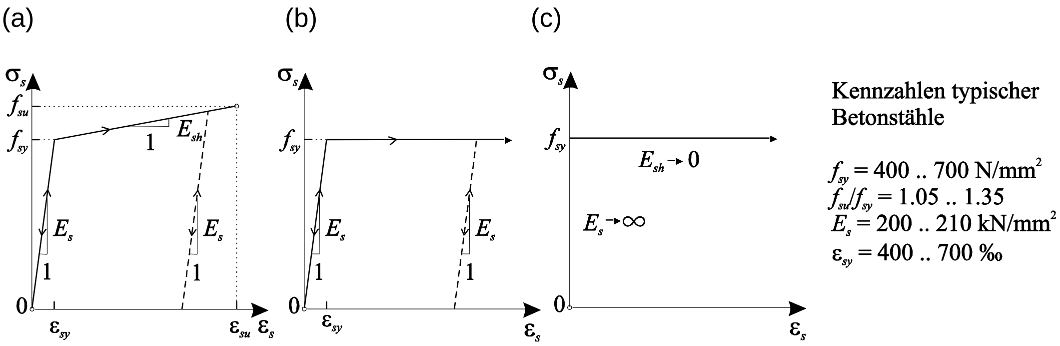


Abb. 2.1 *Idealisierte Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Betonstahl unter (einachsiger) Zugbeanspruchung:*
(a) linear elastisch-linear verfestigend plastisch;
(b) linear elastisch-ideal plastisch;
(c) starr-ideal plastisch.

2.1.2 Dynamische Eigenschaften

Bereits frühe experimentelle Untersuchungen an Bewehrungsstäben unter dynamischer Einwirkung weisen auf eine Erhöhung der Fliessspannung f_{sy}, der Fliessdehnung ε_{sy} und der Zugfestigkeit f_{su} von Betonstahl mit zunehmender Dehngeschwindigkeiten hin ([Manjoine 1944], [Campbell & Cooper 1966]), wobei die Erhöhung der Zugfestigkeit gegenüber der Erhöhung der Fliessgrenze geringer ausfällt und die der Zugfestigkeit zugehörige Dehnung nur geringfügig beeinflusst wird [Manjoine 1944]. [Campbell & Cooper 1966] und [Hjorth 1976] beobachteten zudem, dass die Bruchdehnung ε_{su} von Betonstahl mit zunehmender Dehngeschwindigkeit abnimmt. Betonstahl mit höherer Festigkeit zeigt eine kleinere Streuung als Betonstahl mit kleinerer Festigkeit ([Manjoine 1944], [Restrepo-Posada et al. 1994], [Jones 2006]).

[Cowper & Symonds 1957] schlagen die empirische Beziehung

$$\dot{\varepsilon}_s = D\left(\frac{f_{sy,dyn}}{f_{sy}} - 1\right)^q \tag{2.1}$$

respektive umgeformt

$$\frac{f_{sy,dyn}}{f_{sy}} = 1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_s}{D}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{mit} \quad f_{sy,dyn} \geq f_{sy}$$

vor, wobei D und q materialabhängige Konstanten sind.

Ein Vergleich mit Versuchsresultaten von [Manjoine 1944] zeigte, dass sich für Baustahl (mild steel) mit den Konstanten D = 40.4 s^{-1} und q = 5 vernünftige Ergebnisse ergeben [Bodner & Symonds 1962]. In [Hsu & Jones 2004] zeigten die Konstanten D = 114 s^{-1} und q = 5.56 eine gute Übereinstimmung mit Versuchsresultaten. Des Weiteren werden $f_{sy,dyn}$ und f_{sy} als die dynamische und statische Fliessspannung bezeichnet. In einem unpublizierten Bericht verglichen [Cowper & Symonds 1957] die empirische Beziehung (2.1) mit Versuchsresultaten [Bodner & Symonds 1962].

Die Versuchsresultate für Betonstahl zeigen teilweise erhebliche Unterschiede aufgrund der Entwicklungen in der Stahlherstellung (Wärmebehandlung, Korngrössenverteilung der Zuschläge) und der verschiedenartigen Versuchsgeräte und der Versuchsdurchführung und -auswertung [Ammann 1983].

(a)

(b)

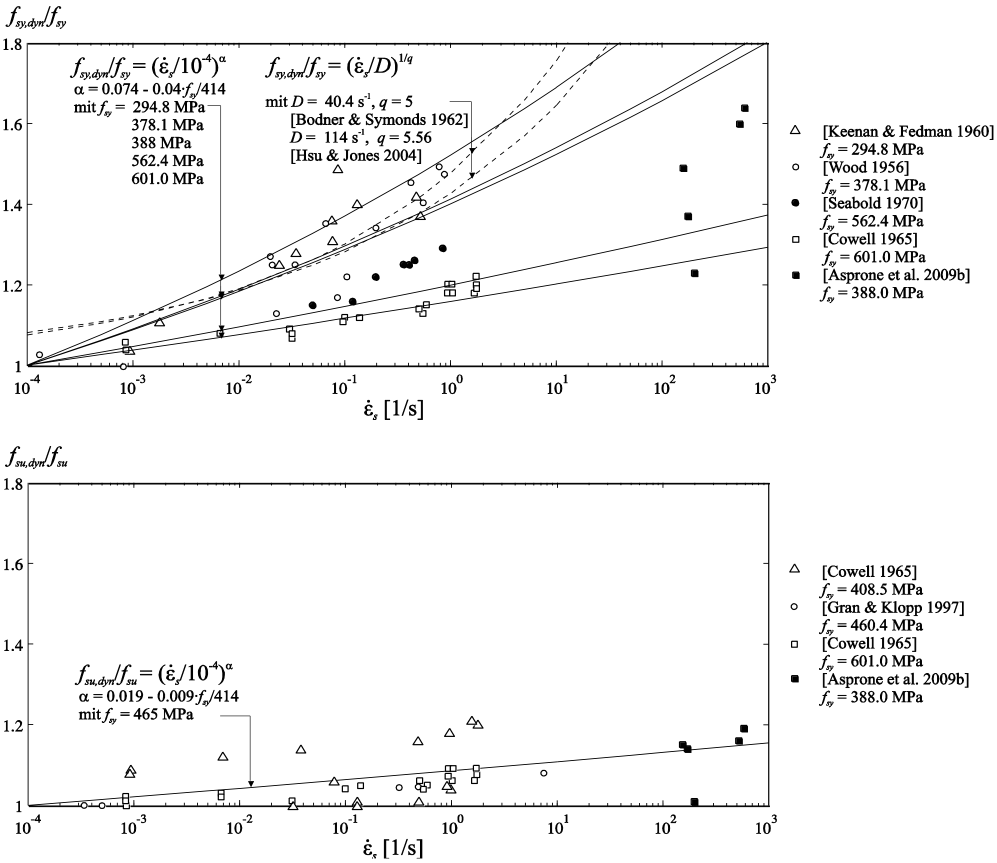


Abb. 2.2 *Verhältnis der einachsigen, statischen und dynamischen Zugbeanspruchung von Betonstahl in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit:*
(a) Versuchsresultate (untere) Fliessfestigkeit (aus [Malvar 1998], ergänzt mit Versuchsresultaten von [Asprone et al. 2009b]) und Vergleich mit Cowper-Symonds Gleichung (2.1) und Beziehungen nach Malvar (2.2), (2.3);
(b) Versuchsresultate Zugfestigkeit (aus [Malvar 1998], ergänzt mit Versuchsresultaten von [Asprone et al. 2009b]) von Betonstahl und Vergleich mit Beziehungen nach Malvar (2.2), (2.4).

Für Betonstahl schlägt [Malvar 1998] die Beziehung

$$\frac{f_{sy,dyn}}{f_{sy}} = \frac{f_{su,dyn}}{f_{su}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_s}{10^{-4}}\right)^{\alpha} \tag{2.2}$$

vor, wobei $\dot{\varepsilon}_s$ die Dehngeschwindigkeit, $f_{sy,dyn}$ und $f_{su,dyn}$ die dynamische Fliess- und Zugfestigkeit, f_{sy} und f_{su} die statische Fliess- und Zugfestigkeit bezeichnen. Der Koeffizient α ist abhängig davon, ob der Fliess- oder der Bruchzustand betrachtet wird und lässt sich für die Berechnung der Fliess- und Zugfestigkeit mit den Beziehungen

$$\alpha = \alpha_{fsy} = 0.074 - 0.04\,\frac{f_{sy}}{414} \tag{2.3}$$

$$\alpha = \alpha_{fsu} = 0.019 - 0.009\,\frac{f_{sy}}{414} \tag{2.4}$$

ermitteln. Die Beziehung (2.2) ist gültig für Fliessfestigkeiten zwischen f_{sy} = 290 MPa und 710 MPa und Dehngeschwindigkeiten zwischen $\dot{\varepsilon}_s = 10^{-4}$ und 10 s^{-1}. Abb. 2.2 (a, b) zeigt einen Vergleich der Beziehung (2.1) von Cowper-Symonds und (2.2) von Malvar mit Versuchsresultaten von Betonstahl unter einachsiger, dynamischer Zugbeanspruchung. Die Versuchsresultate für die Fliessfestigkeit von Betonstahl weisen eine grosse Streubreite auf und zeigen für grosse Dehngeschwindigkeiten [Asprone et al. 2009b] im Vergleich zu den Gleichungen nach Cowper & Symonds und Malvar grosse Abweichungen auf.

Spannungs-Dehnungs-Kurven für naturharten und kaltverformten Betonstahl unter einachsiger, dynamischer Zugbeanspruchung sind in Abb. 2.3 (a, b) dargestellt (aus [Ammann et al. 1982]. Zahlreiche Versuche zeigen, dass der Elastizitätsmodul von Betonstahl nicht von der Dehngeschwindigkeit abhängig ist.

(a) (b)

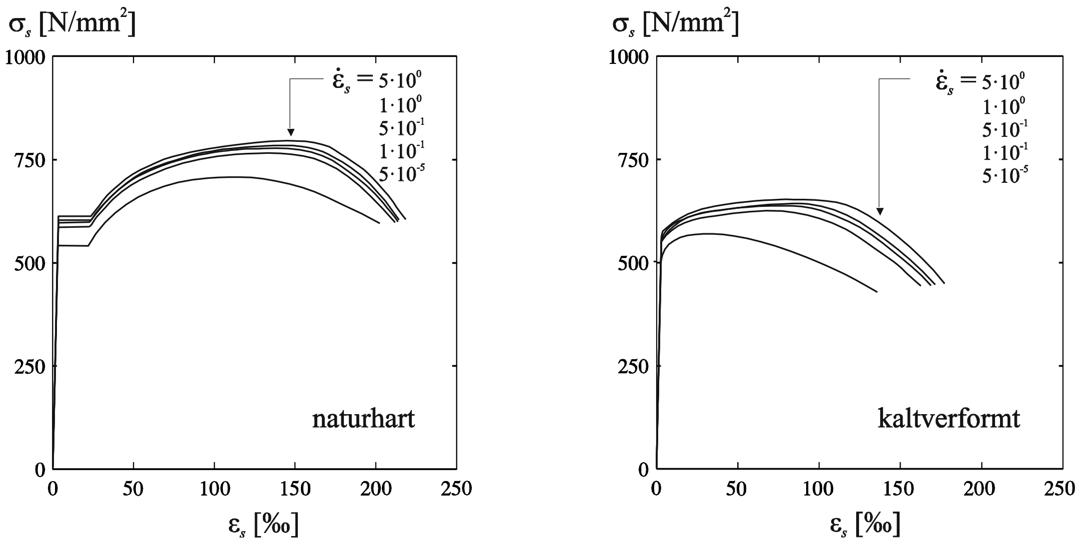


Abb. 2.3 *Einachsige, dynamische Zugbeanspruchung von Betonstahl in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit: Spannungs-Dehnungs-Diagramme für verschiedene Stahlsorten:*
(a) Betonstahl naturhart (Stahlgruppe IIIa) und
(b) Betonstahl kaltverformt (Stahlgruppe IIIb) von Versuchen aus [Ammann et al. 1982].

2.2 Beton

2.2.1 Einachsige Druckbeanspruchung

Die effektive einachsige Druckfestigkeit von Beton, f_c kann basierend auf einer Auswertung zahlreicher Versuche als Funktion der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} mit der Beziehung

$$f_c = 2.7(f_{cc})^{2/3} \quad \text{in N/mm}^2 \tag{2.5}$$

näherungsweise ermittelt werden, wobei $f_c \leq f_{cc} \approx 0.85\ f_{cw}$, [Muttoni et al. 1996]. Bis zum Erreichen der Druckfestigkeit kann die Baustoffcharakteristik mit einem parabolischen Verlauf mit der Beziehung nach [Sargin 1971]

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{E_c \varepsilon_c - \sigma_{c,\max}(\varepsilon_c / \varepsilon_{cu})^2}{1 + \dfrac{E_c \varepsilon_c}{\sigma_{c,\max}} + \dfrac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}}} \tag{2.6}$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnen $\sigma_{c,max}$ die maximale Druckfestigkeit, ε_{cu} die dazugehörige Stauchung und E_c den Elastizitätsmodul des Betons. Die Bruchstauchung ε_{cu} kann mit der Näherung

$$\varepsilon_{cu} \approx 0.9(f_{cc})^{1/4} \quad \text{in ‰} \tag{2.7}$$

nach [Heinzmann 2012] in Anlehnung an [Popovics 1973] ermittelt werden.

Der Elastizitätsmodul lässt sich mit der Beziehung

$$E_c = k_E(f_{cc})^{2/3} \quad \text{in N/mm}^2 \tag{2.8}$$

beschreiben. Dabei beträgt k_E je nach Zuschlag $(8...11)\cdot 10^3$.

Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung sind in Abb. 2.4 dargestellt; U_{cF} bezeichnet die spezifische Bruchenergie bezogen auf das Volumen der Bruchzone.

(a) (b) (c)

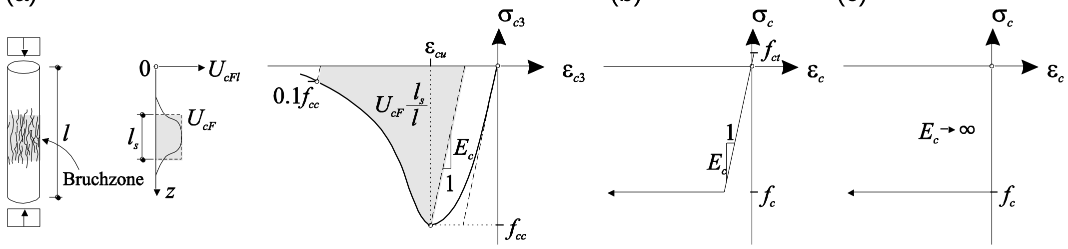


Abb. 2.4 *Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton unter (einachsiger) Druckbeanspruchung:*
(a) Betonzylinder mit Bruchzone und qualitativer Verlauf der Last-Verformungskurve;
(b) Idealisierung als linear elastisch-ideal plastisch;
(c) Idealisierung als starr-ideal plastisch.

2.2.2 Einachsige Zugbeanspruchung

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung für Beton unter einachsiger Zugbeanspruchung lässt sich bis zum Erreichen der Zugfestigkeit als linear elastisch idealisieren. Das Bruchverhalten des zugbeanspruchten Betons ist spröde. Die einachsige Zugfestigkeit f_{ct} weist erfahrungsgemäss aus experimentellen Untersuchungen eine grosse Streuung auf. Gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit von Beton ist sie jedoch relativ gering. Daher wird sie bei der Berechnung des Tragwiderstands von Stahlbetonstrukturen in der Regel vernachlässigt. Für die Querkrafttragfähigkeit von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung, das Verformungsvermögen, das Verbundverhalten zwischen Beton und Betonstahl und für verschiedene lokale Phänomene ist die Berücksichtigung der Zugfestigkeit des Betons jedoch erforderlich. Die einachsige Zugfestigkeit des Betons kann näherungsweise als Funktion der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} nach [Raphael 1984] mit der Beziehung

$$f_{ct} = 0.3(f_{cc})^{2/3} \quad \text{in N/mm}^2 \tag{2.9}$$

bestimmt werden.

2.2.3 Dynamische Eigenschaften

Das dynamische Materialverhalten von Beton, insbesondere der Einfluss konstanter Dehngeschwindigkeiten auf die Zug- und Druckfestigkeiten (einachsige Beanspruchung), wurde wie nachfolgend erläutert von zahlreichen Autoren untersucht. Anhand umfangreicher Versuche an Betonprüfkörpern konnte der festigkeitssteigernde Einfluss bei Erhöhung der Beanspruchungsgeschwindigkeit für Zug- und Druckbeanspruchung bestätigt werden.

Belastungsmethoden und Versuchsaufbauten zur Messung des Einflusses der Dehngeschwindigkeit auf die Materialeigenschaften von Beton weisen in den verschiedenen Forschungsinstitutionen teilweise grosse Unterschiede auf [Reinhardt 1982]. Die Interaktion der Steifigkeiten des Versuchskörpers und der Maschine spielt eine grosse Rolle für die Ergebnisse. Die aus unterschiedlichen Methoden erhaltenen Versuchsresultate und -techniken führten oftmals zu grossen Unterschieden und Abweichungen und sind daher teilweise nicht direkt vergleichbar.

Bei den meisten Autoren wird die statische Festigkeit von Beton einer Dehnrate von $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}$ s^{-1} zugeordnet. Zur Untersuchung von relativ grossen Dehngeschwindigkeiten (ca. $\dot{\varepsilon}_c > 1$ s^{-1}) ist es erforderlich, Fall- oder Explosionsversuche durchzuführen. Dabei wird es zunehmend schwieriger, die Dehngeschwindigkeiten während der Belastung konstant zu halten. Die Versuche an Beton unter dynamischer Druck- und Zugbeanspruchung wurden insbesondere für hohe Dehngeschwindigkeiten (ca. $\dot{\varepsilon} > 10$ s^{-1}) mit dem Split-Hopkinson-Bar-Versuch (SHB-Versuch) durchgeführt ([Ross et al. 1989], [Ross et al. 1996], [Zheng 1996]). Der SHB-Versuch wurde zur Ermittlung dynamischer Materialeigenschaften erstmals von [Kolsky 1949] verwendet und daraufhin stetig weiterentwickelt. Im Bereich grosser Dehngeschwindigkeiten ($\dot{\varepsilon}_{ct} > 10$ s^{-1}) wurden die Daten aus indirekten Zugversuchen (z. B. Spaltzugversuche, engl.: splitting-tensile test) gewonnen. Direkte Zugversuche (engl.: direct-tensile test) sind in diesem Bereich wenig bekannt.

Einachsige Druckbeanspruchung

Zahlreiche Versuche bestätigen den festigkeitssteigernden Einfluss von steigender Belastungsgeschwindigkeit an Probekörpern aus Beton infolge Druckbeanspruchung.

Basierend auf dem [CEB 1988] formulierte der [CEB 1993] den dynamischen Erhöhungsfaktor (engl.: dynamic increase factor) für die Druckfestigkeit von Beton wie folgt:

$$\frac{f_{c,dyn}}{f_{cm}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{c0}}\right)^{1.026\,\alpha_s} \quad \text{für } \dot{\varepsilon}_c \leq 30\,\text{s}^{-1}$$

$$\frac{f_{c,dyn}}{f_{cm}} = \gamma_s\left(\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{c0}}\right)^{1/3} \quad \text{für } \dot{\varepsilon}_c > 30\,\text{s}^{-1} \qquad (2.10)$$

wobei log γ_s = 6.156α_s – 2, α_s = (5 + 9f_{cm}/f_{cm0})-1, f_{cm0} = 10 N/mm² und der Referenzwert der Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{c0}$ = 30·10⁻⁶ s⁻¹ betragen. Dabei bezeichnen f_{cm} die mittlere Zylinderdruckfestigkeit, $f_{c,dyn}$ die dynamische Betondruckfestigkeit und $\dot{\varepsilon}_c$ die Dehngeschwindigkeit des Betons. Der [fib 2013] schlägt für Beton unter Druckbeanspruchung vereinfachend die Beziehung (2.10) mit den Materialparametern γ_s = 0.012 und (1.026 α_s) = 0.014 vor. Der Gültigkeitsbereich der Formeln ist für Dehngeschwindigkeiten für Beton unter Druckbeanspruchung mit $30\cdot10^{-6}$ s⁻¹ < $\dot{\varepsilon}_c$ < $3\cdot10^{2}$ s⁻¹ festgelegt.

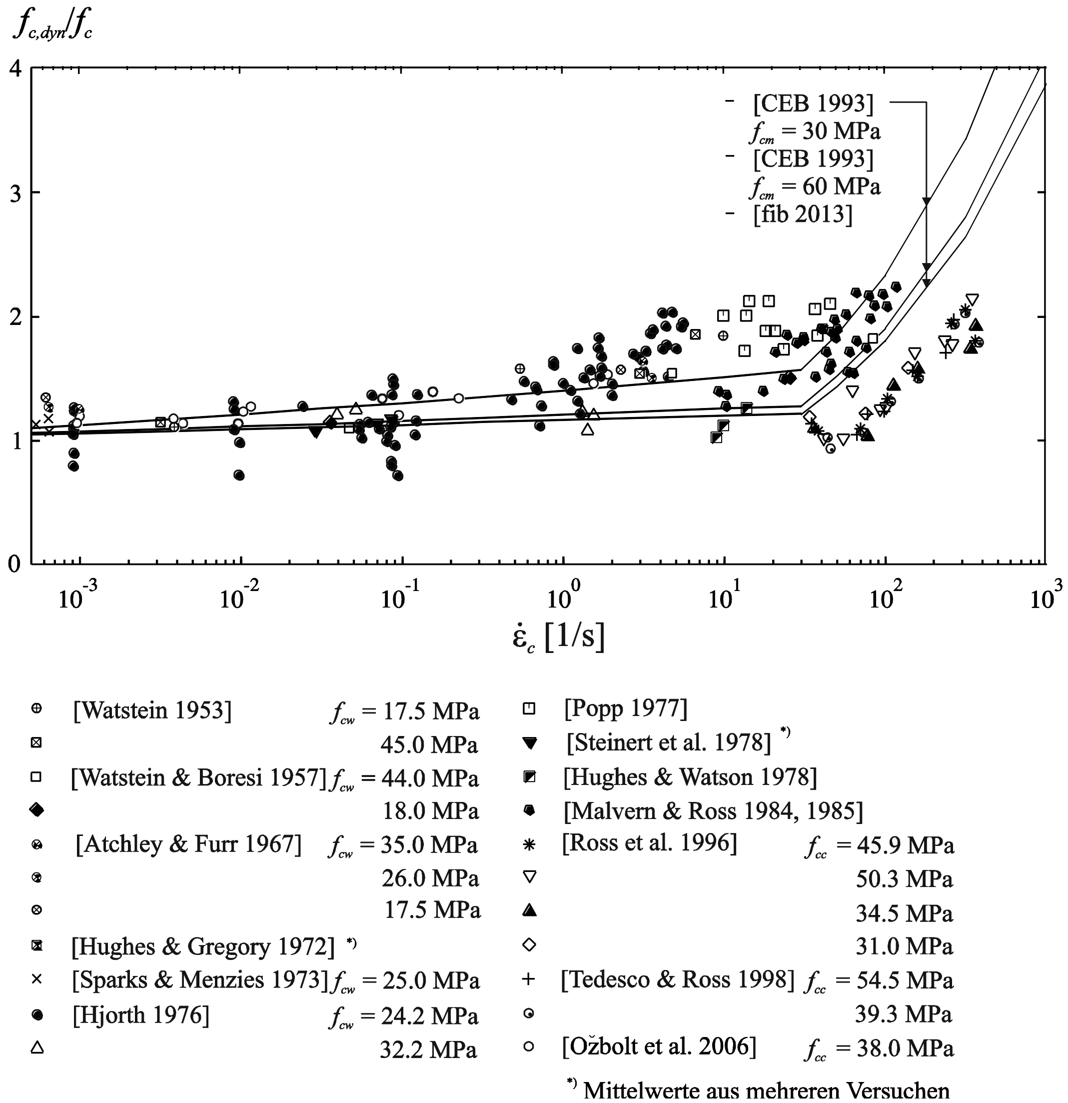


Abb. 2.5 *Verhältnis der einachsigen, statischen und dynamischen Druckfestigkeit von Beton in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit: Versuchsresultate aus [König & Dargel 1982], ergänzt mit Versuchen aus [Bischoff & Perry 1991] (Versuche an Würfel, Prisma, Zylinder), [Ross et al. 1996], [Tedesco & Ross 1998], [Ožbolt et al. 2006] (Versuche an Zylinder) sowie Vergleich mit der empirischen Beziehung (2.10) und der modifizierten Beziehung nach [fib 2013].*

In Abb. 2.5 sind die Versuchsresultate der statischen und dynamischen Druckfestigkeiten von Beton für verschiedene Dehngeschwindigkeiten aus der Literatur und ein Vergleich mit der Beziehung (2.10) und der modifizierten Beziehung nach [fib 2013] dargestellt. Der Vergleich der Versuchsresultate verschiedener Autoren zeigt teilweise eine grosse Streuung auf, welche mit Erhöhung der Dehngeschwindigkeit tendenziell zunimmt. Die Unterschiede sind wahrscheinlich auf die unterschiedlichen Belastungsmethoden, Versuchsaufbauten, Eigenschaften der Probekörper (Form, Grösse, Betonzusammensetzung), Auswertungsmethoden etc. zurückzuführen. Des Weiteren wurde die statische Dehnrate nicht von allen Autoren mit $\dot{\varepsilon}_c = 10^{-5}$ s^{-1} berücksichtigt; den Resultaten von [Malvern & Ross 1984, 1985] und [Atchley & Furr 1967] beispielsweise wurde eine Dehnrate von $\dot{\varepsilon}_c = 10^{-3}$ s^{-1} und $\dot{\varepsilon}_c = 4.5 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} zugrunde gelegt [Bischoff & Perry 1991].

Der Übergangsbereich, bei welchem der Beton anschliessend eine starke Festigkeitszunahme erfährt, ist mit den in Abb. 2.5 dargestellten Versuchen nicht klar ersichtlich. Bei den Versuchsresultaten von [Ross et al. 1996] und [Tedesco & Ross 1998] bleibt das Verhältnis zwischen dynamischer und statischer Druckfestigkeit für Dehngeschwindigkeiten bis etwa 60...80 s^{-1} nahezu konstant.

Der Einfluss der Betonzusammensetzung und somit der Festigkeitsklasse von Beton auf die Festigkeitssteigerung mit zunehmender Dehngeschwindigkeit zeigt keine einheitliche Tendenz auf. Während bei [Hjorth 1976] und [CEB 1988] beobachtet wurde, dass Beton von geringer Festigkeitsklasse gegenüber Beton von hoher Festigkeitsklasse eine grössere Festigkeitssteigerung bei gleicher Belastungsgeschwindigkeit erfährt, zeigt eine Gegenüberstellung von Versuchsresultaten mit unterschiedlichen Festigkeitsklassen in [Bischoff & Perry 1991] keine klare Tendenz auf.

Die Streuung des Elastizitätsmoduls von Beton ist relativ gross und eine Erhöhung des Elastizitätsmoduls mit zunehmender Dehnrate, wie dies von zahlreichen Autoren vorgeschlagen wird, erscheint nicht richtig zu sein [van Mier 1997]. Abb. 2.6 illustriert die grosse Streuung des dynamischen Anteils des Elastizitätsmoduls von Beton, welche wahrscheinlich insbesondere auf die unterschiedlichen Messtechniken zurückgeht. Des Weiteren sind auch Trägheitseffekte und der Feuchtegehalt im Beton mögliche Einflussgrössen. Eine Zunahme des Feuchtegehalts führt zu einer Erhöhung des Elastizitätsmoduls [Reinhardt et al. 1990] und der Druckfestigkeit [Ross et al. 1996] des Betons. In den empirischen Formeln nach [CEB 1993] und [fib 2013] wird der Einfluss des Feuchtegehalts nicht berücksichtigt.

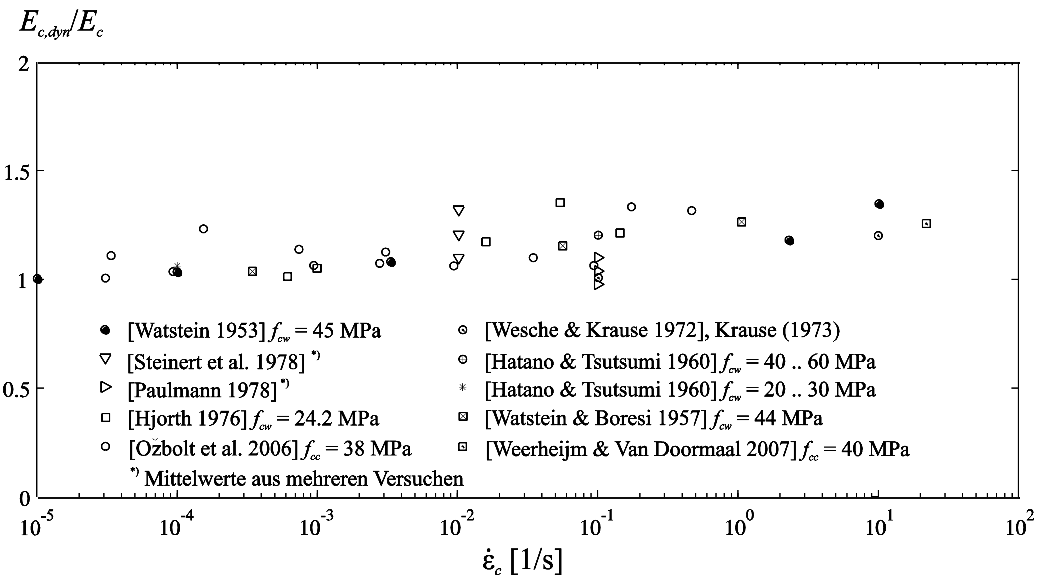


Abb. 2.6 *Elastizitätsmodul von Beton: Verhältnis des dynamischen und statischen Elastizitätsmoduls aus Versuchen für verschiedene Dehngeschwindigkeiten (aus [Ammann 1983], ergänzt mit [Watstein & Boresi 1957] aus [Dargel 1984], [Ožbolt et al. 2006], [Weerheijm & Van Doormaal 2007].*

Einachsige Zugbeanspruchung

Eine umfassende Darstellung der dynamischen Betoneigenschaften von auf Zug beanspruchtem Beton ist bei [Weerheijm 2013] zu finden.

Das dynamische Verhalten von Beton unter einachsiger Zugbeanspruchung wurde von zahlreichen Autoren experimentell untersucht ([Zielinski et al. 1981], [Reinhardt 1982], [Ross et al. 1989], [Reinhardt & Weerheijm 1991]). Zielinski, Reinhardt und Weerheijm untersuchten den Dehnrateneinfluss auf die Zugfestigkeit von Beton mit bruchmechanischen Überlegungen. Das erarbeitete Modell ist von [Weerheijm 1992] ausführlich beschrieben und wurde für mittlere und hohe Dehngeschwindigkeiten angewendet. Die potentielle Bruchfläche eines Betonkörpers unter Zugbeanspruchung wird als eine fiktive Bruchfläche, die sogenannte „fictitious-failure plane“ modelliert. Die Geometrie dieser Bruchfläche ergibt sich einerseits aus der Bedingung, dass die in der Bruchfläche dissipierte Energie im Modell mit derjenigen in der Wirklichkeit übereinstimmt, und andererseits wird die Rissentwicklung in der fiktiven Bruchfläche mit Spannungs- und Verschiebungsfelder basierend auf der linear elastischen Bruchmechanik (engl.: linear elastic fracture mechanics) beschrieben. Das Modell beschreibt den Einfluss des Dehnrateneffekts auf die Rissbildung und das Risswachstum.

[Ross et al. 1996] entwickelten ein analytisches Modell für die Zugfestigkeit von (trockenem) Beton für einen weiten Bereich von Dehngeschwindigkeiten auf der Grundlage der Bruchmechanik und Energieerhaltung. Sowohl die Bruchzähigkeit als auch die Rissgeschwindigkeit beschreiben das Festigkeitsverhalten des Betons infolge Zugbeanspruchung.

Die dynamische Zugfestigkeit von Beton ist vom Risswachstum, der Rissgeschwindigkeit und der Belastungsrate $\dot{\sigma}$ abhängig. Wiederum ist der zugbeanspruchte Beton mit geringerer Festigkeit stärker dehnratenabhängig als Beton mit höherer Festigkeit.

Die Versuche an Probekörpern aus Beton unter Zugbeanspruchung zeigen den festigkeitssteigernden Einfluss der Dehngeschwindigkeit. Die Sensitivität der Betonfestigkeit, nämlich die Neigung der Kurve der Festigkeitsverhältnisse gegenüber der logarithmischen Dehngeschwindigkeit, aufgrund unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten für Zugbeanspruchung ist in Abb. 2.7 dargestellt. Der Vergleich verschiedener Versuchsresultate zeigt, dass es bei Zugbeanspruchung ebenfalls einen Übergangsbereich gibt, bei welchem der Beton anschliessend eine starke Festigkeitszunahme erfährt. Es zeigt sich, dass der Übergangsbereich für Beton unter Zugbeanspruchung bereits bei geringeren Dehngeschwindigkeiten als unter Druckbeanspruchung eintritt. Zudem ist die Sensitivität der Dehngeschwindigkeit bei grösseren Dehngeschwindigkeiten für Zugbeanspruchung grösser als für Druckbeanspruchung. Der Übergangsbereich der Dehngeschwindigkeit für trockenen Beton unter Zugbeanspruchung befindet sich etwa bei 1...10 s^{-1} [Ross et al. 1996]. Weiter kann beobachtet werden, dass die Sensitivität auf die Belastungsgeschwindigkeit für höhere Dehngeschwindigkeiten bei Zugbeanspruchung höher ist als bei Druckbeanspruchung.

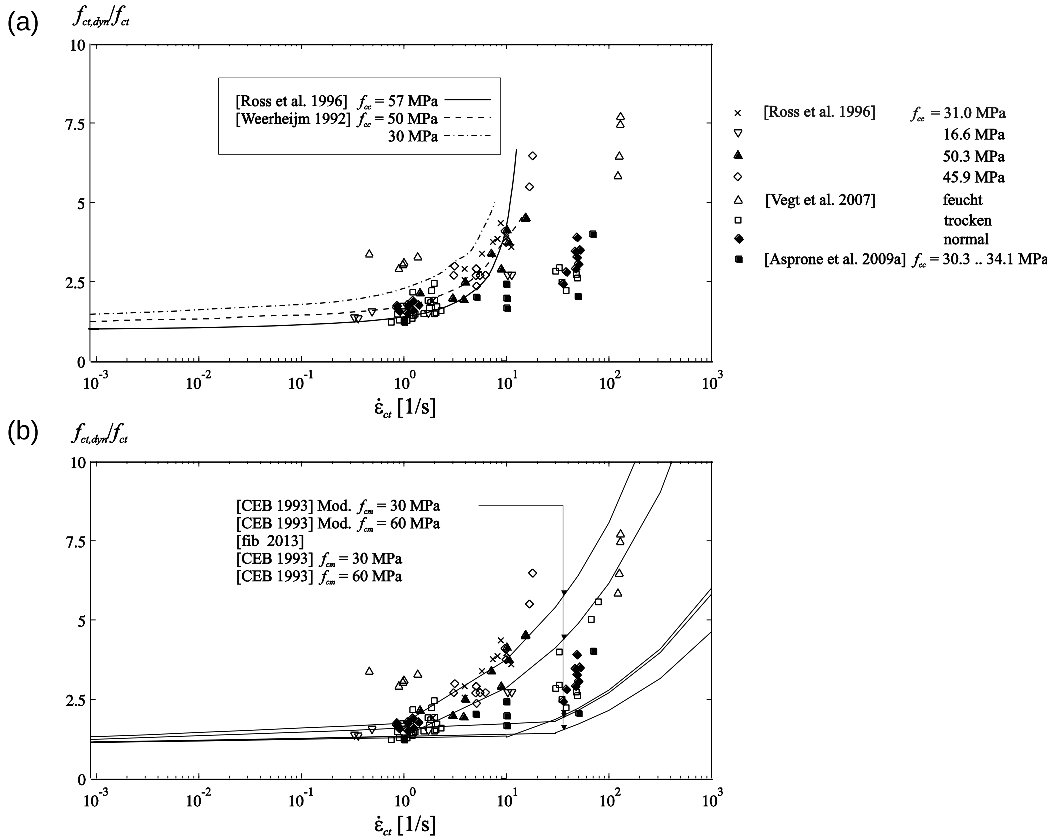


Abb. 2.7 *Verhältnis der einachsigen, statischen und dynamischen Zugfestigkeit von Beton in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit:*
(a) Vergleich der Verhältnisse von dynamischen und statischen Zugfestigkeiten aus Versuchen für verschiedene Dehngeschwindigkeiten mit analytischen Modellen;
(b) Vergleich verschiedener empirischer Formeln mit Versuchsresultaten (modifizierte Formel: [CEB 1993] Mod. nach [Malvar & Ross 1998]). Die Versuche wurden an trockenen Betonproben respektive diejenigen von [Vegt et al. 2007] an feuchten (vollständig wassergesättigt), trockenen und normalen Betonproben durchgeführt.

Basierend auf dem [CEB 1988] formulierte der [CEB 1993] den dynamischen Erhöhungsfaktor (engl.: dynamic increase factor) für die Zugfestigkeit von Beton wie folgt:

$$\frac{f_{ct,dyn}}{f_{ctm}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{ct0}}\right)^{1.016 \cdot \delta} \quad \text{für}\, \dot{\varepsilon}_{ct} \leq 30\,\text{s}^{-1}$$

$$\frac{f_{ct,dyn}}{f_{ctm}} = \beta\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{ct0}}\right)^{1/3} \quad \text{für}\, \dot{\varepsilon}_{ct} > 30\,\text{s}^{-1} \tag{2.11}$$

Dabei wird von einer (quasi-)statischen Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{ct0} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$ (Referenzwert) für auf Zug beanspruchten Beton ausgegangen. Die Materialkonstanten betragen $\delta = (10 + 6 f_{cm}/f_{cm0}) - 1$ und $\log\beta = 7.11\ \delta - 2.33$, wobei $f_{cm0} = 10\ \text{N/mm}^2$. In einem doppelt logarithmischen Diagramm entspricht die empirische Beziehung (2.11) einer bilinearen Funktion mit einer Neigungsänderung bei $\dot{\varepsilon}_{ct} = 30\ \text{s}^{-1}$.

Zahlreiche experimentelle Untersuchungen ([Reinhardt 1982], [Weerheijm & Reinhardt 1989]) weisen darauf hin, dass der Neigungswechsel bereits bei etwa $\dot{\varepsilon}_{ct} = 1\ s^{-1}$ eintritt. Des Weiteren scheint eine (quasi) statische Dehngeschwindigkeit von $\dot{\varepsilon}_{ct0} = 1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$ als Ursprung der Funktion besser geeignet [Ross et al. 1996].

Malvar & Ross (1998) schlagen eine Modifizierung der Beziehung (2.11) vor:

$$\frac{f_{ct,dyn}}{f_{ctm}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{ct0}}\right)^{\delta^*} \quad \text{für } \dot{\varepsilon}_{ct} \leq 1\ s^{-1}$$

$$\frac{f_{ct,dyn}}{f_{ctm}} = \beta\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{ct0}}\right)^{1/3} \quad \text{für } \dot{\varepsilon}_{ct} > 1\ s^{-1} \tag{2.12}$$

da die ursprüngliche Beziehung (2.11) nach [CEB 1993] insbesondere für Dehngeschwindigkeiten grösser als 1 s^{-1} Abweichungen aufzeigte. Dabei wird von einer (quasi-)statischen Dehngeschwindigkeit von $\dot{\varepsilon}_{ct0} = 1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$ für auf Zug beanspruchten Beton ausgegangen, unterhalb welcher es keine Erhöhung der Zugfestigkeit gibt. Die Materialkonstanten betragen $\delta^* = (1 + 8f_{cm}/f_{cm0})^{-1}$ und $\log\beta = 6\ \delta^* - 2$, wobei $f_{cm0} = 10$ N/mm². Der [fib 2013] verwendet für die Beziehung (2.12) die Materialkonstanten $\delta^* = 0.018$ und $\beta = 0.0062$. Die (quasi-)statische Dehngeschwindigkeit beträgt ebenfalls $\dot{\varepsilon}_{ct0} = 1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$. Der Neigungswechsel befindet sich bei einer Dehngeschwindigkeit von $\dot{\varepsilon}_{ct} = 10\ s^{-1}$.

Der Dehnrateneinfluss wird je nach Bereich der untersuchten Dehngeschwindigkeiten von unterschiedlichen „Phänomenen“ bestimmt.

In zahlreichen experimentellen Untersuchungen wurde der Einfluss des Feuchtegehalts in Beton auf die dynamischen Festigkeiten insbesondere im mittleren Dehnratenbereich beobachtet ([Reinhardt et al. 1990], [Ross et al. 1995], [Ross et al. 1996], [Cadoni et al 2001]). Insbesondere zeigt sich bei feuchtem Beton unter Zugbeanspruchung ein wesentlicher Dehnrateneinfluss ([Ross et al. 1990], [Weerheijm 2013]). Der dynamische Erhöhungsfaktor für die Zugfestigkeit von Beton wird massgeblich vom Feuchtegehalt der Betonprobe beeinflusst und ist somit abhängig von der Kapillarporenstruktur respektive der Betonqualität. In den empirischen Formeln nach [CEB 1993], [Malvar & Ross 1998] sowie [fib 2013] wird der Einfluss des Feuchtegehalts nicht berücksichtigt. Die Erklärung für den Effekt des Feuchtegehalts lässt sich mit dem sogenannten „Stefan-Effekt“ (engl.: Stefan effect) aufzeigen [Cottrell 1964]. Dabei werden zwei parallele Kreisplatten mit einer sich dazwischen befindenden inkompressiblen Flüssigkeit betrachtet. Die aufzubringende Zugkraft, um die beiden Kreisplatten voneinander zu trennen, ist dabei proportional zur Viskosität der Flüssigkeit und der Geschwindigkeit. Die Flüssigkeit führt zu einem zusätzlichen Widerstand, welcher sich mit zunehmender Dehnrate erhöht. Dieser Stefan-Effekt nimmt wahrscheinlich bei hohen Dehnraten wieder ab oder verschwindet oberhalb eines gewissen Dehnratenbereichs möglicherweise gänzlich [Weerheijm 2013].

Des Weiteren zeigt sich im Bereich mittlerer Dehnraten ein verstärktes Zuschlagkornversagen, welches wesentlich zur Festigkeitssteigerung von Beton unter Zugbeanspruchung beiträgt ([Körmeling et al. 1980], [Curbach 1987], [Weerheijm 1992]).

Trägheitseffekte beeinflussen die Mikrorissbildung und den Rissöffnungsvorgang im Beton und verursachen eine zeitabhängige Zugfestigkeitssteigerung bei hohen Beanspruchungsgeschwindigkeiten [Weerheijm 1992].

2.3 Verbund und Zugversteifung

2.3.1 Verbundverhalten zwischen Betonstahl und Beton

Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton basiert grösstenteils auf der Verzahnung der profilierten Betonstahloberflächen, den Rippen mit dem Beton. Das Zusammenwirken zwischen den beiden Baustoffen beeinflusst das Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonstrukturen. Die Verbundcharakteristik wird durch die an einem differentiellen Stabzugelement wirkende (nominelle) Verbundschubspannung τ_b sowie der Relativverschiebung zwischen Bewehrung und Beton, dem sogenannten Schlupf δ, beschrieben, Abb. 2.8 (a). Die Differentialgleichung für den verschieblichen Verbund lässt sich durch die Formulierung des Gleichgewichts am Stabelement durch Annahme des Ebenbleibens des Querschnitts und eines linear elastischen Materialverhaltens bestimmen und lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4\tau_b}{E_s Ø} + \frac{\pi Ø\,\tau_b + q}{A_c E_c (1-\rho)} \qquad (2.13)$$

wobei A_s und A_c die Bewehrungsquerschnittsfläche und die Bruttoquerschnittsfläche des Betons, $\rho = A_s/A_c$ den Bewehrungsgehalt, E_s und E_c die Elastizitätsmoduli der Bewehrung und des Betons, $q = q(x)$ die Streckenlast und Ø den Stabdurchmesser der Bewehrung bezeichnen.

Der Verbund bewirkt bei einem auf Zug beanspruchten Stahlbetonelement eine Zugversteifung im Vergleich zum Verhalten eines nackten Stahls. Anhand des Risselements in Abb. 2.8 (c) wird die Zugversteifung an einem gerissenen Stahlbetonelement mit der daraus resultierenden Verteilung der Verbundschubspannungen sowie der Spannungen und Dehnungen der Bewehrung aufgezeigt.

2.3.2 Zugversteifung

Das Verbundverhalten zwischen Beton und Bewehrung führt zu einer Zugversteifung (engl.: tension stiffening) des Stahlbetonzugelements. Das Tragverhalten eines auf Zug beanspruchten Stahlbetonelementes kann mit dem Zuggurtmodell ([Sigrist 1995], [Alvarez 1998]) untersucht werden. Eine ausführliche Darstellung des Zuggurtmodells wird in [Marti et al. 1998] beschrieben.

Das Zuggurtmodell erlaubt die Berechnung der Spannungen und Verzerrungen des Betonstahls und des Betons für ein gerissenes Stahlbetonzugglied mittels einer Gleichgewichtsformulierung am Bewehrungsstab, so dass das Lösen der Differentialgleichung des Verbunds (2.13) umgangen werden kann.

[Sigrist 1995] schlägt zur Beschreibung des Verbundverhaltens von Stahlbetonzuggliedern eine starr-ideal plastische (abgetreppte) Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung vor, Abb. 2.8 (b). Aus Beobachtungen in Versuchen empfiehlt Sigrist für gerippte Betonstähle, die beiden Verbundspannungsniveaus $\tau_{b0} = 0.6\ f_{cc}^{2/3}$ und $\tau_{b1} = 0.3\ f_{cc}^{2/3}$ zu verwenden, wobei ersteres für Betonstahl im linear elastischen Bereich und letzteres im fliessenden Bereich gilt.

Abb. 2.8 (c) veranschaulicht die Zugversteifung an einem allgemeinen Risselement eines Zugglieds mit einem Rissabstand s_r anhand der Verteilung der Verbundschubspannungen, der Spannungen und Dehnungen in der Bewehrung. Die Betonspannung verschwindet bei den Rissen, so dass die Last ausschliesslich von der Bewehrung übertragen wird. Die Verbundspannungen τ_{b0} und τ_{b1} sowie die Rissabstände sind die Freiheitsgrade des Zuggurtmodells, wobei letzterer meistens durch eine querschnittsmindernde Querbewehrung aufgehoben wird.

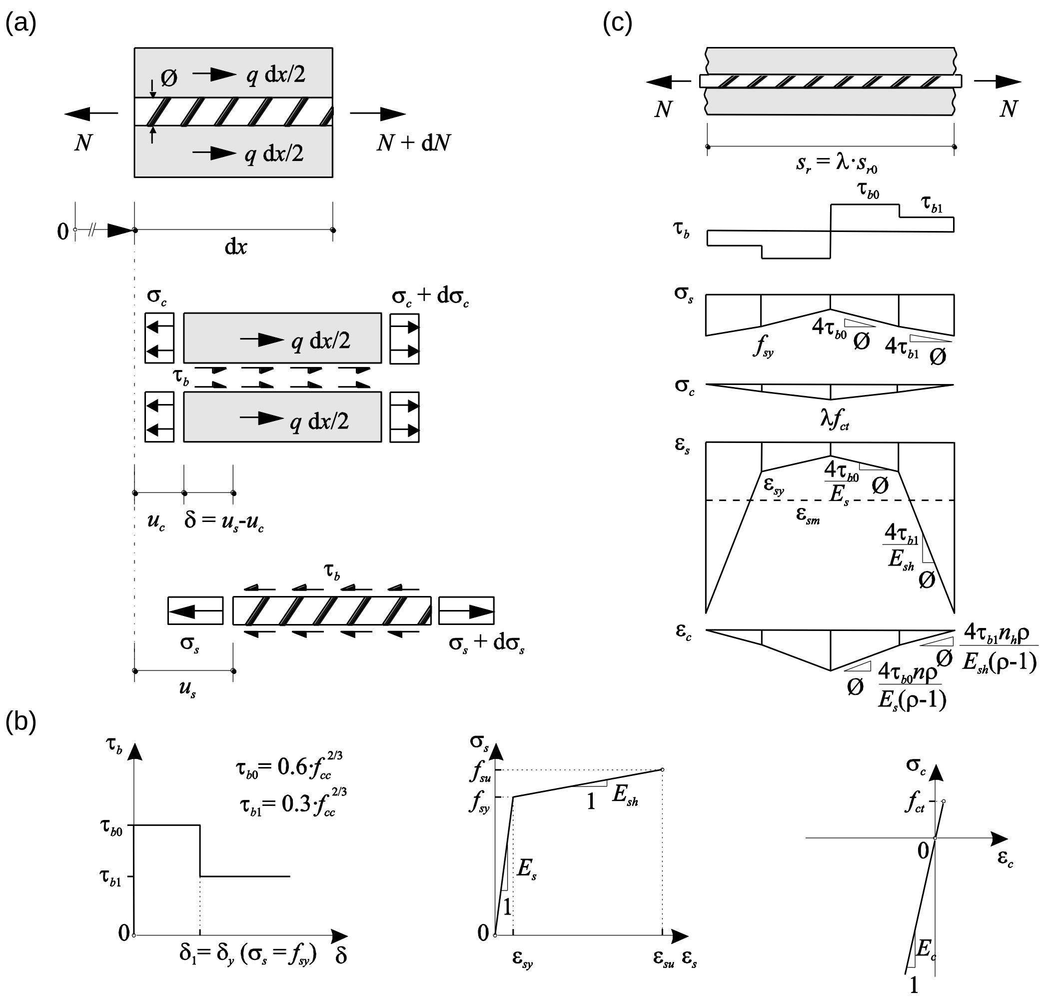


Abb. 2.8 *Verbundverhalten zwischen Betonstahl und Beton:*
(a) differentielles Stahlbetonzugelement; Zuggurtmodell ([Sigrist 1995], [Alvarez 1998]);
(b) starr-ideal plastische (abgetreppte) Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung und Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Bewehrung und des Betons;
(c) schematische Darstellung der Zugversteifung an einem allgemeinen Risselement eines Zugglieds mit Verteilung der Verbundschubspannungen und der Spannungen respektive Dehnungen im Beton und in der Bewehrung.

Die Steigungen der Dehnungsverläufe im Betonstahl und Beton sind mit den linearen Beziehungen für Betonstahl und Beton sowie der abgetreppten Verbundbeziehung eindeutig bestimmt, Abb. 2.8 (b). Daraus folgt die Beziehung für den maximalen Rissabstand:

$$s_{r0} = \frac{Ø f_{ct}}{2\tau_{b0}} \frac{(1-\rho)}{\rho} = \frac{Ø(1-\rho)}{4\rho} \tag{2.14}$$

Der Bereich des theoretischen Rissabstandes s_r lautet:

$$\frac{s_{r0}}{2} \leq s_r \leq s_{r0} \text{ respektive } s_r = \lambda s_{r0} \tag{2.15}$$

wobei die Schranke $0.5 \leq \lambda \leq 1$ gilt.

Die mittleren Dehnungen ε_{sm} des Stahlbetonzugglieds betragen je nach Beanspruchung $\sigma_{sr} = N/A_s$ des Betonstahls

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0} s_r}{ØE_s} \tag{2.16}$$

falls die Stahlspannungen unterhalb der Fliessgrenze liegen, d. h. die Bewehrung bleibt im elastischen Zustand entlang des ganzen Risselements ($f_{ct}E_s/E_c + 2\tau_{b0}s_r/Ø \leq \sigma_{sr} \leq f_{sy}$)

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\left(\sigma_{sr} - f_{sy}\right)^2 Ø}{4E_{sh}\tau_{b1}s_r}\left(1 - \frac{E_{sh}\tau_{b0}}{E_s\tau_{b1}}\right) + \frac{\sigma_{sr} - f_{sy}}{E_s}\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} + \frac{f_{sy}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}s_r}{ØE_s} \tag{2.17}$$

für Stahlspannungen, die sowohl unterhalb als auch oberhalb der Fliessgrenze liegen und die Bewehrung somit in Rissnähe fliesst ($f_{sy} \leq \sigma_{sr} \leq f_{sy} + 2\tau_{b1}s_r/Ø$)

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr} - f_{sy}}{E_{sh}} + \frac{f_{sy}}{E_s} - \frac{\tau_{b1}s_r}{ØE_{sh}} \tag{2.18}$$

für Stahlspannungen, die oberhalb der Fliessgrenze liegen, d. h. die Bewehrung fliesst entlang des gesamten Risselements (Plastifizierung des Risselements: $f_{sy} + 2\tau_{b1}s_r/Ø \leq \sigma_{sr} \leq f_{su}$). Die mittleren Betondehnungen ε_{cm} bis zum Erreichen der Zugfestigkeit können in analoger Weise erhalten werden.

2.3.3 Dynamische Verbundeigenschaften

Das Verbundverhalten zwischen Betonstahl und Beton wird von der Dehngeschwindigkeit massgeblich beeinflusst. Dynamische Ausziehversuche bei erhöhter Dehngeschwindigkeit zeigen eine zunehmende Verbundtragfähigkeit im Vergleich zu statischen Ausziehversuchen. In den von [Hjorth 1976] durchgeführten Ausziehversuchen zur Untersuchung des Verbundverhaltens an zylindrischen Betonkörpern mit Stabdurchmessern von Ø = 16 mm und verschiedenen Verbundlängen l_v zeigt sich bei gerippten Stäben eine beträchtliche Erhöhung der Verbundfestigkeit $\tau_{b,max}$ in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit, während bei glatten Stäben der Dehnrateneinfluss vernachlässigbar ist, Abb. 2.9 (a). Hjorth folgert aus seinen Versuchsresultaten, dass die Erhöhung der Verbundfestigkeiten hauptsächlich den Materialeigenschaften des Betons zugeschrieben werden kann und diese nicht auf eine Änderung des Verbundmechanismus hinweisen. Die τ_b-δ-Beziehung zwischen Bewehrung und Beton bei hohen Dehngeschwindigkeiten verändert sich somit nur insofern, als eine Zunahme der Verbundspannung bei gleicher Verschiebung eine Parallelverschiebung der τ_b-δ-Kurve (Zunahme der Verbundspannungen τ_b bei gleichem Schlupf und nahezu gleichen Stahldehnungen) bewirkt. Dagegen war eine wesentliche Neigungsänderung der Verbundspannungs-Verschiebungs-Kurven für gleichartige Stähle nicht zu erwarten. Eine zunehmende Dehngeschwindigkeit bewirkt auch für hohe Lasten keine wesentliche Veränderung der Verbundspannungsverteilung.

[Vos & Reinhardt 1980] erweitern den Versuchsbereich von Hjorth für hohe Dehngeschwindigkeiten mittels einer Split-Hopkinson-Bar-Anlage. Wiederum zeigen gerippte Stäbe einen deutlichen Zuwachs der Verbundfestigkeit bei zunehmender Dehngeschwindigkeit auf. In Abb. 2.9 (b) ist der Zuwachs der Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von dem Schlupf für verschiedene Dehngeschwindigkeiten dargestellt. Die verwendeten Stäbe weisen Durchmesser von Ø = 10 mm auf. Die Verbundfestigkeitszunahme $\tau_{b,dyn}/\tau_b$ nimmt mit zunehmendem Schlupf ab.

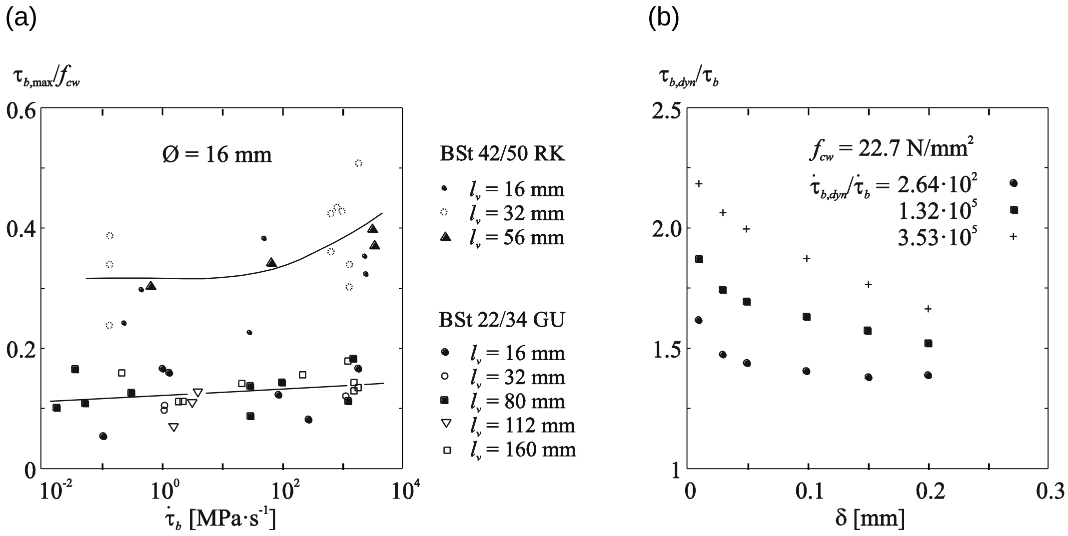


Abb. 2.9 *Ausziehversuche:*
(a) Verbundcharakteristik in Abhängigkeit von der Dehngeschwindigkeit, aus [Hjorth 1976]. Würfeldruckfestigkeit (β_w =) f_{cw} = 1.15 f_{cc} (20 cm Würfel, Betonalter 28 Tage), RK = gerippte Stäbe, GU = glatte Stäbe;
(b) Einfluss des Schlupfs auf das Verhältnis der dynamischen und statischen Verbundfestigkeit für verschiedene Dehngeschwindigkeiten, aus [Vos & Reinhardt 1980]. BSt 42/50 RK und BSt 22/34 GU sind die Bezeichnungen für die verwendeten Betonstahlsorten nach der früheren Norm DIN 488.

3 Grundlagen der Thermomechanik

3.1 Einleitung

Im vorliegenden Kapitel werden die für diese Abhandlung relevanten thermomechanischen Grundlagen erläutert. Mit der „Thermomechanik“ lässt sich eine Verknüpfung zwischen der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik formulieren [Ziegler 1983]. Damit wird ermöglicht, nichtkonservative Kräfte und die in der Dynamik zu berücksichtigenden Trägheitskräfte im Rahmen einer energetischen Betrachtungsweise einzubeziehen.

Die Kraftgrössen (Lasten und Spannungen) lassen sich mit den kinematischen Beziehungen (kinematische Relationen und Randbedingungen) und die Verformungsgrössen (Verschiebungen und Verzerrungen) mit den statischen Beziehungen (statische Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen) verknüpfen, Kapitel 3.2 und 3.3.

Wenn sich die kinematischen und statischen Grössen schnell ändern, müssen die d’Alembert’schen Trägheitskräfte (respektive die kinetische Energie) berücksichtigt werden. Diese in der Dynamik zu berücksichtigenden Trägheitskräfte besitzen keine Reaktionen im Sinne des Reaktionsprinzips und entsprechen keinen physikalischen Wechselwirkungen; sie stellen mathematische Hilfsgrössen dar.

Durch das Erfüllen der kinematischen Relationen und Randbedingungen (statischen Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen) lässt sich für ein beliebiges statisches System ein kinematisch zulässiger Verformungszustand (statisch zulässiger Spannungszustand) bestimmen. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten findet mittels skalarer Multiplikation der kinematisch zulässigen Verformungs- und der statisch zulässigen Spannungszustände Anwendung. Die beiden für sich einzeln zulässigen Zustände müssen dabei nicht zwingend miteinander verträglich sein. Das Prinzip der virtuellen Leistungen lässt sich durch die Ableitung des Verformungszustandes nach der Zeit gewinnen und durch Einbezug der d’Alembert’schen Trägheitskräfte auf dynamische Problemstellungen erweitern. Das Prinzip der virtuellen Leistungen wird zusammen mit dem Prinzip von d’Alembert, dem Reaktions- und dem Schnittprinzip zur Grundlage der gesamten Mechanik [Sayir & Kaufmann 2005]. Das d’Alembert’sche Prinzip besagt, dass ein beliebiger Körper sich so bewegt, dass die inneren und äusseren Kräfte sowie die Trägheitskräfte in jedem Augenblick im Gleichgewicht sind. In Kapitel 3.4 werden die Prinzipien der virtuellen Verschiebungen, der virtuellen Leistungen und der virtuellen Kräfte, welche sowohl in der Elastizitätstheorie als auch in der Plastizitätstheorie Gültigkeit haben, erläutert.

Die Kinetik als Teilgebiet der Dynamik, Kapitel 3.5, setzt sich mit der „Verbindung zwischen Kräften und Bewegungen materieller Systeme“ [Sayir & Kaufmann 2005] auseinander. Die Impuls-, Drall- und Energiesätze lassen sich direkt mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte (Prinzip von d’Alembert) sowie des Schnitt- und Reaktionsprinzips herleiten. Die Stärke des Impulserhaltungssatzes zeigt sich insbesondere bei in Bewegung befindlichen betrachteten Systemen wie beispielsweise die Beschreibung zweier Körper, welche eine plötzliche Änderung des Bewegungszustandes durch einen Stoss erleiden. Der Impulserhaltungssatz behält materialunabhängig Gültigkeit. Auf den Drallsatz wird nicht weiter eingegangen, da nachfolgend nur der drallfreie Stoss betrachtet wird. Bei elastischen (konservativen) Systemen wird die Verformungsarbeit „gespeichert“ und bei einem Entlastungsprozess wieder „zurückgewonnen“. In der Kontinuumsmechanik gilt das Energieprinzip in Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik. Sobald allerdings nichtkonservative Kräfte an einem System wirken, kann die Kontinuumsmechanik nicht mehr von der Thermodynamik getrennt werden [Ziegler 1983]. In einem abgeschlossenen System bleibt die Energie unabhängig von der Zeit konstant. Eine Darstellung der Traglastverfahren befindet sich in Kapitel 3.6.

Sowohl in der Plastizitätstheorie als auch in der Elastizitätstheorie lassen sich Näherungslösungen für statische Lasten durch Heranziehen von statischen oder kinematischen Ansätzen gewinnen. In der Plastizitätstheorie wird die (quasi-)statische Traglast mit kinematischen respektive statischen Ansätzen überschätzt respektive unterschätzt. In der Elastizitätstheorie hingegen wird mit kinematischen respektive statischen Ansätzen die Steifigkeit überschätzt respektive unterschätzt.

3.2 Kinematische Beziehungen

Der Verschiebungszustand eines beliebigen Systems ist durch das Verschiebungsfeld u_i gegeben. Die Verformung des Systems wird durch das Verzerrungsfeld ε_{ij} beschrieben. Die Verträglichkeitsbedingungen des Systems lauten:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3.1}$$

Die kinematischen Randbedingungen verlangen an der Oberfläche S_u des Systems, an welcher die Verschiebungen u_i^0 vorgeschrieben sind, dass

$$u_i = u_i^0 \tag{3.2}$$

Ein beliebiges (gedachtes) System, welches die Verträglichkeitsbedingungen (3.1) und die kinematischen Randbedingungen (3.2) erfüllt, wird als kinematisch zulässig bezeichnet.

Ein infinitesimal kleines Verschiebungsfeld (u_{ij} << 1) erlaubt die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System und die Superposition einzelner Verschiebungszustände.

Mit dem ebenen Verzerrungszustand eines infinitesimalen Volumenelements in Abb. 3.1 (Schnitt mit der Ebene x, y) liefert die Beziehung (3.1):

$$\varepsilon_x = u_{x,x}\,,\ \varepsilon_y = u_{y,y}\,,\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(u_{x,y} + u_{y,x}\right) \tag{3.3}$$

Virtuelle Änderungen des Verschiebungsfeldes δu_i sind infinitesimal kleine, kinematisch zulässige Variationen des Verschiebungsfeldes bei konstanter Zeit und somit auch bei festgehaltenen kinematischen Randbedingungen.

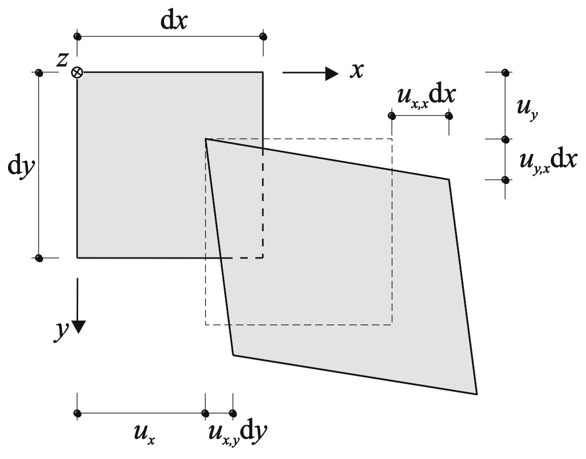


Abb. 3.1 *Ebener Verformungszustand: kinematische Relationen am infinitesimalen Volumenelement.*

Die virtuelle Verformung eines Systems lässt sich durch das virtuelle Verzerrungsfeld

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right) \tag{3.4}$$

beschreiben.

Die kinematischen Randbedingungen an der Oberfläche S_u des Systems lauten

$$\delta u_i = 0 \tag{3.5}$$

Die virtuellen Grössen werden mit dem Variationssymbol δ bezeichnet und sind als infinitesimal kleine Variationen bei festgehaltener Zeit und somit auch bei festgehaltenen Randbedingungen zu betrachten.

Werden anstelle der virtuellen Änderungen der Verschiebungen δu_i virtuelle Geschwindigkeiten $\dot{u}_i^k$ eingeführt, so lauten die Bedingungen des Systems nach Gleichungen (3.4) und (3.5) wie folgt:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j}^k + \dot{u}_{j,i}^k\right) \quad \text{und} \quad \dot{u}_i^k = \dot{u}_i^0 \tag{3.6}$$

3.3 Statische Beziehungen

Der Spannungszustand eines beliebigen Systems ist durch das Spannungsfeld σ_{ij} gegeben. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$\sigma_{ij,j} + t_i = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.7}$$

wobei t_i die auf das System einwirkenden Volumenkräfte bezeichnet.

Die statischen Randbedingungen an der Oberfläche des Systems verlangen

$$\sigma_{ij} n_j = q_i \tag{3.8}$$

wobei q_i die auf die Oberfläche S_q eingeprägten Spannungen und n_j die Einheitsnormalenvektoren der Oberfläche bezeichnen.

Ein beliebiges (gedachtes) System, welches die Gleichgewichtsbedingungen (3.7) sowie die statischen Randbedingungen (3.8) erfüllt, wird als statisch zulässig bezeichnet.

Virtuelle Änderungen des Spannungsfeldes $\delta\sigma_{ij}$ sind infinitesimal kleine statisch zulässige Variationen des Spannungsfeldes bei konstanter Zeit und somit auch bei festgehaltenen statischen Randbedingungen und Volumenkräfte. Die virtuelle Verformung eines Systems lässt sich durch das virtuelle Spannungsfeld

$$\delta\sigma_{ij} = \delta\sigma_{ji} \quad \text{und} \quad \delta\sigma_{ij,j} = 0 \tag{3.9}$$

beschreiben. Die statischen Randbedingungen an der Oberfläche S_q des Systems lauten:

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0 \tag{3.10}$$

Werden anstelle der virtuellen Änderungen der Spannungen $\delta\sigma_{ij}$ virtuelle Spannungsänderungsgeschwindigkeiten $\dot{\sigma}_{ij}^{s}$ eingeführt, so lauten die Bedingungen des Systems nach Gleichungen (3.9) und (3.10) wie folgt:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{s} = \dot{\sigma}_{ji}^{s}\,,\ \dot{\sigma}_{ij,j}^{s} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\sigma}_{ij}^{s} n_j = 0 \tag{3.11}$$

Die Stoffbeziehungen stellen die Beziehung zwischen den statischen Grössen (Spannungen) und den kinematischen Grössen (Verzerrungen) dar. Sie sind abhängig von den Baustoffeigenschaften und somit davon, ob die eingetragene Energie gespeichert (Elastizitätstheorie) oder dissipiert (Plastizitätstheorie) wird.

3.4 Prinzip der virtuellen Arbeiten und Prinzip der virtuellen Leistungen

Sämtliche baustatischen Verfahren lassen sich im Wesentlichen mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PdvA) begründen [Marti 2014]. Die Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten kann entweder als Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder als Prinzip der virtuellen Kräfte erfolgen. Die virtuellen Verschiebungen müssen infinitesimal klein sein, während die virtuellen Kräfte beliebige Werte annehmen können. Das Prinzip der virtuellen Kräfte lässt sich für infinitesimal kleine Verschiebungszustände aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gewinnen. Bei Verwendung von virtuellen Geschwindigkeiten an Stelle von virtuellen Verschiebungen, d. h. die einfache zeitliche Ableitung des Verformungszustandes, spricht man vom sogenannten Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL). Beide Prinzipien sind unabhängig vom Werkstoffverhalten und gelten für beliebige Systeme.

Die virtuelle Arbeit einer äusseren Kraft F_i erhält man durch die virtuelle (gedachte) Änderung der Verschiebung δu_i und lässt sich wie folgt angeben:

$$\delta A_a = F_i \delta u_i \tag{3.12}$$

Die virtuelle (äussere) Ergänzungsarbeit ergibt sich durch eine virtuelle Änderung einer Kraft δF_i und ist definiert durch:

$$\delta \overline{A}_a = u_i \delta F_i \tag{3.13}$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte (Verzerrungsarbeit) ist definiert durch die von den Spannungen σ_{ij} bei den virtuellen Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ verrichteten Arbeit

$$\delta A_i = \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V \tag{3.14}$$

wobei V das Volumen bezeichnet. Für die entsprechende virtuelle Ergänzungsarbeit gilt:

$$\delta \overline{A}_i = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \,\mathrm{d}V \tag{3.15}$$

3.4.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Es wird nachfolgend ein beliebiger, statisch zulässiger Spannungszustand σ_{ij}^{s} eines Systems betrachtet, welcher mit den Oberflächenkräften q_i und den Volumenkräften t_i im Gleichgewicht ist. Die Oberflächenkräfte wirken auf der Fläche S_q. Die Variation eines beliebigen kinematisch zulässigen Verzerrungs- und Verschiebungszustandes, ε_{ij}^{k} und u_i^{k} des Systems führt zu virtuellen Verzerrungen und Verschiebungen, $\delta\varepsilon_{ij}$ und δu_i.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lässt sich in energetischer Form wie folgt formulieren:

> Der Spannungszustand eines beliebigen Systems ist statisch zulässig, falls die virtuelle innere und äussere Arbeit δA für jeden virtuellen, kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verschwindet.

Das Prinzip lässt sich in der Form

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij}^{s}\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \int_{S_q} q_i\delta u_i\,\mathrm{d}S - \int_V t_i\delta u_i\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (3.16)$$

schreiben. Der erste Integralterm entspricht der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte δA_i (virtuelle Formänderungsarbeit). Die beiden anderen Integralterme entsprechen dabei der virtuellen Arbeit der äusseren Kräfte δA_a. Somit wird die virtuelle äussere Arbeit gänzlich in virtuelle Formänderungsarbeit umgesetzt, da die kinetische Energie für den Fall eines sich im Gleichgewicht befindenden Systems null ist. Die Beziehung (3.16) gilt auch für die wirklichen Verschiebungsinkremente du_i und die entsprechenden wirklichen Verzerrungsinkremente $d\varepsilon_{ij}$.

Für die virtuellen Verschiebungen und die virtuellen Verzerrungen gelten die Verträglichkeitsbedingungen nach (3.1).

3.4.2 Prinzip der virtuellen Leistungen

Zur Herleitung des Prinzips der virtuellen Leistungen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden die virtuellen Geschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}$ und $\dot{u}_i^{k}$ anstelle der virtuellen Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ und Verschiebungen δu_i verwendet. Die virtuellen Verschiebungen müssen nicht infinitesimal klein sein; somit ist das Prinzip der virtuellen Leistungen auch für grosse Verschiebungen gültig.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen lässt sich wie folgt anschreiben

$$\int_V \sigma_{ij}^{s}\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}\,\mathrm{d}V - \int_{S_q} q_i\dot{u}_i^{k}\,\mathrm{d}S - \int_V t_i\dot{u}_i^{k}\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (3.17)$$

und besagt, dass ein beliebiges System sich in Ruhelage befindet, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte für jeden virtuellen Bewegungszustand verschwindet.

Mit der Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Leistungen auf bewegte materielle Systeme durch Einbezug der d'Alembert'schen Trägheitskräfte lassen sich unter Verwendung des Reaktions- und Schnittprinzips die Grundgleichungen der Dynamik, nämlich die Impuls- und Drallsätze herleiten [Sayir & Kaufmann 2005]. Des Weiteren kann auf den Energiesatz für konservative Systeme geschlossen werden, Kapitel 3.5. Die Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie lassen sich mithilfe des Prinzips der virtuellen Leistungen (oder des Prinzips der virtuellen Arbeiten) herleiten, Kapitel 3.6.3. Ein oberer Grenzwert der Traglast lässt sich für eine Stahlbetonplatte auf der Grundlage der Fliessgelenklinientheorie, Kapitel 4.5, bestimmen. In Kapitel 6 wird ein Näherungsverfahren für stossartig belastete, duktile Stahlbetonplatten mittels des Prinzips der virtuellen Leistungen für bewegte Systeme (Kapitel 3.5.1) und des Impulserhaltungssatzes (Kapitel 3.5.2) vorgeschlagen.

3.4.3 Prinzip der virtuellen Kräfte

Es wird ein beliebiges, sich im Gleichgewicht befindendes System mit dem kinematisch zulässigen Verzerrungsfeld ε_{ij}^k und dem Verschiebungsfeld u_i^k betrachtet, welches den geometrischen Randbedingungen u_i^0 genügt. Es wird nun ein statisch zulässiger Spannungszustand σ_{ij}^s eines Systems betrachtet, welches die virtuellen Spannungsänderungen $\delta\sigma_{ij}$ erfährt. Die Oberflächenkräfte werden mit q_i bezeichnet und wirken auf der Fläche S_q. Die auf der Fläche S_u wirkenden (Reaktions-)Kräfte $\bar{q}_i$ können variieren.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann wie folgt formuliert werden:

> Der Verschiebungszustand eines beliebigen Systems ist kinematisch zulässig, wenn die virtuelle (gesamte) Ergänzungsarbeit $\delta\bar{A}$ für jeden beliebigen, virtuellen statisch zulässigen Spannungszustand verschwindet.

Das Prinzip lässt sich in energetischer Form wie folgt anschreiben:

$$\delta\bar{A} = \int_V \varepsilon_{ij}^k \delta\sigma_{ij} \mathrm{d}V - \int_{S_q} u_i^0 \delta\bar{q}_i \mathrm{d}S = 0 \tag{3.18}$$

3.5 Kinetik

3.5.1 Prinzip der virtuellen Leistungen – dynamische Verallgemeinerung

Mit der Ergänzung der Beziehung (3.17) um die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte lässt sich das Prinzip der virtuellen Leistungen der Statik als Grundpostulat der Kinetik auf bewegte materielle Systeme verallgemeinern. Das Prinzip lässt sich in Form von Leistungen wie folgt zusammenfassen:

$$\tilde{L} = \tilde{L}^{(a)} + \tilde{L}^{(i)} + \tilde{L}^{(t)} = 0 \tag{3.19}$$

Dabei bezeichnen $\tilde{L}^{(a)}$ und $\tilde{L}^{(i)}$ die virtuellen Leistungen der (wirklichen) äusseren $\boldsymbol{F}^{(a)}$ und inneren $\boldsymbol{F}^{(i)}$ Kräfte. Die virtuellen Grössen werden mit der Tilde bezeichnet.

Die virtuelle Geschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{v}}$ eines virtuellen Bewegungszustandes braucht mit der wirklichen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ zum jeweiligen Zeitpunkt und am jeweiligen Ort in keiner Beziehung zu stehen.

Die in der infinitesimalen Trägheitskraft $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{(t)} = -\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m$ auftretende Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ wird dabei mit der Ableitung der wirklichen Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}$ gebildet; dm bezeichnet die infinitesimale Masse, Abb. 3.2 (a).

3.5.2 Impulssatz

Der in Abb. 3.2 (b) dargestellte, auf ein Inertialsystem (x, y, z) bezogene, beliebige, starre Körper, respektive gegebenenfalls bestehend aus mehreren starren Teilkörpern, befindet sich im Gleichgewicht mit der aus den äusseren Kräften $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$, i = 1 bis n und den Trägheitskräften $\boldsymbol{F}^{(t)}$ bestehenden Kräftegruppe. Die infinitesimalen Trägheitskräfte $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{(t)} = -\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m$ greifen an den infinitesimalen Massenelementen dm an.

Ein beliebiger, virtueller Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ der Angriffspunkte i sowie der Geschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{v}}$ der Massenelemente dm beschrieben. Durch Betrachtung eines virtuellen Bewegungszustandes einer beliebigen Starrkörperbewegung eines Körpers und unter Verwendung des Reaktionsprinzips lässt sich auf den Impulssatz schliessen. Da die inneren Kräfte $\boldsymbol{F}^{(i)}$ bei einer Starrkörperbewegung gemäss dem Reaktionsprinzip unter sich im Gleichgewicht sind und die Gesamtleistung nach der Beziehung (3.19) verschwindet, muss die aus den äusseren Kräften $\boldsymbol{F}^{(a)}$ und den Trägheitskräften $\boldsymbol{F}^{(t)}$ bestehende Kräftegruppe selbst im Gleichgewicht sein. Daraus lässt sich die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(a)} \tilde{\boldsymbol{v}}_i - \int_{\mathrm{K}} \ddot{\boldsymbol{r}}\, \tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m = 0 \tag{3.20}$$

aufstellen, wobei der erste Term der virtuellen Leistung $\tilde{L}^{(a)}$ der äusseren Kräfte $\boldsymbol{F}^{(a)}$ und der zweite Term der virtuellen Leistung $\tilde{L}^{(t)}$ der Trägheitskräfte $\boldsymbol{F}^{(t)} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ entspricht.

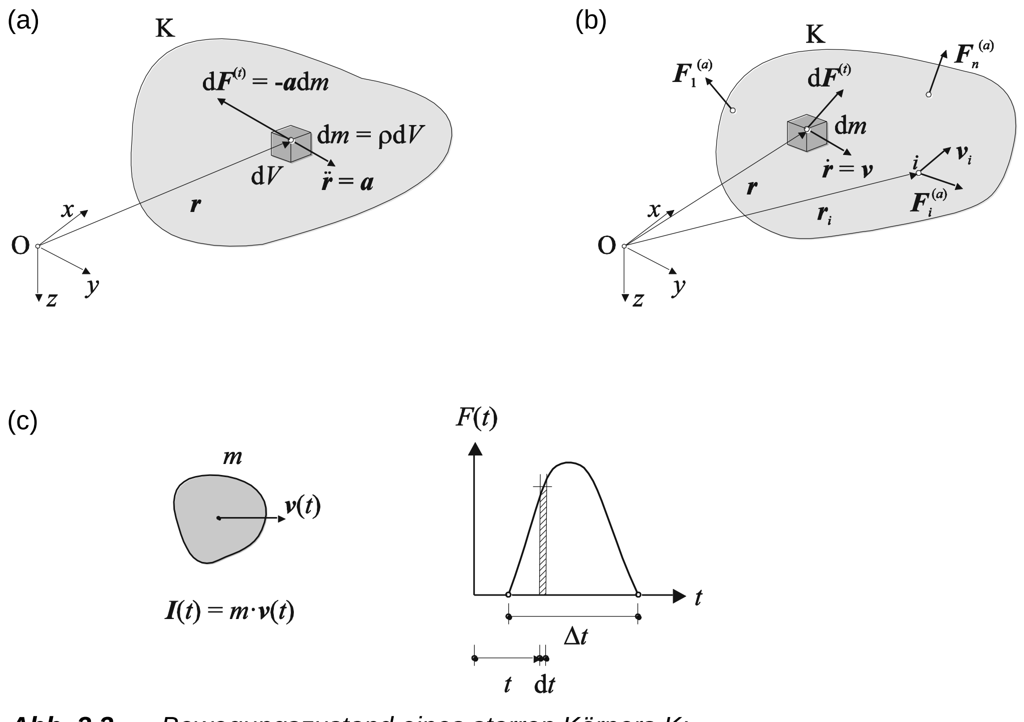


Abb. 3.2 *Bewegungszustand eines starren Körpers K:*
(a) infinitesimales Volumenelement mit infinitesimaler Trägheitskraft;
(b) Gleichgewicht der äusseren Kräfte $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$*, i = 1 bis n und Trägheitskräfte* $\boldsymbol{F}^{(t)}$*;*
(c) Impuls und Impulsänderung.

Wird als virtueller Bewegungszustand eine Translation mit $\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \tilde{\boldsymbol{v}}$ betrachtet, so weist jeder Punkt des starren Körpers die gleiche Geschwindigkeit auf und die Beziehung (3.20) vereinfacht sich wie folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(a)} = \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m = \left[\int_{\mathrm{K}} \tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m\right]^{\bullet} \tag{3.21}$$

Die linke Seite in (3.21) entspricht der Summe der am Körper angreifenden äusseren Kräfte; die rechte Seite stellt die zeitliche Ableitung des Impulses dar.

Der Impulssatz lässt sich anhand der Beziehung (3.21) wie folgt formulieren:

> Die zeitliche Ableitung des bezüglich eines Inertialsystems berechneten Gesamtimpulses eines Körpers K ist gleich der Summe der äusseren Kräfte.

Der Impulssatz ist eine Vektorbeziehung, daher behält er für jede Vektorkomponente Gültigkeit.

Der Impuls $\boldsymbol{I}$ eines beliebigen Systems lässt sich somit wie folgt formulieren:

$$\boldsymbol{I} = m\dot{\boldsymbol{r}} = \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m \tag{3.22}$$

Für ein System bestehend aus n starren Teilkörpern beträgt der Gesamtimpuls

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_i \tag{3.23}$$

Der Impulssatz erhält insbesondere bei Stossvorgängen eine zentrale Bedeutung. Bei einem Zusammenstoss zweier Körper erfolgt die Änderung des Bewegungszustandes in einer sehr kurzen Zeit, wobei grosse Kräfte auf die Körper ausgeübt werden. Ein beliebiger Körper bewege sich zum Zeitpunkt t mit der Masse m und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$, Abb. 3.2 (c); wobei das Produkt $\boldsymbol{I}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t)$ als sein momentaner Impuls bezeichnet wird. Wirkt eine Kraft $\boldsymbol{F}(t)$ auf den Körper ein, so erfährt der Impuls eine Änderung. Diese Impulsänderung ist dem Kraftstoss $\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$ proportional:

$$\boldsymbol{F}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\boldsymbol{v}(t)\right] \tag{3.24}$$

Der Zusammenstoss zweier fester Körper (Stosszeit Δt) lässt sich ausgehend von der Differentialform des Impulssatzes (3.21) in der integrierten Form

$$\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_0 = m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = \int_{t=0}^{\Delta t} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.25}$$

schreiben, dabei bezeichnen $\boldsymbol{I}_0$ ($\boldsymbol{v}_0$) den Impuls (die Geschwindigkeit) unmittelbar vor dem Stoss und $\boldsymbol{I}_1$ ($\boldsymbol{v}_1$) jenen (jene) unmittelbar nach dem Stoss. Das Integral rechter Hand wird als Kraftstoss bezeichnet. Der Stoss wird in Kapitel 3.5.4 näher behandelt.

Wenn die von aussen wirkende, resultierende Kraft auf das System null ist, dann ist die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses ebenfalls null. Der Gesamtimpuls des Systems bleibt somit konstant. Der Impuls eines geschlossenen Systems ist eine Erhaltungsgrösse. Nichtkonservative, innere Kräfte können die mechanische Energie eines Systems ändern, den Gesamtimpuls können sie aber nicht verändern; dieser bleibt konstant.

3.5.3 Energiesatz

Wendet man das Prinzip der virtuellen Leistungen auf den wirklichen Bewegungszustand – als Spezialfall der virtuellen Bewegung – des Körpers an, so lässt sich auf den Energiesatz und den Satz der Erhaltung der Energie schliessen. Der Körper ist im Allgemeinen nicht starr, sondern auch deformierbar, so dass neben den äusseren Kräften auch die inneren Kräfte mit zu berücksichtigen sind, sofern diese inneren Kräfte Arbeit leisten. Als virtuelle Bewegung wird nun die wirkliche Bewegung selbst gewählt, dadurch werden die Geschwindigkeiten zu $\tilde{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ und $\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i$.

Die wirkliche Gesamtleistung der äusseren und inneren Kräfte sowie der Trägheitskräfte beträgt zu jeder Zeit und in jeder Lage

$$L = L^{(a)} + L^{(i)} + L^{(t)} = 0 \tag{3.26}$$

Die wirkliche Leistung der Trägheitskräfte $\boldsymbol{F}^{(t)}$ entspricht der zeitlichen Ableitung der kinetischen Energie $\dot{T}$ des Systems:

$$L^{(t)} = -\int_K \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = -\frac{1}{2}\left[\int_K \boldsymbol{v}^2\mathrm{d}m\right]^{\bullet} \tag{3.27}$$

wobei

$$T = \frac{1}{2}\int_K \boldsymbol{v}^2\mathrm{d}m \tag{3.28}$$

die kinetische Energie bezeichnet. Gleichung (3.26) lässt sich mithilfe von (3.27) und (3.28) umschreiben:

$$\dot{T} = L^{(a)} + L^{(i)} \tag{3.29}$$

Der Energiesatz lässt sich mithilfe der Beziehung (3.29) wie folgt formulieren:

> Die (zeitliche) Ableitung der kinetischen Energie eines Systems ist gleich der wirklichen Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte.

Ferner lässt sich für konservative Systeme, bei welchen alle angreifenden Kräfte konservativ sind, die Leistung der inneren und äusseren Kräfte als zeitliche Ableitung der Potentialfunktionen darstellen. Eine konservative äussere Kraft $\boldsymbol{F}^{(a)}$ lässt sich aus dem negativen Gradienten einer Potentialfunktion $V = V(\boldsymbol{r})$ berechnen:

$$\boldsymbol{F}^{(a)} = -\nabla V \tag{3.30}$$

wobei $\boldsymbol{r}$ die Lage des Angriffspunktes der Kraft bezüglich des Inertialsystems bezeichnet. Für das bewegte System entspricht die zeitliche Ableitung des Gesamtpotentials gerade der negativen Gesamtleistung der äusseren Kräfte

$$\dot{V} = -\boldsymbol{F}^{(a)}\boldsymbol{v} = -L^{(a)} \tag{3.31}$$

Das Gesamtpotential eines materiellen Systems mit mehreren konservativen äusseren Kräften wird auch potentielle Energie der äusseren Kräfte genannt. Das Potential der inneren Kräfte für elastisches (konservatives) Deformationsverhalten des Materials wird als Deformationsenergie U bezeichnet. Analog zu der Beziehung (3.31) folgt für die Gesamtleistung der inneren Kräfte

$$L^{(i)} = -\dot{U} \tag{3.32}$$

Mit der zeitlichen Integration der Beziehungen (3.29), (3.31) und (3.32) lässt sich auf den Energieerhaltungssatz für konservative Systeme schliessen:

$$T + U + V = \text{konstant} \tag{3.33}$$

Demzufolge bleibt die Summe der kinetischen Energie, der potentiellen Energie der äusseren und inneren Kräfte zu jeder Zeit und Lage eines betrachteten Körpers konstant.

3.5.4 Stoss

Der Zusammenstoss zweier starrer respektive fester Körper führt zu einer Änderung des Bewegungszustandes in einem Zeitintervall Δt (Stosszeit), das so kurz ist, dass sich in ihm die Lage des Systems nicht merklich ändert. Der Stossvorgang wird durch die kurzzeitig wirkenden grossen Kräfte charakterisiert.

Nachfolgend wird der gerade, zentrische Stoss zweier starrer respektive fester Körper mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet, deren Geschwindigkeiten auf der Verbindungsgeraden der beiden Körperschwerpunkte liegen, Abb. 3.3 (a). Die beiden Körper stossen am Kontaktpunkt C in Richtung n mit einer Geschwindigkeitsdifferenz ($v_1 - v_2$) zusammen. Auf das System sollen während des Stosses keine weiteren äusseren Kräfte einwirken. Man nennt ein System, in dem nur innere Wechselwirkungskräfte wirken und das nicht durch äussere Kräfte beeinflusst wird, ein geschlossenes System. Zusätzliche (endliche) äussere Kräfte wie z. B. Gewichtskräfte können vernachlässigt werden, falls die Stossdauer Δt sehr klein ist. Das ist immer dann zulässig, wenn die äussere Kraft sehr viel kleiner als die Kontaktkraft ist.

(a) (b)

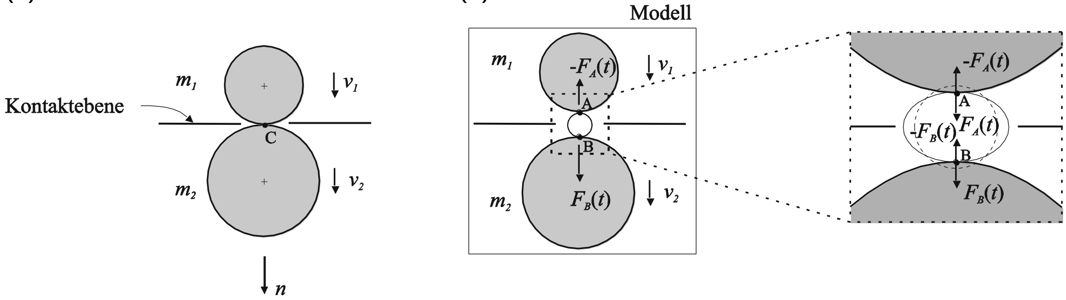


Abb. 3.3 *Stoss mit starren Körpern:*
(a) gerader, zentrischer Stoss;
(b) infinitesimales, verformbares Partikel: durch das Partikel repräsentierte kleine Verformung am Kontaktort.

Die Darstellung des hier beschriebenen Stossvorganges beruht auf der Annahme, dass man mit räumlich ausgedehnten Körpern zu tun hat, die zwar als fest, aber doch als leicht deformierbar zu betrachten sind. Je geringer die Deformierbarkeit ist, umso kürzer ist die Stosszeit und umso grösser werden die für die Änderung des Bewegungszustandes massgebenden Kräfte. Mit dem Modell eines infinitesimalen Partikels zwischen zwei zusammenstossenden, starren Körpern können lokale Deformationen an der Kontaktstelle repräsentiert werden [Stronge 2000], Abb. 3.3 (b). Diese Betrachtungsweise erlaubt die Untersuchung der Geschwindigkeiten (Geschwindigkeitsänderungen) als Funktion der Normalkomponente des Impulses während des Stosses. An den Kontaktstellen weisen die beiden Körper Kontaktkräfte $F_A(t)$ und $F_B(t)$ auf. Die Normalkomponenten der Impulse sind äquivalent zum Zeitintegral der Kontaktkräfte. Die Reaktionskräfte erzeugen demnach einen Impuls auf beiden Seiten des verformbaren, infinitesimalen Partikels. Mit der getroffenen Annahme, dass das verformbare Partikel eine vernachlässigbare Masse besitzt, erhält man als Ergebnis, dass die Reaktionsimpulse auf beiden Seiten des verformbaren Partikels betragsmässig gleich gross sind. Die Richtung der Impulse ist allerdings entgegengesetzt.

Die Geschwindigkeiten beim Stoss zweier starrer Körper mit unterschiedlichen Massen (m_1 und m_2) sollen unmittelbar vor dem Zusammenstoss v_{1a} und v_{2a} ($v_{1a} > v_{2a}$) und unmittelbar nach der Trennung v_{1e} und v_{2e} betragen. Während des Stosses sind die Geschwindigkeiten der beiden Körper unterschiedlich und verschieden von v_{1a}, v_{2a}, v_{1e} und v_{2e}. Es gibt einen Augenblick, in dem sie gleich sind: diese Geschwindigkeit wird mit $\dot{w}$ abgekürzt, wobei $v_{1a} > \dot{w} > v_{2a}$ und $v_{1e} < \dot{w} < v_{2e}$ beträgt, Abb. 3.4 (a). Die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Körpern ist daher in diesem Augenblick null; der Schwerpunktabstand erreicht sein Minimum und die inneren Kontaktkräfte ihr Maximum: $F_{1,\max} = -F_{2,\max}$. Während des Stosses treten zwischen den beiden Körpern die zeitabhängigen Kräfte $F_1 = F_1(t)$ und $F_2 = F_2(t)$ auf, die sogenannten Stosskräfte. Sie stehen während des Stosses an der Kontaktstelle zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Sie bauen sich von null aus auf, erreichen einen Maximalwert und bauen sich wieder auf null ab. Die beiden Stosskörper berühren sich zum Zeitpunkt $t = t_0$ und trennen sich zum Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ wieder. Das Zeitintervall Δt wird als Stosszeit bezeichnet und lässt sich in eine Kompressions- (Zusammendrückung) und Expansionsphase (Restitution) unterteilen.

Die Formulierung des Gleichgewichts zum Zeitpunkt des Stossbeginns respektive Stossendes liefert:

$$F_{1a} + F_{2a} = m_1\dot{v}_{1a} + m_2\dot{v}_{2a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}\right) = 0 \quad \text{respektive} \tag{3.34}$$

$$F_{1e} + F_{2e} = m_1\dot{v}_{1e} + m_2\dot{v}_{2e} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e}\right) = 0$$

Durch einfache Integration von (3.34) erhält man die Gleichung

$$m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e} \tag{3.35}$$

welche sich als Impulserhaltung interpretieren lässt.

Der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten, da ein geschlossenes System vorliegt (d. h. keine einwirkenden äusseren Kräfte auf das System). Mit dem Impulserhaltungssatz kann man recht einfach Stossvorgänge betrachten, bei denen nur Anfangs- und Endzustand von Interesse sind, ohne dass man nach dem Ablauf fragt. Ohne die Stosszeit, die Wechselwirkungskräfte und den Verlauf zu kennen, kann das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderungen berechnet werden. Die drei Unbekannten des Problems sind v_{1e} und v_{2e} sowie $F(t)$.

Durch Freischneiden der beiden Stosskörper und unter Beachtung des Reaktionsprinzips $F_1(t) = -F_2(t) = F(t)$ liefert der Impulssatz (3.25)

$$m_1(\dot{w} - v_{1a}) = -\int_{t_I} F_1(t)\,\mathrm{d}t \qquad (3.36)$$

$$m_2(\dot{w} - v_{2a}) = \int_{t_I} F_1(t)\,\mathrm{d}t$$

wobei t_I die Stossdauer während der Kompressionsphase bezeichnet. Aus (3.36) erhält man die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Körper am Ende der Kompressionsphase (Übergangszeitpunkt I/II):

$$\dot{w} = (m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}) / (m_1 + m_2) \qquad (3.37)$$

In der Literatur findet man zwei Idealfälle, nämlich den elastischen und den plastischen (vollkommen unelastischen) Stoss.

Beim elastischen Stoss bleibt die kinetische Energie des Systems erhalten, da sich die potentielle Energie während des Stosses nicht ändern kann. Die Lageänderung ist vernachlässigbar. Die Energieerhaltung $\Delta T = 0$ liefert

$$\frac{m_1 v_{1a}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2a}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1e}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2e}^2}{2} \qquad (3.38)$$

respektive umgeformt

$$v_{1a}^2 - v_{1e}^2 = -\frac{m_2}{m_1}\left(v_{2a}^2 - v_{2e}^2\right)$$

Division von $(3.38)_2$ mit (3.35) führt auf die Gleichung

$$v_{1a} - v_{2a} = -(v_{1e} - v_{2e}) \qquad (3.39)$$

die besagt, dass die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoss bis auf das Vorzeichen gleich der Relativgeschwindigkeit vor dem Stoss ist. Durch Umformung der Gleichungen (3.35) und (3.39) erhält man die Geschwindigkeiten v_{1e} und v_{2e} der zusammenstossenden Körper nach dem Stoss:

$$v_{1e} = \frac{v_{1a}(m_1 - m_2) + 2 m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad v_{2e} = \frac{-v_{2a}(m_1 - m_2) + 2 m_1 v_{1a}}{m_1 + m_2} \qquad (3.40)$$

Wird weiter angenommen, dass die Masse m_2 vor dem Stoss in Ruhe ist, d. h. $v_{2a} = 0$, dann vereinfachen sich die Gleichungen (3.40) zu:

$$\frac{v_{1e}}{v_{1a}} = \frac{m_1/m_2 - 1}{1 + m_1/m_2} \quad \text{und} \quad \frac{v_{2e}}{v_{1a}} = \frac{2 m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \qquad (3.41)$$

Im Weiteren werden für die vorliegenden Ergebnisse m_2 als die Masse des Tragwerks und m_1 als die Masse des aufprallenden Körpers bezeichnet, um eine baupraktische Interpretation zu ermöglichen.

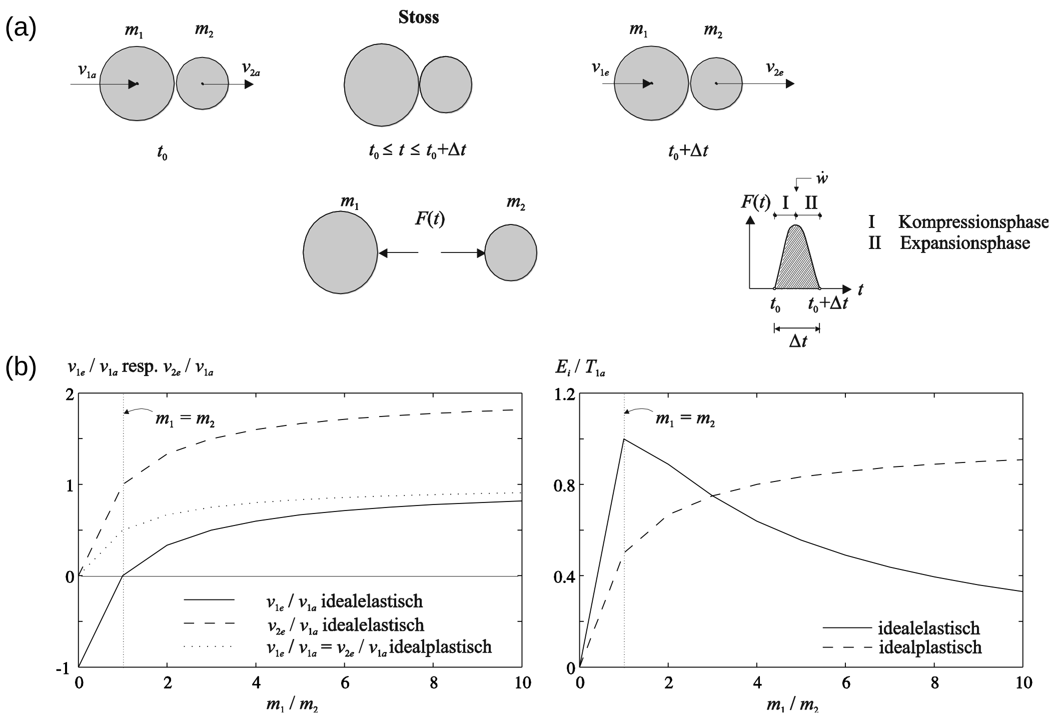


Abb. 3.4 *Gerader zentrischer Stoss von zwei festen Körpern:*
(a) System der am Stoss beteiligten Körper und Stosskraft F(t);
(b) Grenzbetrachtungen: elastischer und plastischer Stoss für Spezialfall $v_{2a} = 0$.

Die während der Verformung vom Tragwerk (Masse m_2) absorbierte Energie E_i folgt aus Gleichung (3.38)$_1$

$$E_i = \frac{m_2 v_{2e}^2}{2} \tag{3.42}$$

Der Anteil der vom Tragwerk absorbierten kinetischen Energie beträgt

$$\frac{E_i}{\frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{v_{2e}}{v_{1a}} \right)^2 \tag{3.43}$$

Wird eine feste Unterlage betrachtet, bei der sich die Masse m_2 nicht bewegt, d. h. $v_{2a} = v_{2e} = 0$ und $m_2 = \infty$, erhält man wegen $m_2 >> m_1$ die Näherung $(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \approx -1$. Die Geschwindigkeiten der Masse m_1 vor und nach dem Stoss betragen somit

$$v_{1e} = -v_{1a} \quad (\dot{w} = 0) \tag{3.44}$$

d. h., der Körper fliegt gemäss (3.44) mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit wieder zurück. Die feste Unterlage erfährt einen Kraftstoss $2m_1v_{1a}$. Es wird jedoch keine Energie auf die Unterlage übertragen.

Beim elastischen Stoss hat die Masse des Tragwerks m_2 für Massenverhältnisse $m_1/m_2 > 1$ nach dem Stoss eine grössere Geschwindigkeit als diejenige des aufprallenden Körpers m_1 vor dem Stoss ($v_{2e} > v_{1a}$), Gleichung (3.41)$_2$ und Abb. 3.4 (b).

Bleibt nicht die gesamte kinetische Energie beim Stoss erhalten, so ist der Stoss unelastisch. Der Verlust der Bewegungsenergie kann z. B. durch Reibungsarbeit begründet werden oder in einer bleibenden Formänderung der Stosskörper stecken. Im Folgenden wird der Spezialfall betrachtet, bei dem zwei feste Körper aufeinanderstossen und sich nach dem Stoss vereinen und sich zusammen mit der gleichen Geschwindigkeit ($v_{1e} = v_{2e}$) weiterbewegen, d. h. sie trennen sich nicht mehr. Einen solchen Stoss bezeichnet man auch als vollkommen plastischen Stoss.

Der Impulserhaltungssatz (3.35) liefert die gemeinsame Geschwindigkeit v_{2e} der beiden Körper nach dem Stoss:

$$m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = (m_1 + m_2) v_{2e} \tag{3.45}$$

Die Energiedissipation im Tragwerk erreicht beim plastischen Stoss den grösstmöglichen Wert. Die Differenz der kinetischen Energien nach und vor dem Stoss ergibt den „Energieverlust“

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1a} - v_{2a})^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1}{(1 + m_1/m_2)}(v_{1a} - v_{2a})^2 \tag{3.46}$$

d. h. bei einem idealplastischen Stoss geht immer mechanische Energie „verloren“.

Für den Spezialfall einer ruhenden Masse m_2 vor dem Stoss: $v_{2a} = 0$, liefert die Beziehung (3.45)

$$\frac{v_{e2}}{v_{1a}} = \frac{m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \tag{3.47}$$

und der Verlust an Bewegungsenergie beträgt:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{2a}^2 \tag{3.48}$$

Die während der Bauwerksantwort vom Tragwerk zu dissipierende Energie E_i beträgt:

$$E_i = \frac{m_1 + m_2}{2} v_{2e}^2 \tag{3.49}$$

Das Verhältnis der dissipierten Energie gegenüber der vor dem Stoss vorhandenen kinetischen Energie der Masse m_1 beträgt:

$$\frac{E_i}{T_{1a}} = \frac{W_E}{\frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\left(\frac{v_{2e}}{v_{1a}}\right)^2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{v_{2e}}{v_{1a}}\right)^2 \tag{3.50}$$

Demgegenüber beträgt die Geschwindigkeit der Masse m_1 für eine feste Unterlage ($v_{2a} = v_{2e} = 0$ und $m_2 = \infty$) am Ende des Stosses:

$$v_{1e} = 0 \quad (\dot{w} = 0) \tag{3.51}$$

Die dazugehörige Impulsänderung beträgt $m_1 v_{1a}$ und ist somit halb so gross wie beim ideal-elastischen Stoss. Der Verlust an Bewegungsenergie

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 \tag{3.52}$$

entspricht dem beim Stoss in der Masse m_1 vorhandenen Arbeitsvermögen.

In Abb. 3.4 (b) sind die Grenzbetrachtungen für den Spezialfall einer vor dem Stoss ruhenden Masse m_2, $v_{2a} = 0$ für den elastischen und plastischen Stoss dargestellt.

Beim plastischen Stoss hat der aufprallende Körper m_1 immer eine grössere Geschwindigkeit als die Masse des Tragwerks m_2. Falls die Masse m_1 des aufprallenden Körpers im Vergleich zur Masse des Tragwerks m_2 gross ist, dann ist die vom Tragwerk absorbierte Energie, egal ob der Aufprall elastisch (wiederholte Aufpralle) oder plastisch ist, grundsätzlich gleich.

Wenn die Masse m_1 des aufprallenden Körpers im Vergleich zur Masse m_2 des Tragwerks klein ist, dann ist die vom Tragwerk aufzunehmende Energie bei einem plastischen Aufprall kleiner als bei einem elastischen Aufprall. Um die vom Tragwerk zu absorbierende Energie zu minimieren, sollte die Masse des Tragwerks m_2 so gross wie möglich sein.

Bei einem schrägen zentralen Stoss bewegen sich die Massenmittelpunkte zweier Stosspartner schräg aufeinander zu und somit wirken die Wechselwirkungskräfte nur in Richtung der auf den Berührungsflächen senkrecht stehenden Stossgeraden. Senkrecht dazu kann also kein Impuls ausgetauscht werden. Daher ändern sich nur die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der oben genannten Geraden. Für sie gelten die für den geraden zentralen Stoss ermittelten Formeln.

Bei ausgedehnten Körpern kann es geschehen, dass die Stossgerade nicht mit der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte übereinstimmt (nichtzentraler Stoss). Dann geraten die Stosspartner zusätzlich in Drehung. Dieser Fall wird hier nicht behandelt.

3.6 Traglastverfahren

Ausgehend von den thermodynamischen Grundlagen wird die allgemeinste Formulierung des Energieerhaltungssatzes in globaler Form aufgezeigt, Kapitel 3.6.1. Die Theorie des plastischen Potentials wird in Kapitel 3.6.2 erläutert. Die Anwendung dieser Theorie und des Prinzips der virtuellen Leistungen führt auf die Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie für (quasi-)statische Lasten, Kapitel 3.6.3. Eine geeignete Fliessbedingung für Beton, die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb wird in Kapitel 3.6.4 betrachtet. Die kinematischen und statischen Diskontinuitäten werden in Kapitel 3.6.5 dargestellt. Viskose Vorgänge werden ausgeschlossen, so dass ratenunabhängige Modelle Gültigkeit haben.

3.6.1 Thermodynamische Grundlagen

Sobald nichtkonservative Kräfte in einem System wirken, kann die Kontinuumsmechanik nicht mehr von der Thermodynamik getrennt werden [Ziegler 1983]. In der Literatur wird dieses beide Theorien umfassende Gebiet auch als Thermomechanik bezeichnet. Die spezifische Arbeit, welche zur Erzeugung plastischer Verformungen gebraucht wird, gilt als mechanisch „verloren“. Diese wird als spezifische Dissipationsarbeit bezeichnet. In der Thermodynamik wird gezeigt, dass dadurch die Entropie erhöht wird. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik unter Berücksichtigung der kinetischen Energie für bewegte Systeme kann als allgemeinste Formulierung des Energieerhaltungssatzes betrachtet werden; er berücksichtigt auch irreversible Prozesse.

Der mechanische Energiesatz lässt sich ausgehend vom Prinzip der virtuellen Leistungen (3.19) in globaler Form mit

$$\dot{T} + \dot{W} = L^{(a)} \tag{3.53}$$

schreiben. Ein Äquivalent für die Wärme als thermische Leistung Q wird gemäss

$$\dot{U} = \dot{W} + Q \tag{3.54}$$

eingeführt. Dabei bezeichnen $\dot{T}$ die Ableitung der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}\int_V \rho \boldsymbol{v}^2 \mathrm{d}V$ nach der Zeit, $\dot{W}$ die mechanische Leistung der inneren Kräfte und $L^{(a)}$ die Leistung der äusseren Kräfte. Die zeitliche Ableitung der inneren Energie U in der Beziehung (3.54) lässt sich als Summe der mechanischen Leistung der inneren Kräfte und der thermischen Leistung beschreiben.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich aus (3.53) und (3.54) mit:

$$\dot{T} + \dot{U} = L^{(a)} + Q \tag{3.55}$$

und stellt die allgemeine Form des Energieerhaltungssatzes dar. Dieser sagt aus, dass die zeitlichen Ableitungen der kinetischen und der inneren Energie zu jeder Zeit im (dynamischen) Gleichgewicht mit der Leistung der äusseren Kräfte und der thermischen Leistung ist und somit nie Energie verloren gehen kann.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

$$\theta \dot{S} \geq \theta \dot{S}^r \tag{3.56}$$

betrachtet die Entropie

$$S = \int_V \eta \mathrm{d}V \tag{3.57}$$

eines Systems und sagt aus, dass die totale Entropieleistung $\dot{S}$ grösser oder gleich der reversiblen Entropieleistung $\dot{S}^r$ sein muss. Dabei bezeichnet η die totale Entropie in lokaler Form. Die Dissipationsleistung $\dot{D}$ entspricht dabei der irreversiblen Entropierate, d. h.

$$\dot{D} = \theta \dot{S}^i = \theta\left(\dot{S} - \dot{S}^r\right) \geq 0 \tag{3.58}$$

Durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik nach (3.56) kann beispielsweise gezeigt werden, dass bei einem irreversiblen Vorgang ($\theta \dot{S} > \theta \dot{S}^r$) die Entropie durch Erzeugung plastischer Verformungen erhöht wird. Bei einem reversiblen Vorgang verschwindet die irreversible Entropierate, $\theta \dot{S}^i = 0$.

3.6.2 Theorie des plastischen Potentials

Ideal plastisches Verhalten

Beim plastischen Materialverhalten wird die eingetragene Energie zumindest teilweise dissipiert, d. h. in Wärme umgewandelt. Bei einem ideal plastischen Verhalten (zähigkeitslos) wird die eingetragene Energie vollständig dissipiert und die Entlastung erfolgt elastisch.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen von Baustoffen sind im Allgemeinen nichtlinear und dementsprechend führen sie bei bereits einfachen Problemstellungen zu mathematischen Schwierigkeiten. Eine Idealisierung der Baustoffmodelle erhält man durch Ersetzen der charakteristischen Abschnitte des wirklichen Materialverhaltens durch lineare Abschnitte, Abb. 3.5.

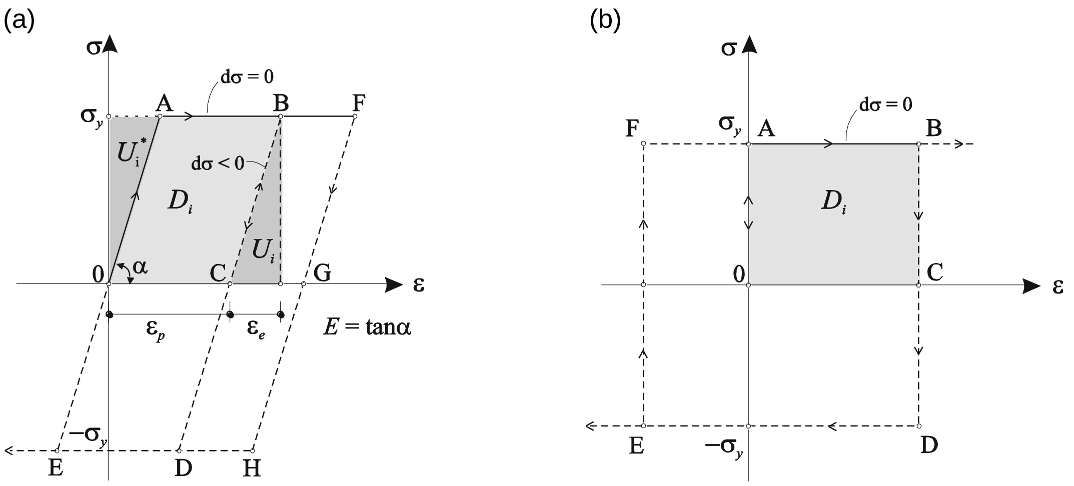


Abb. 3.5 *Materialverhalten bei einachsigem Spannungszustand:*
(a) linear elastisch-ideal plastisch;
(b) starr-ideal plastisch.

Die spezifische Arbeit der inneren Kräfte lässt sich in zwei Bestandteile, einen quasi konservativen (elastischen) Anteil und einen dissipativen (plastischen) Anteil, aufteilen:

$$A_{k0} = A_k^{(q)} + A_k^{(d)} = -U_i\left(\varepsilon_{ij}^q\right) - \int\limits_{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^d \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^d \tag{3.59}$$

wobei ε_{ij}^q den elastischen (reversiblen) Verzerrungen und ε_{ij}^d den plastischen (irreversiblen) Verzerrungen entspricht.

Die quasi konservative Arbeit in Gleichung (3.59) ist der elastische Anteil, welcher der negativen spezifischen Verformungsenergie U_i (spezifische elastische Energie bei Entlastung) entspricht. Der zweite Summand entspricht der spezifischen Dissipationsenergie D_i. Abb. 3.5 (a) zeigt das linear elastisch-ideal plastische Materialverhalten bei einem einachsigen Spannungszustand während des Fliessens, wobei U_i^* die spezifische Ergänzungsenergie (komplementäre Deformationsenergie) bezeichnet. Das starr-ideal plastische Materialverhalten, Abb. 3.5 (b), zeichnet sich durch plastische (irreversible) Verformungen aus, welche beim Erreichen der Fliessgrenze σ_y eintreten.

Räumlicher Spannungszustand

In der Plastizitätstheorie wird der Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung und der Spannungs-Formänderungsbeziehung mit dem Begriff des plastischen Potentials definiert

[Prager 1955]. Beliebige Spannungszustände σ_{ij}, bei denen keine plastischen Verformungen eintreten, bilden den aplastischen Bereich. Spannungszustände, welche die Fliessbedingung

$$Y(\sigma_{ij}) = 0 \tag{3.60}$$

erfüllen, bilden die Fliessgrenze. D. h. die Fliessfläche begrenzt den aplastischen Bereich. Die Fliessfunktion $Y(\sigma_{ij})$ wird so festgelegt, dass sich im aplastischen Bereich Werte kleiner null ergeben.

Die Fliessfläche eines ideal plastischen Materials ist unabhängig vom Deformationsvorgang und daher durch eine feste Fliessfunktion gegeben. Im Gegensatz dazu ändert sich die Fliessfunktion eines plastischen Materials mit Verfestigung während des plastischen Verformungsprozesses. Die Fliessfunktion eines solchen Materials ist dann auch von den Verzerrungen oder sogar von seiner Vorgeschichte abhängig.

In der Plastizitätstheorie beschränken sich die Betrachtungen auf die plastischen Verzerrungen ε_{ij}^{p} respektive Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$; die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten werden daher im Folgenden ohne hochgestelltes *p* gekennzeichnet. Es wird von einem starr-ideal plastischen Materialverhalten ausgegangen, bei welchem die eingetragene Energie vollständig dissipiert wird.

Elastische Effekte werden daher nicht berücksichtigt. Es wird angenommen, dass die Geometrieänderungen klein sind und die Fliessspannung unabhängig von den Dehngeschwindigkeiten ist.

Die Theorie des plastischen Potentials basiert auf den beiden Axiomen, dass die Fliessfläche im Spannungsraum σ_{ij} eine konvexe Fläche und der Vektor der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}$ in jedem ihrer Punkte orthogonal auf der Fliessfläche stehen und nach aussen gerichtet ist. Unter der Voraussetzung dieser beiden Postulate ergibt sich das zugeordnete Fliessgesetz [von Mises 1928]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial Y(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3.61}$$

wobei $\dot{\lambda}$ einen nicht negativen Faktor mit der Einheit m/s bezeichnet, da die Bedingung, dass im plastischen Fliessen mechanische Arbeit in Wärme dissipiert werden muss, erfüllt sein muss.

Für Fliessflächen mit Singularitäten lautet das Fliessgesetz

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \sum_{m} \dot{\lambda}_m \frac{\partial Y_m(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3.62}$$

Die Orthogonalität der Verzerrungsvektoren $\dot{\varepsilon}_{ij}$ bedeutet, dass die Spannungsänderung keine Arbeit an den plastischen Formänderungszuwächsen leistet.

Sämtliche Spannungs- und Verzerrungszustände, die das Fliessgesetz (3.61) respektive (3.62) sowie die Bedingungen $Y(\sigma_{ij}) = 0$ und $\dot{\lambda} \geq 0$ beziehungsweise $Y(\sigma_{ij}) < 0$ und $\dot{\lambda} = 0$ erfüllen, werden verträglich genannt. Die Fliessfunktion $Y(\sigma_{ij})$ übernimmt gemäss der Beziehung (3.61) respektive (3.62) die Funktion eines plastischen Potentials.

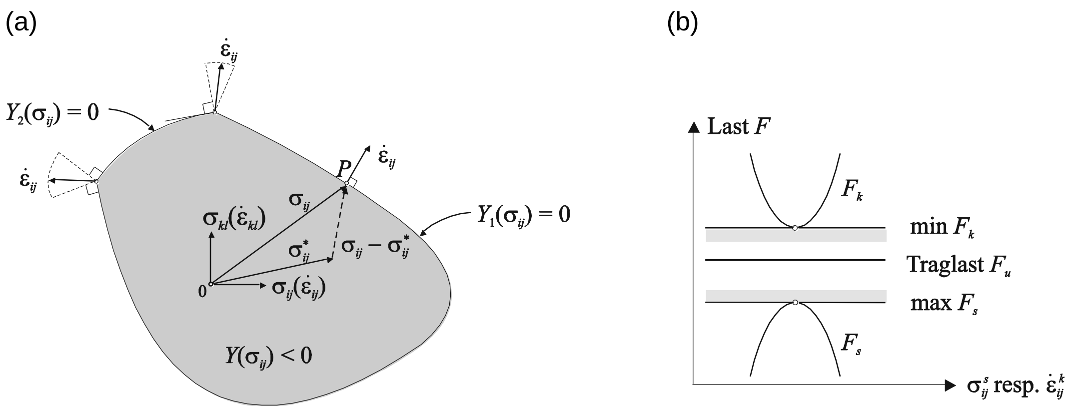


Abb. 3.6 *Traglastverfahren und Theorie des plastischen Potentials:*
(a) Fliessfigur mit möglichen Singularitäten: Fliessbedingung und Fliessgesetz im Spannungsraum;
(b) Grenzwertsätze: Eingrenzung der Traglast.

Die am System geleistete spezifische Dissipationsleistung pro Flächeneinheit beträgt

$$\dot{D}_i\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\right) = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial Y\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij} \tag{3.63}$$

Diese spezifische Dissipationsleistung ist ein Mass für die Geschwindigkeit, mit der mechanische Energie während des plastischen Fliessens dissipiert wird.

Die Theorie des plastischen Potentials ergibt sich auch aus dem Prinzip der grössten Dissipationsleistung ([von Mises 1928], [Hill 1948], [Prager 1955]). [Koiter 1953] hat die Theorie des plastischen Potentials in allgemeiner Form eingeführt, so dass das Fliessgebiet auch für nicht reguläre Randpunkte gültig ist (siehe Abb. 3.6 (a)). Demnach nimmt er an, dass die Fliessgrenze durch mehrere Fliessfunktionen Y_i bestimmt wird.

Der tatsächliche Spannungszustand σ_{ij} stellt sich bei einer vorgegebenen plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{ij}$ so ein, dass die beim Fliessen dissipierte spezifische Dissipationsleistung nach der Beziehung (3.63) maximal wird. Aufgrund der Konvexität des Fliessgebiets wird diese Bedingung durch die Beziehung

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} \geq 0 \tag{3.64}$$

ausgedrückt, wobei σ_{ij}^* einen beliebigen, nicht verträglichen Spannungszustand an der Fliessfläche oder im aplastischen Bereich darstellt. Dieses Prinzip wird das Prinzip der maximalen spezifischen Dissipationsleistung genannt. Die Beziehung (3.64) sagt aus, dass die wirkliche spezifische Dissipationsleistung eines gegebenen Systems von Verformungsgeschwindigkeiten immer grösser ist als die zu einem beliebigen, nicht verträglichen Spannungszustand unterhalb der Fliessgrenze gehörende spezifische Dissipationsleistung.

Die Orthogonalitätsbedingung ist äquivalent zu einer Anzahl verschiedener Extremalprinzipien. [Ziegler 1983] zeigte, dass das Prinzip der grössten Dissipationsleistung (Beziehung (3.64)) als Sonderfall eines thermodynamischen Prinzips vom Maximum der spezifischen Entropieproduktion aufgefasst werden kann. Dieses Prinzip ist eine Ergänzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Verallgemeinerte Grössen

Die Theorie der Grenztragfähigkeit beruht auf den verallgemeinerten Spannungen und Verformungsgeschwindigkeiten. $Y(Q_i)$ ist die in verallgemeinerten Spannungen Q_i ausgedrückte Fliessfunktion. Mithilfe der Definition der verallgemeinerten Spannungen und der spezifischen Dissipationsfunktion können für ein Tragwerk zugeordnete verallgemeinerte Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ ermittelt werden. Das Fliessgesetz nach der Beziehung (3.61) nimmt für das verallgemeinerte plastische Potential die Form

$$\dot{q}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial Y(Q_i)}{\partial Q_i} \tag{3.65}$$

an, wobei $\dot{\lambda}$ wiederum einen nicht negativen Faktor bezeichnet. Aus der Konvexität der Fliessfläche und dem Fliessgesetz nach der Beziehung (3.65) kann gefolgert werden, dass jedem Verformungsgeschwindigkeitsfeld $\dot{q}_i$ solche Felder der verallgemeinerten Spannungen Q_i entsprechen müssen, die die Fliessbedingung $Y(Q_i) = 0$ erfüllen. Q^*_i stellt einen beliebigen Spannungszustand unterhalb der Fliessgrenze dar. Die spezifische Dissipationsleistung $\dot{D}_i$, d. h. das skalare Produkt der Spannungs- und Verformungsgeschwindigkeitsvektoren Q_i und $\dot{q}_i$ ist eindeutig durch den Vektor

$$\dot{D}_i = \dot{D}_i(\dot{q}_i) = Q_i \dot{q}_i \tag{3.66}$$

bestimmt.

Um zu einem globalen Spannungsfeld und einem Feld von Verschiebungsgeschwindigkeiten zu gelangen, können diese lokalen Spannungen und die zugehörigen lokalen Verformungsgeschwindigkeiten für jedes Volumenelement eines dreidimensionalen plastischen Kontinuums definiert werden [Prager 1955].

3.6.3 Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie für (quasi-)statische Lasten nach [Gvozdev 1963] und [Hill 1951] und später unabhängig von [Drucker et al. 1951] und [Drucker et al. 1952] lassen sich durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen (Arbeiten) und der Theorie des plastischen Potentials herleiten. Der Grundgedanke des statischen Grenzwertsatzes wurde bereits 1914 von Kazinczy bei der Untersuchung der Tragfähigkeit von Durchlaufträgern verwendet [Kaliszky 1984].

Die Grenzwertsätze der Traglastverfahren lauten nach [Thürlimann & Ziegler 1963]:

> Statischer (unterer) Grenzwertsatz: “Jede Belastung, zu der sich ein stabiler statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, liegt nicht höher als die Traglast”: $F_s \leq F_u$
>
> Kinematischer (oberer) Grenzwertsatz: “Jede Belastung, zu der sich ein instabiler kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angeben lässt, liegt nicht tiefer als die Traglast”: $F_k \geq F_u$

Die Grenzwertsätze gelten sowohl für linear elastisch-ideal plastische als auch für starr-ideal plastische Materialien. D. h. die exakte statische Traglast ist für beide Materialien dieselbe.

Ein Spannungszustand wird als statisch zulässig bezeichnet, wenn die statischen Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Wenn die Fliessbedingung nirgends verletzt wird, wird der Spannungszustand als stabil bezeichnet.

Der Beweis des statischen Grenzwertsatzes lässt sich durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen (3.17) oder des Prinzips der virtuellen Arbeiten [Marti et al. 1999] erbringen. Dafür wird eine einparametrige Oberflächenkraft q_i betrachtet, $q_i = \kappa \cdot q_{i0}$, wobei q_{i0} eine beliebige Bezugsbelastung (konstante Grundlast) und κ einen Proportionalitätsfaktor, einen zeitlich monoton wachsenden Parameter, bezeichnen. Damit kann der gesamte Belastungsvorgang durch einen einzigen anwachsenden Parameter κ beschrieben werden. Die Volumenkräfte t_i werden als konstant angenommen. Das Prinzip der virtuellen Leistungen wird für einen mit der Traglast $\kappa_u \cdot q_{i0}$ verträglichen Geschwindigkeitszustand ($\dot{u}_i^u$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^u$) für zwei verschiedene, statisch zulässige Spannungszustände formuliert, einmal für jenen der Traglast σ_{ij}^u und einmal für einen beliebigen anderen Spannungszustand σ_{ij}^s, welcher nirgends die Fliessgrenze verletzt:

$$\begin{aligned} &\int_V \sigma_{ij}^u \dot{\varepsilon}_{ij}^u \mathrm{d}V - \kappa_u \int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^u \mathrm{d}S - \int_V t_i \dot{u}_i^u \mathrm{d}V = 0 \\ &\int_V \sigma_{ij}^s \dot{\varepsilon}_{ij}^u \mathrm{d}V - \kappa_s \int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^u \mathrm{d}S - \int_V t_i \dot{u}_i^u \mathrm{d}V = 0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Der Proportionalitätsfaktor κ_s, der statisch zulässige Lastfaktor, ergibt sich aus (3.67):

$$\kappa_s = \frac{\int_V \sigma_{ij}^s \dot{\varepsilon}_{ij}^u \mathrm{d}V - \int_V t_i \dot{u}_i^u \mathrm{d}V}{\int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^u \mathrm{d}S} \leq \frac{\int_V \sigma_{ij}^u \dot{\varepsilon}_{ij}^u \mathrm{d}V - \int_V t_i \dot{u}_i^u \mathrm{d}V}{\int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^u \mathrm{d}S} = \kappa_u \tag{3.68}$$

Das Kleinergleichzeichen in (3.68) folgt aus dem Prinzip der maximalen spezifischen Dissipationsleistung (3.64), welches unter Berücksichtigung der Konvexität der Fliesshyperfläche aus Abb. 3.6 (a) abgelesen werden kann.

Ein Verformungsgeschwindigkeitszustand heisst kinematisch zulässig, wenn die kinematischen Beziehungen und die Randbedingungen des Systems erfüllt sind. Ist die Leistung der äusseren Kräfte grösser oder gleich der Dissipationsleistung, so nennt man den Verformungsgeschwindigkeitszustand instabil.

Der Beweis des kinematischen Grenzwertsatzes lässt sich analog zum statischen Grenzwertsatz erbringen. Dabei wird das Prinzip der virtuellen Leistungen für einen beliebigen kinematisch zulässigen Verschiebungsgeschwindigkeitszustand ($\dot{u}_i^k$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$) für jeweils zwei verschiedene Spannungszustände formuliert. Dabei werden die Volumenkräfte t_i wiederum konstant gehalten. Einerseits wird ein mit dem kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verträglicher Spannungszustand σ_{ij}^k mit zugehörigem Proportionalitätsfaktor κ_k und andererseits ein der Traglast zugeordneter Spannungszustand σ_{ij}^u mit zugehörigem Proportionalitätsfaktor κ_u betrachtet.

$$\begin{aligned} &\int_V \sigma_{ij}^u \dot{\varepsilon}_{ij}^k \mathrm{d}V - \kappa_u \int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^k \mathrm{d}S - \int_V t_i \dot{u}_i^k \mathrm{d}V = 0 \\ &\int_V \dot{D}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^k\right) \mathrm{d}V - \kappa_k \int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^k \mathrm{d}S - \int_V t_i \dot{u}_i^k \mathrm{d}V = 0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Aus (3.64) und (3.69) folgt der Proportionalitätsfaktor κ_k, der kinematisch zulässige Lastfaktor,

$$\kappa_k = \frac{\int_V \dot{D}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^k\right) \mathrm{d}V - \int_V t_i \dot{u}_i^k \mathrm{d}V}{\int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^k \mathrm{d}S} \geq \frac{\int_V \sigma_{ij}^u \dot{\varepsilon}_{ij}^k \mathrm{d}V - \int_V t_i \dot{u}_i^k \mathrm{d}V}{\int_{S_q} q_{i0} \dot{u}_i^k \mathrm{d}S} = \kappa_u \tag{3.70}$$

Der Verträglichkeitssatz nach [Sayir & Ziegler 1969] lautet wie folgt:

> "Jedes nichttriviale zulässige Geschwindigkeitsfeld, das mit einem stabilen zulässigen Spannungsfeld verträglich ist, ist instabil."

Bei einer vollständigen Lösung des Problems existiert ein (stabiler) statisch zulässiger Spannungszustand, der mit einem nach dem Fliessgesetz (3.62) zugeordneten instabilen, kinematisch zulässigen Verformungsgeschwindigkeitszustand verträglich ist. Die zugehörige Belastung entspricht der exakten Traglast: F_u.

Abb. 3.6 (b) veranschaulicht die obere und untere Eingrenzung der Traglast: $F_s \leq F_u \leq F_k$, basierend auf dem statischen (unteren) und kinematischen (oberen) Grenzwertsatz der Traglastverfahren.

3.6.4 Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb

Das Materialverhalten von Beton kann mit der Coulomb'schen Fliessbedingung

$$Y_1 = |\tau| + \sigma \tan\varphi - c = 0 \tag{3.71}$$

beschrieben werden, wobei $c \geq 0$ die Kohäsion und $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ den Winkel der inneren Reibung und f_{ct} die effektive Betonzugfestigkeit bezeichnen.

Mit den Hauptspannungen $\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k$ lautet (3.71)

$$Y_1 = \sigma_i (1 + \sin\varphi) - \sigma_k (1 - \sin\varphi) - 2c\cos\varphi = k\sigma_i - \sigma_k - f_c = 0 \tag{3.72}$$

wobei f_c die einachsige Druckfestigkeit und f_{ct} die einachsige Zugfestigkeit bezeichnet:

$$f_c = \frac{2c\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad \text{und} \quad f_{ct} = \frac{2c\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \tag{3.73}$$

Der Faktor k wird mit dem Verhältnis der Druckfestigkeit f_c zur Zugfestigkeit f_{ct} ausgedrückt:

$$k = \frac{f_c}{f_{ct}} = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \tag{3.74}$$

Bei den Fliessbedingungen wird von einem isotropen Verhalten ausgegangen.

Die spezifische Dissipationsleistung berechnet sich nach der Beziehung (3.63) mit:

$$\dot{D}_i\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\right) = \sigma_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}\left[\sigma_i (1 + \sin\varphi) - \sigma_k (1 - \sin\varphi)\right] \tag{3.75}$$

Die Fliessbedingung (3.71) liefert zuverlässige Aussagen für vorwiegend auf Druck beanspruchten Beton. Die Betonzugfestigkeit wird jedoch überschätzt. Die Werte für die Betonfestigkeiten f_c, f_{ct} und der Winkel der inneren Reibung φ können aus Versuchen ermittelt werden. Versuche zeigen, dass der Winkel der inneren Reibung näherungsweise einen konstanten Wert von $\tan\varphi = 3/4$ annimmt. Mit der Fliessbedingung von Coulomb erhält man damit Werte von $f_c/f_{ct} = 4$ und $c = f_c/4$, d. h. die Anwendung dieser Fliessbedingung führt zu unrealistisch hohen Zugfestigkeiten des Betons (vergleiche Kapitel 2.2.2).

Mit der von [Chen & Drucker 1969] vorgeschlagenen modifizierten Fliessbedingung von Coulomb wird dem Rechnung getragen, indem die Zugfestigkeit begrenzt wird: $\sigma \leq f_{ct}$. Dadurch ergibt sich ein abschliessender Kreis mit Kreisbogen BAF und Radius $f_c - 2\sin\varphi\, f_{ct}/(1 - \sin\varphi)$. In Abb. 3.7 (a) ist die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb dargestellt. Jedem Spannungspunkt auf der Fliessfläche lassen sich Coulomb'sche Fliessbedingungen mit einem (fiktiven) Winkel der inneren Reibung α mit $\pi/2 \geq \alpha \geq \varphi$ und einer (fiktiven) Kohäsion $c(\alpha)$ zuordnen [Marti 1980]. Die Fliessbedingung wird in diesem verallgemeinerten Fall auch als Mohrsche Hüllkurve bezeichnet. Die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb ist demnach ein Spezialfall der allgemeinen Mohrschen Hüllkurve.

Die modifizierte Fliessbedingung von Coulomb lässt sich im Spannungsraum mit der Beziehung

$$Y_2 = \sigma - f_{ct} = 0 \tag{3.76}$$

formulieren.

Im Hauptspannungsraum kann die Fliessbedingung mit dem Winkel der inneren Reibung α und der Kohäsion $c(\alpha)$ wie folgt formuliert werden, Abb. 3.7 (b),

$$Y_1 = \sigma_1(1 + \sin\alpha) - \sigma_3(1 - \sin\alpha) - 2c(\alpha)\cos\alpha = 0 \tag{3.77}$$

Mit dem Fliessgesetz (3.61) folgen für die Hauptverzerrungsgeschwindigkeiten ($\dot{\varepsilon}_2 = 0$)

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\lambda}(1 + \sin\alpha) \quad \text{und} \quad \dot{\varepsilon}_3 = -\dot{\lambda}(1 - \sin\alpha) \tag{3.78}$$

Die spezifische Dissipationsleistung berechnet sich mit der Beziehung (3.63) mit

$$\dot{D}_i(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}\left[\sigma_1(1 + \sin\alpha) - \sigma_3(1 - \sin\alpha)\right] \tag{3.79}$$

Wird ein ebener Spannungszustand betrachtet und die Betonzugfestigkeit vernachlässigt ($f_{ct} = 0$), erhält man für Beton ($\tan\varphi = 3/4$) die quadratische Fliessbedingung, die in Abb. 3.7 (c) als Kreis mit Radius $f_c/2$ eingezeichnet ist. Der aplastische Bereich lässt sich in der Darstellung der Hauptspannungsebene zu einem Quadrat OCDG mit Seitenlängen f_c vereinfachen.

Die spezifische Dissipationsleistung berechnet sich mit der Beziehung (3.63) und den massgebenden Hauptspannungen $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -f_c$ zu

$$\dot{D}_i(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} f_c (1 - \sin\alpha) \tag{3.80}$$

3.6.5 Diskontinuitäten

Die Grenzwertsätze und das Prinzip der virtuellen Leistungen (Arbeiten) behalten auch bei Diskontinuitäten in den Spannungsfeldern σ_{ij} und in den Feldern der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}$ unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen ihre Gültigkeit.

Diskontinuität im Spannungsfeld

Die Gleichgewichtsbedingungen müssen für die diskontinuierlichen Spannungsfelder *i* und *ii* an einer Diskontinuitätsfläche erfüllt sein. Dadurch gelten für den ebenen Spannungszustand in Abb. 4.8 (a) an einer Diskontinuitätslinie mit Schichtdicke d$n \to 0$ (Grenzwertdurchgang) folgende Bedingungen:

$$\sigma_n^i = \sigma_n^{ii} \quad \text{und} \quad \tau_{tn}^i = \tau_{tn}^{ii} \tag{3.81}$$

wobei nur die tangentialen Normalspannungen an einer Diskontinuitätslinie unstetig verlaufen, d. h. $\sigma_t^i \neq \sigma_t^{ii}$.

Abb. 3.8 (b) zeigt ein differentielles Element einer statischen Diskontinuitätslinie, welche die beiden Plattenbereiche *i* und *ii* trennt. Die in *t*-Richtung orientierte Diskontinuitätslinie kann als Balken mit verschwindender Breite ($\mathrm{d}n \rightarrow 0$) betrachtet werden. Das Gleichgewicht der Biegemomente senkrecht zur Diskontinuitätslinie liefert

$$m_n^i = m_n^{ii} \tag{3.82}$$

und somit sind die Biegemomente stetig. Eine Unstetigkeit der Drillmomente und Querkräfte an der Diskontinuitätslinie einer Platte führt zu einer konzentrierten Querkraftabtragung

$$V_t = m_{tn}^i - m_{tn}^{ii} + \frac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}t} \tag{3.83}$$

respektive zu einer linienförmigen Belastung

$$q_n = -v_n^i + v_n^{ii} - \frac{\mathrm{d}V_t}{\mathrm{d}t} \tag{3.84}$$

entlang der Diskontinuitätslinie, wobei V_t die konzentrierte Querkraft, q_n die kontinuierliche Streckenlast (Stützkraft) und M_t das Biegemoment bezeichnen.

Die Betrachtung der statischen Diskontinuitätslinie als versteckter Unterzug (engl.: strong band) findet in der Praxis im Rahmen der Streifenmethode von [Hillerborg 1975] (unterer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie) häufig Anwendung. Das Balkenelement erfordert aufgrund des konzentrierten Biegemomentes M_t die Anordnung einer entsprechenden Längsbewehrung.

[Meyboom & Marti 2001] konnten durch spezielle Bewehrungsanordnung die Existenz von statischen Diskontinuitätslinien experimentell bestätigen.

Diskontinuität im Verschiebungsfeld

[Johansen 1943], [Johansen 1962] postulierte erstmals aufgrund von experimentellen Beobachtungen, dass Stahlbetonplatten entlang gerader, sogenannter Fliessgelenklinien versagen. [Prager 1955] ordnete die von Johansen erarbeitete Fliessgelenklinientheorie dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zu. Mit der Fliessgelenklinientheorie lässt sich für einen kinematisch zulässigen Versagensmechanismus ein oberer Grenzwert der Traglast bestimmen.

Eine kinematische Diskontinuitätsfläche reduziert sich im ebenen Fall zu einer Diskontinuitätslinie. Abb. 3.8 (c) zeigt eine Diskontinuitätslinie mit Schichtdicke d*n*, welche in *t*-Richtung orientiert ist. Fliessgelenklinien stellen kinematische Diskontinuitäten der Verschiebungsgeschwindigkeitsfelder dar. Der Geschwindigkeitszustand einer beliebigen Fliessgelenklinie in Richtung *n* ist durch die relative Winkelgeschwindigkeit $\dot{\omega}_n$ der Plattenteile *i* und *ii* und durch die relative Verschiebungsgeschwindigkeit $\dot{\delta}_n$ bestimmt, Abb. 3.8 (d).

Die Verschiebungsgeschwindigkeiten in den jeweiligen Koordinatenrichtungen betragen demnach:

$$\dot{u}_n = \frac{n}{d}\left(\dot{\delta}_n + \dot{\omega}_n z\right) \quad \text{und} \quad \dot{u}_t = 0 \tag{3.85}$$

Entsprechend der Vorzeichenkonvention des korrespondierenden Biegemoments wird für $\dot{\omega}_n > 0$ ($\dot{\omega}_n < 0$) die Fliessgelenklinie als positiv (negativ) bezeichnet. Der Winkel φ beschreibt die Fliessgelenklinienrichtung.

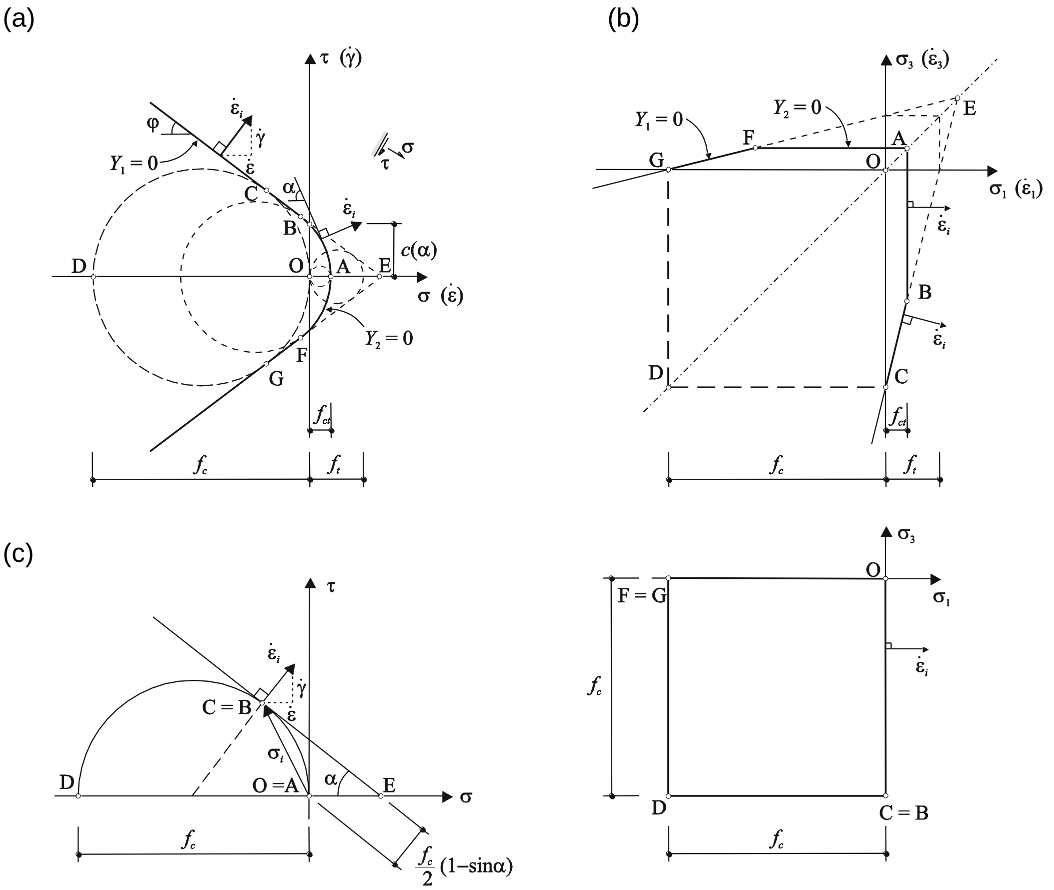


Abb. 3.7 *Materialverhalten von Beton, modifizierte Fliessbedingung von Coulomb:*
(a) Spannungsebene;
(b) Hauptspannungsebene, ebener Spannungszustand und Verzerrungszustand;
(c) quadratische Fliessbedingung im ebenen Spannungszustand.

Die kinematischen Freiheitsgrade werden dabei von sechs auf drei, nämlich $\dot{\omega}_n$, $\dot{\delta}_n$ und φ reduziert. Gemäss den kinematischen Beziehungen in Kapitel 4.2.1 herrscht in der Fliessgelenklinie ein konstanter, einachsiger Verzerrungsgeschwindigkeitszustand in Richtung n,

$$\dot{\varepsilon}_n = \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial n} = \dot{\varepsilon}_{n0} + z\dot{\chi}_n, \quad \dot{\varepsilon}_t = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_{nt} = 0 \tag{3.86}$$

mit den verallgemeinerten Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{n0} = \dot{\delta}_n/\mathrm{d}n$ und $\dot{\chi}_n = \dot{\omega}_n/\mathrm{d}n$.

Die Dissipationsleistung in einem Fliessgelenk ist das Produkt des Fliessmomentes mit dem absoluten Betrag der Winkelgeschwindigkeit in diesem Gelenk. Für eine Fliessgelenklinie in beliebiger Richtung t beträgt die auf die Fliessgelenklinienlänge bezogene Dissipationsleistung

$$\dot{D}\left(\dot{\omega}_n, \dot{\delta}_n\right) = m_n \dot{\omega}_n + n_n \dot{\delta}_n \tag{3.87}$$

Die Betondruckzonenhöhe $z_c = h/2 - \dot{\delta}_n / \dot{\omega}_n$ kann für beliebige Normalkräfte n_n aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

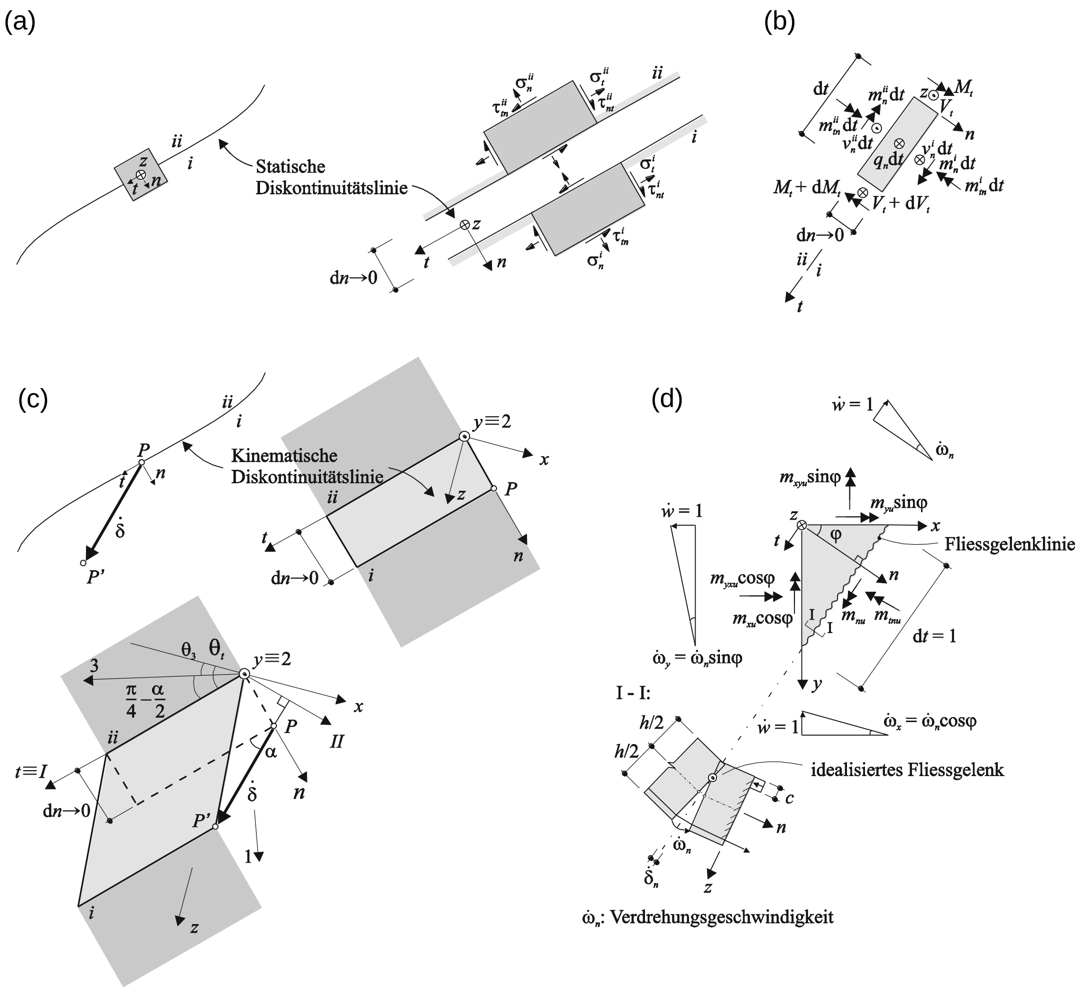


Abb. 3.8 *Diskontinuitäten: Diskontinuität im Spannungsfeld:*
(a) zulässiger (ebener) Spannungszustand;
(b) Gleichgewicht am differentielles Element; Diskontinuität im Verschiebungsfeld:
(c) ebener Formänderungszustand;
(d) diskrete Fliessgelenklinie.

4 Traglastverfahren von Platten

4.1 Einleitung

In Kapitel 4.2 werden allgemeine Beziehungen, nämlich die kinematischen, die statischen und dynamischen Beziehungen für ein differentielles Plattenelement thematisiert. Kapitel 4.3 betrachtet den Biegewiderstand für ein Stahlbeton-Plattenelement unter reiner Biegung und in Kapitel 4.4 wird die im Stahlbetonbau gängige Normalmomenten-Fliessbedingung dargelegt. Der Schwerpunkt des Kapitels liegt in der Beschreibung der Fliessgelenklinientheorie nach [Johansen 1943], [Johansen 1962], Kapitel 4.5. In Kapitel 4.6 wird die Untersuchung des Kraftflusses in Mechanismen zur Ermittlung von vollständigen Lösungen und der Querkraftwiderstände dargelegt. Anwendungsbeispiele werden zum Verständnis der Theorie in Kapitel 4.7 gezeigt. Die Ausführungen zu den Traglastverfahren gelten für Platten unter statischen Einwirkungen.

4.2 Allgemeine Beziehungen

4.2.1 Kinematische Beziehungen

Die Plattenstärke ist im Verhältnis zu den anderen Abmessungen klein. Für dünne Platten wird die Annahme getroffen, dass die Normalen zur unverformten Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht auf der verformten Plattenmittelebene bleiben (Ebenbleiben der Querschnitte; schubsteife Plattentheorie nach Bernoulli-Navier). Der Einfluss der Querkräfte auf die Plattenverformungen wird daher mit dieser Plattentheorie vernachlässigt. Die Querkräfte werden allein aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt, Kapitel 4.2.2: Statische Beziehungen. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Verschiebung *w* senkrecht zur Plattenmittelebene gegenüber der Plattenstärke *h* klein ist. Dadurch kann die Rückwirkung der Formänderungen auf das Kräftespiel ausser Acht gelassen werden und die Theorie erster Ordnung angewendet werden. Dasselbe gilt auch für die zeitliche Ableitung der Verschiebung $\dot{w}$. Dadurch verschwinden die Schubverzerrungsgeschwindigkeiten und die Verzerrungsgeschwindigkeiten in *z*-Richtung der Platte: $\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \dot{\varepsilon}_z = 0$.

Die Neigungen der verformten Plattenmittelebene betragen $\partial w/\partial x$ und $\partial w/\partial y$ in *x*- und *y*-Richtung. Die zeitlichen Ableitungen der horizontalen Verschiebungen in *x*- und *y*-Richtung in einer Ebene parallel zur unverformten Bezugsebene im Punkt *P* mit Abstand z_p betragen

$$\dot{u} = \dot{u}_0 - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \dot{v} = \dot{v}_0 - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \tag{4.1}$$

wobei $\dot{u}_0$ respektive $\dot{v}_0$ die zeitlichen Ableitungen der horizontalen Verschiebungen der Bezugsebene der Platte in *x*- respektive *y*-Richtung bezeichnen, siehe Abb. 4.1 (a).

Die kinematischen Beziehungen verknüpfen die (zeitlichen Ableitungen der) Verzerrungen mit den (zeitlichen Ableitungen der) Verformungsgrössen der Durchbiegungen und Rotationen.

Die Verzerrungsgeschwindigkeiten lassen sich mit den Beziehungen

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} = \dot{\varepsilon}_{x0} + z\dot{\chi}_x \tag{4.2}$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} = \dot{\varepsilon}_{y0} + z\dot{\chi}_y$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} = \dot{\varepsilon}_{xy0} + z\dot{\chi}_{xy}$$

bestimmen, Abb. 4.1 (b).

Kinematische Diskontinuitäten respektive Fliessgelenklinien werden in Kapitel 4.5 eingehend behandelt.

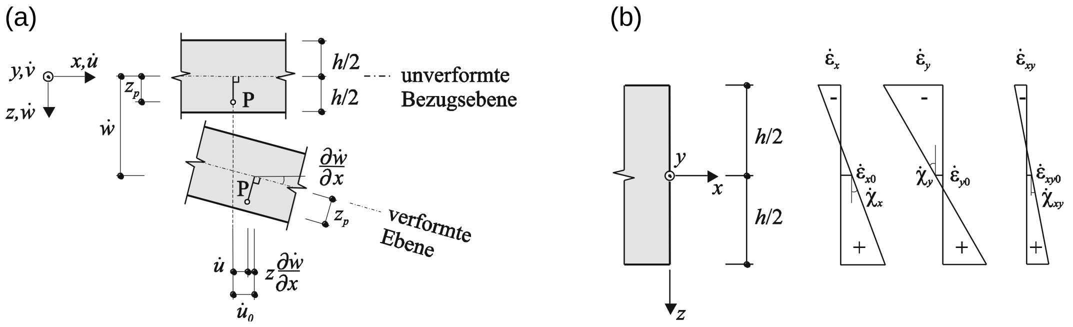


Abb. 4.1 *Kinematische Beziehungen:*
(a) Verformungsgeschwindigkeiten;
(b) Verzerrungsgeschwindigkeiten.

4.2.2 Statische Beziehungen

Die Formulierung des Kräfte- und Momentengleichgewichts an einem differentiellen Plattenelement nach der Theorie erster Ordnung in kartesischen Koordinaten, Abb. 4.2 (a) i), führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_y \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -q(x,y)$$

und die Differentialgleichung für schubstarre, linear elastische Platten

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x,y) \qquad (4.4)$$

respektive die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \tag{4.5}$$

für kleine Durchbiegungen w, wobei $q = q(x,y)$ die äussere (einparametrige, monoton steigende) Flächenlast senkrecht zur Plattenebene, m_x und m_y die Biegemomente, m_{xy} die Drillmomente und $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ die Plattensteifigkeit bezeichnen.

Für das differentielle Plattenelement mit den dazu gehörenden Spannungsresultierenden in Zylinderkoordinaten nach Abb. 4.2 (a) ii) lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r r}{\partial r} = -qr$$

$$\frac{\partial m_r r}{\partial r} - m_\varphi + \frac{\partial m_{\varphi r}}{\partial \varphi} = v_r r \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial m_{r\varphi} r}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + m_{\varphi r} = v_\varphi r$$

Die Richtungstransformationen der Biegemomente und Querkräfte lassen sich unabhängig vom gewählten Koordinatensystem in jedem Punkt der Platte bestimmen.

Die Spannungsresultierenden, in einer um den Winkel φ um die z-Achse gedrehten Basis betragen im n-t-z-Koordinatensystem, Abb. 4.2 (b),

$$m_n = m_x \cos^2\varphi + m_y \sin^2\varphi + 2m_{xy} \sin\varphi\cos\varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2\varphi + m_y \cos^2\varphi - 2m_{xy} \sin\varphi\cos\varphi \tag{4.7}$$

$$m_{tn} = (m_y - m_x)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Die Hauptrichtungen werden mit dem Winkel φ_1 bezeichnet:

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \tag{4.8}$$

Die Hauptmomente in den beiden Hauptrichtungen ergeben sich zu:

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(m_x - m_y) + 4m_{xy}^2}}{2}, \quad m_1 \geq m_2 \tag{4.9}$$

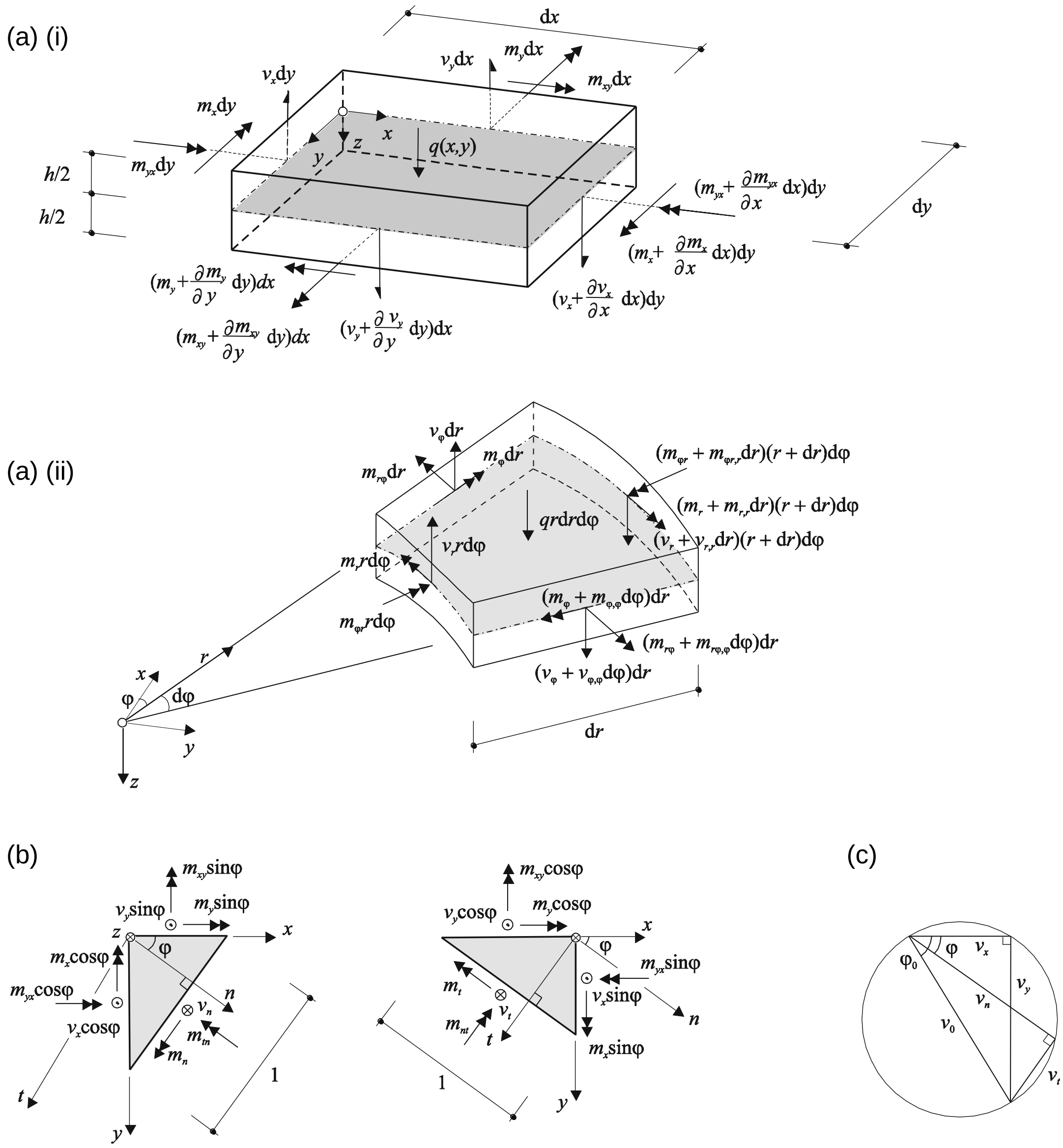


Abb. 4.2 *Statische Beziehungen:*
(a) differentielles Plattenelement in i) kartesischen Koordinaten und ii) Zylinderkoordinaten;
(b) Spannungstransformationen;
(c) Thales-Kreis zur Transformation der Querkräfte.

Die Transformationsformeln für die Querkräfte in *n*- und *t*-Richtung ergeben sich analog zu den Momententransformationsformeln (4.7) und betragen:

$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi \quad \text{und} \quad v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi \tag{4.10}$$

Die Hauptquerkraft (Satz von Pythagoras) und die Hauptrichtung betragen:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_n^2 + v_t^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \tag{4.11}$$

Der Kraftfluss im Inneren einer Platte kann mit der Hauptquerkraft und Hauptquerkraftrichtung beschrieben werden. Die Hauptrichtungen φ_1 und φ_0 der Hauptmomente und -querkräfte sind in der Regel voneinander verschieden. Die Transformation der Querkräfte kann graphisch mit einem Thales-Kreis ermittelt werden, Abb. 4.2 (c).

Ein statisch zulässiger Spannungszustand einer Platte erfüllt sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die statischen Randbedingungen. Werden weiter die Fliessbedingungen in keinem Punkt der Platte verletzt und weist die Platte ein ausreichendes Verformungsvermögen auf, so entspricht der Spannungszustand einem unteren Grenzwert der Traglast (statische Methode der Plastizitätstheorie).

4.2.3 Dynamische Beziehungen

Die Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element für dünne Platten mit kleinen Durchbiegungen in kartesischen Koordinaten nach der Beziehung (4.3) respektive in Zylinderkoordinaten nach der Beziehung (4.6) lassen sich unter Berücksichtigung der auf die Flächeneinheit bezogenen d'Alembert'schen Trägheitskräfte und Vernachlässigung der Rotationsträgheiten für dynamische Belastungen erweitern.

Für das differentielle Plattenelement nach der Theorie erster Ordnung lauten die Gleichgewichtsbedingungen in kartesischen Koordinaten, Abb. 4.3 (a),

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}=v_x$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}=v_y \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=-q(t)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

respektive in Zylinderkoordinaten, Abb. 4.3 (b),

$$\frac{\partial m_r r}{\partial r}-m_\varphi+\frac{\partial m_{\varphi r}}{\partial \varphi}=v_r r$$

$$\frac{\partial m_{r\varphi} r}{\partial r}+\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}+m_{\varphi r}=v_\varphi r \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_r r}{\partial r}=-q(t)r+\rho h\frac{\partial^2 w r}{\partial t^2}$$

wobei *w* die Durchbiegung, *t* die Zeit, ρ die Dichte und *h* die Plattenstärke bezeichnen.

Anhand der Beziehung (4.12) respektive (4.13) lässt sich auf die dynamische Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\Delta\Delta w=\frac{1}{D}\left(q-\rho h\ddot{w}\right) \tag{4.14}$$

für linear elastische, schubstarre Platten schliessen (Voraussetzung: kleine Durchbiegungen). Dabei bezeichnen $\rho h\ddot{w}$ die Trägheitskräfte, $q(t) = q(x,y,t)$ die zeitabhängige Flächenlast und $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ die Plattensteifigkeit.

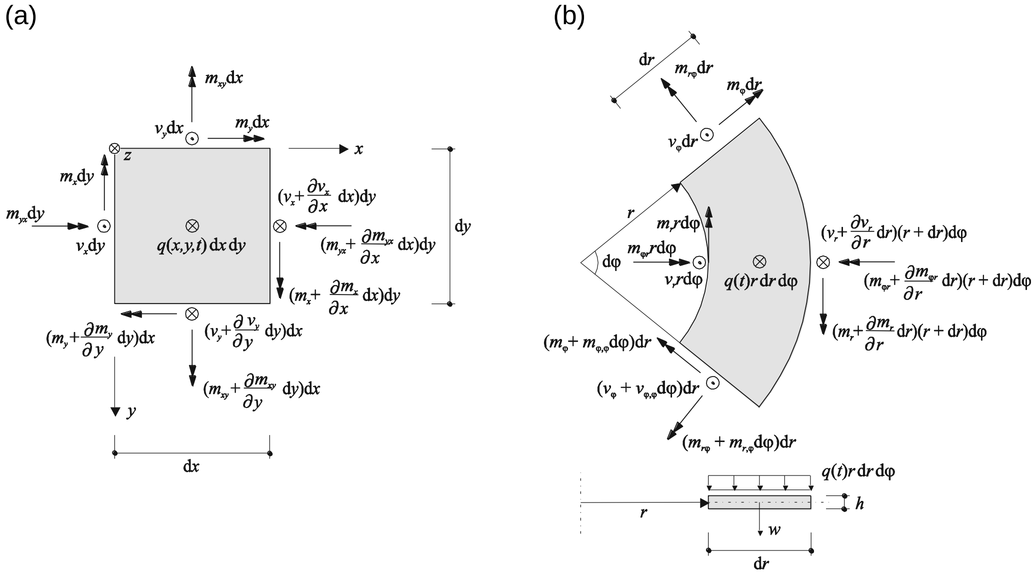


Abb. 4.3 *Dynamische Beziehungen: differentielles Plattenelement*
(a) kartesische Koordinaten
(b) Zylinderkoordinaten.

4.3 Biegewiderstand

Im Folgenden wird der Biegewiderstand des in Abb. 4.4 (c, d) dargestellten Plattenelements mit Einheitsbreite, Plattendicke h und unterer Bewehrung unter reiner Biegebeanspruchung bestimmt.

Unter der Annahme eines starr-ideal plastischen Materialverhaltens von Beton und Bewehrung wie in Abb. 4.4 (a, b) dargestellt, ergibt sich der Biegewiderstand $m_{xu} = m_u$ ohne Berücksichtigung der Biegedruckbewehrung zu

$$m_u = f_c d^2 \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{z_s}{h} - \frac{\omega}{2} \right) \tag{4.15}$$

wobei $\omega = a_s f_{sy}/(d\, f_c)$ der mechanische Bewehrungsgehalt und $d = h/2 + z_s$ die statische Höhe der Platte bezeichnen. Der negative Biegewiderstand m'_u lässt sich sinngemäss mit der Beziehung (4.15) bestimmen.

Die Drillmomente m_{xyu} in x- und y-Richtung und das Biegemoment m_{yu} in die andere Richtung sind null. Der Biegewiderstand wird einzig aus den Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement ermittelt; kinematische Relationen bleiben unberücksichtigt.

Für eine beliebige Richtung n verändern sich die Widerstände nach der Beziehung (4.7) zu

$$m_{nu} = m_u \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad m_{tnu} = -m_u \sin\varphi\cos\varphi \tag{4.16}$$

Eine allfällige Druckbewehrung, Abb. 4.4 (d), reduziert die Druckkräfte im Beton. Allerdings ist für geringe Bewehrungsgehalte der Einfluss auf den Biegewiderstand im Vergleich zu der Beziehung (4.15) gering.

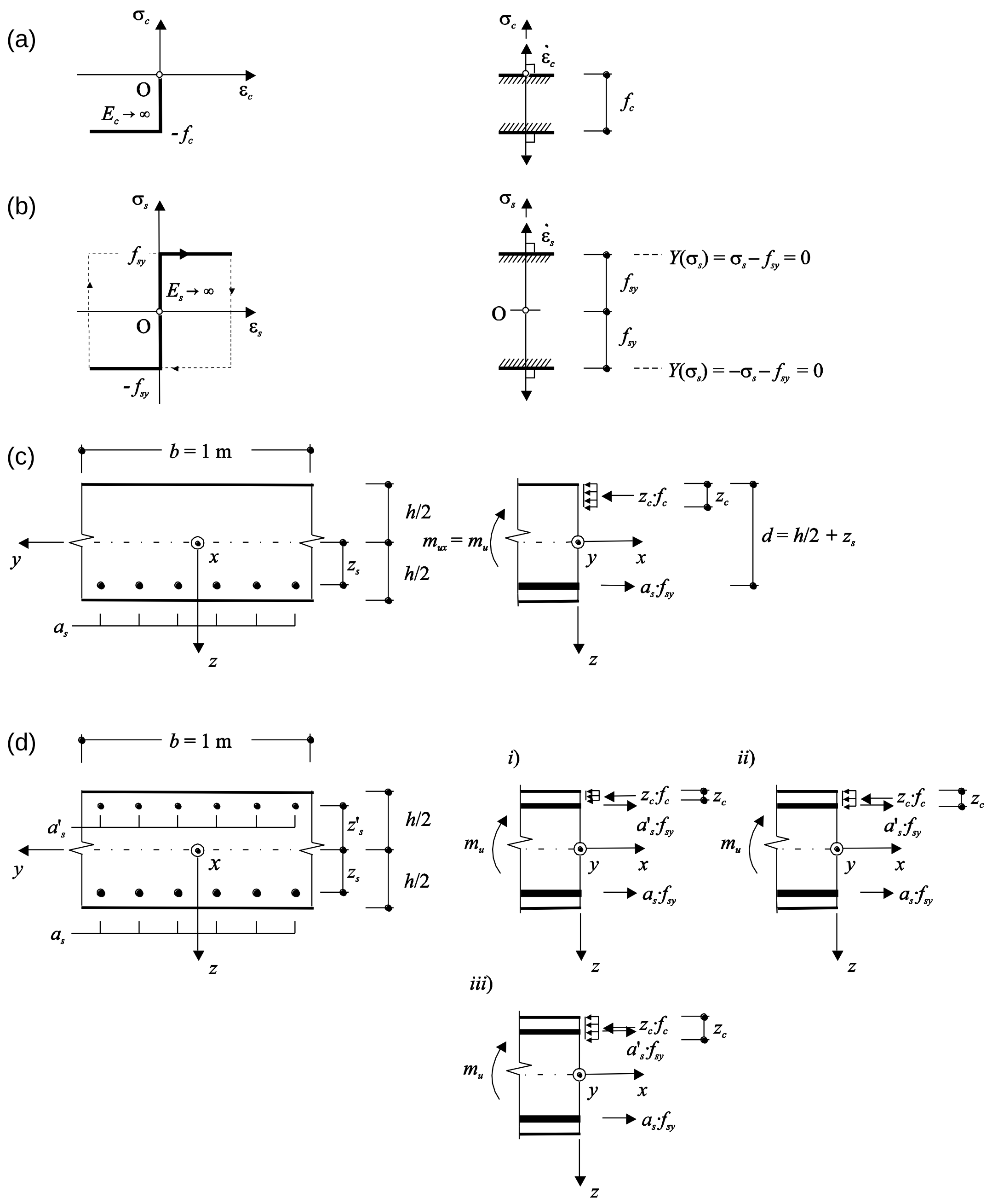


Abb. 4.4 *Plattenelement unter reiner Biegung:*
(a) starr-ideal plastisches Materialverhalten von einachsig beanspruchtem Beton und Fliessbedingung;
(b) starr-ideal plastisches Materialverhalten von einachsig beanspruchtem Betonstahl und Fliessbedingung;
(c) plastische Spannungsverteilung, ohne Druckbewehrung $a_S' = 0$;
(d) plastische Spannungsverteilung, mit Druckbewehrung $a_S' \neq 0$.

Für mehrere Bewehrungslagen erweitert sich die Beziehung (4.16) für den Biegewiderstand der unteren Bewehrung zu

$$m_{nu} = \sum_{i=1}^{k} m_u^i \cos^2 \varphi_i \quad \text{und} \quad m_{tnu} = \sum_{i=1}^{k} -m_u^i \sin\varphi_i \cos\varphi_i \tag{4.17}$$

je Richtung *i*. Der negative Biegewiderstand aus der oberen Bewehrung wird analog ermittelt.

4.4 Normalmomenten-Fliessbedingung

Fliessbedingungen können für Plattenelemente mit der statischen oder der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie hergeleitet werden [Marti et al. 1999].

Die vorliegenden Betrachtungen von Fliessbedingungen beschränken sich auf in *x*- und *y*-Richtung orthogonal bewehrte Platten.

Die Normalmomenten-Fliessbedingung wurde unabhängig von [Sawczuk & Jaeger 1963], [Nielsen 1964], und [Wolfensberger 1964] postuliert und lässt sich für eine beliebige, in *t*-Richtung orientierte Fliessgelenklinie (kinematische Diskontinuität), siehe Abb. 4.5 (a), nach [Marti et al. 1999] wie folgt herleiten.

Mit den positiven Biegewiderständen m_{xu}, m_{yu} und mit $m_{xy} = n_x = n_y = 0$ lässt sich für einen beliebigen Schnitt in *t*-Richtung mit einer zur *x*-Achse den Winkel φ einschliessenden Normale *n* einen statisch zulässigen Spannungszustand im Plattenelement bestimmen.

Die Widerstandsgrössen betragen für eine beliebige Richtung *n*:

$$m_{nu} = m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi \quad \text{und} \quad m_{tnu} = (m_{yu} - m_{xu})\sin\varphi\cos\varphi \tag{4.18}$$

in Abhängigkeit von dem Richtungswinkel φ an der Fliessgelenklinie, Abb. 4.5 (a).

Die Fliessgrenze der Bewehrung auf Zug und Druck beträgt f_{sy}. Für die Beschreibung des Bruchzustandes von Beton kann die modifizierte Fliessbedingung nach Coulomb verwendet werden, siehe Kapitel 3.6.4. Unter Vernachlässigung der Betonzugspannungen f_{ct} lässt sich diese im Hauptspannungsraum als quadratische Fliessbedingung – Quadrat OCDG in Abb. 3.7 (c) – im ebenen Spannungszustand abbilden (statisch zulässiger Spannungszustand). Im Allgemeinen sind die Druckzonenhöhen z_{cx} und z_{cy} ungleich; daher kann dem betrachteten statisch zulässigen Spannungszustand kein verträglicher Fliessgelenklinienmechanismus zugeordnet werden. Der Biegewiderstand m_{nu} in Beziehung (4.18) entspricht daher einem unteren Grenzwert für das plastische Moment in *n*-Richtung, d. h.

$$m_{nu} \geq m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi \tag{4.19}$$

Da die Abweichung zwischen den Druckzonenhöhen normalerweise aber gering ist, gibt die Beziehung $(4.18)_1$ eine gute (auf der sicheren Seite liegende) Näherung für die positiven und negativen Biegewiderstände. Somit gelten näherungsweise für die positiven respektive negativen Biegewiderstände die beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_{nu} &= m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi \\ m'_{nu} &= m'_{xu}\cos^2\varphi + m'_{yu}\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{4.20}$$

Für die aufgebrachten Biegemomente m_x, m_y und Drillmomente m_{xy} erhält man mithilfe der Beziehung (4.7) die Spannungsresultierenden in *n*-Richtung:

$$\begin{aligned} m_n &= m_x\cos^2\varphi + m_y\sin^2\varphi + 2m_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ m_{tn} &= (m_y - m_x)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei $n_n = n_{tn} = 0$ betragen.

(a) (b)

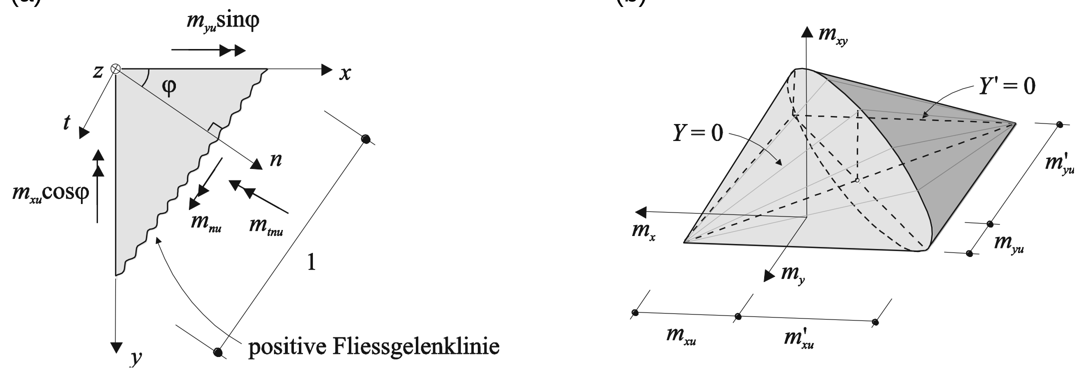


Abb. 4.5 *Normalmomenten-Fliessbedingung für orthogonal bewehrte Stahlbeton-platten:*
(a) Transformation des Biegewiderstands an der Fliessgelenklinie;
(b) Fliessfigur des Plattenelements (elliptische Kegelflächen). Die Biegemomente m_n aus einem statisch zulässigen Spannungszustand müssen für beliebige Richtungen n zwischen den entsprechenden Biegewiderständen liegen: $-m'_{nu} \le m_n \le m_{nu}$.

Die Bedingungen $m_n = m_{nu}$ und $dm_n/d\varphi = dm_{nu}/d\varphi$ führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(m_x - m_{xu})\cos^2\varphi_u + (m_y - m_{yu})\sin^2\varphi_u - 2m_{xy}\sin\varphi_u\cos\varphi_u = 0 \\ &-(m_{xu} - m_x) + (m_{yu} - m_y) - 2m_{xy}\cot(2\varphi_u) = 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei φ_u die Fliessgelenklinienrichtung bezeichnet. Die Division der ersten Beziehung $(4.22)_1$ mit $\sin^2\varphi_u$ respektive $\cos^2\varphi_u$ und die Subtraktion beziehungsweise Addition der zweiten Beziehung $(4.22)_2$ führt zu

$$m_{xu} = m_x + m_{xy}\tan\varphi_u \quad \text{und} \quad m_{yu} = m_y + m_{xy}\frac{1}{\tan\varphi_u} \tag{4.23}$$

und analog bekommt man für die negativen Biegemomente:

$$m'_{xu} = m_x + m_{xy}\tan\varphi'_u \quad \text{und} \quad m'_{yu} = m_y + m_{xy}\frac{1}{\tan\varphi'_u} \tag{4.24}$$

Durch Elimination der Winkel der Fliessgelenklinienrichtungen φ_u und φ'_u erhält man die Fliessbedingungen

$$\begin{aligned} &Y = m_{xy}^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y) = 0 \\ &Y' = m_{xy}^2 - (m'_{xu} + m_x)(m'_{yu} + m_y) = 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

für positive respektive negative Biegewiderstände, wobei die Bedingungen $(m_{xu} - m_x) \ge 0$, $(m_{yu} - m_y) \ge 0$, $(m'_{xu} + m_x) \ge 0$ und $(m'_{yu} + m_y) \ge 0$ gelten.

Die Fliessbedingungen Y = 0 und Y' = 0 entsprechen in einem dreidimensionalen Momentenraum m_x, m_y, m_{xy} zwei elliptischen Kegeln, welche sich in einer Ellipse schneiden (Abb. 4.5 b). Die Fliessfigur des Plattenelements kann geometrisch in drei Fliessregimes unterteilt werden: Kegelspitze (I), Schnittellipse (II) und Kegelfläche (III).

Nach dem Fliessgesetz (3.61) und der Beziehung $(4.25)_1$ gelten für beliebige Punkte auf der Kegelfläche Y = 0 ausserhalb der Kegelspitze und der Schnittellipse der beiden Kegel die plastischen Krümmungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\chi}_x = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m_x} = \dot{\lambda}(m_{yu} - m_y),\ \dot{\chi}_y = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m_y} = \dot{\lambda}(m_{xu} - m_x),\ 2\dot{\chi}_{xy} = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2\dot{\lambda}m_{xy} \tag{4.26}$$

und analog gilt für die Kegelfläche Y' = 0 nach Beziehung $(4.25)_2$

$$\dot{\chi}_x = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m'_x} = \dot{\lambda}(m'_{yu} - m_y),\ \dot{\chi}_y = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m'_y} = \dot{\lambda}(m'_{xu} - m_x),\ 2\dot{\chi}_{xy} = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial m'_{xy}} = 2\dot{\lambda}m'_{xy} \tag{4.27}$$

wobei $\dot{\lambda}$ wiederum einen nicht negativen skalaren Faktor bezeichnet.

Mit der Beziehung (4.26) und der Fliessbedingung $(4.25)_1$ folgt die Beziehung

$$Y = \dot{\chi}_x\dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2 = 0 \tag{4.28}$$

für alle Punkte auf der Kegelfläche des Fliessregimes III. Beziehung (4.28) lässt sich mit einem Mohrschen Kreis graphisch darstellen, wobei ein Hauptkrümmungsinkrement verschwindet ($\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0$).

Für Punkte auf der Schnittellipse der beiden Kegelflächen (Fliessregime II) respektive der Kegelspitzen (Fliessregime I) gelten die Beziehungen

$$\dot{\chi}_x\dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2 \leq 0 \tag{4.29}$$

respektive

$$\dot{\chi}_x\dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2 \geq 0 \tag{4.30}$$

Bei Verwendung der Normalmomenten-Fliessbedingung im Stahlbetonbau wird insbesondere für hohe Biegebewehrungsgehalte sowie für grosse Drillmomentenbeanspruchung bezüglich der Bewehrungsrichtungen der Tragwiderstand überschätzt [Marti et al. 1999]. Dieser überschätzte Tragwiderstand lässt sich jedoch häufig durch die günstige Wirkung der (vernachlässigten) Membrankräfte kompensieren.

4.5 Fliessgelenklinientheorie

4.5.1 Allgemeines

Dünne Stahlbetonplatten mit verhältnismässig geringen Bewehrungsgehalten führen im Allgemeinen zu einem durch Fliessen der Zugbewehrung eingeleiteten Biegeversagen. Durch das Fliessen der Bewehrung wird die Nulllinie verschoben, was zu einer übermässigen Betonstauchung führt. In der Fliessgelenklinientheorie werden die Konzentrationen der Formänderung des Versagensmechanismus als Fliessgelenklinien idealisiert. Mit der kinematischen Methode lässt sich ein oberer Grenzwert der Traglast von Stahlbetonplatten unter statischer Belastung durch Verwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen (Arbeiten) bestimmen. Die Ermittlung eines oberen Grenzwertes der Traglast erfordert die Bestimmung eines Versagensmechanismus mit einem kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeld der Platte. Die restlichen Bereiche der Platte werden als starr (elastisch) angenommen.

Eine grundlegende Annahme der Fliessgelenklinientheorie ist, dass quer zu den Fliessgelenklinien bei freier Verdrehbarkeit zweier angrenzender Plattenteile ein konstantes Biegemoment übertragen wird. Eine allfällige Materialverfestigung wird nicht berücksichtigt. Der Biegewiderstand wird gemäss Kapitel 4.3 auf der Grundlage des einachsigen Spannungszustandes anhand der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt.

Die Entwicklung der Fliessgelenklinientheorie der Stahlbetonplatten wurde massgeblich von [Johansen 1943], [Johansen 1962] vorangetrieben. Erst einige Jahre später wurde die Fliessgelenklinientheorie im Kontext der Plastizitätstheorie und deren oberen und unteren Grenzwertsätzen diskutiert. Da Platten im Traglastzustand ein ideal plastisches Verhalten aufzeigen und der Einfluss der Verzerrungen auf das Kräftespiel ausser Acht gelassen wird, können die in Kapitel 3.6.3 erörterten Grenzwertsätze angewendet werden. [Prager 1955] identifizierte die Fliessgelenklinientheorie für (quasi-)statische Belastungen als Anwendung des kinematischen (oberen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie für Stahlbetonplatten.

Mit der Fliessgelenklinientheorie lässt sich keine Aussage über die Plattensteifigkeit im elastischen Tragwerksbereich machen.

4.5.2 Geschwindigkeitsfeld

[Johansen 1943], [Johansen 1962] postulierte aufgrund von Beobachtungen bei Bruchversuchen, dass der Kollaps von Stahlbetonplatten entlang gerader, sogenannter Fliessgelenklinien, an welchen eine Konzentration plastischer Krümmungen auftritt, erfolgt. Die dabei auftretenden elastischen Formänderungen seien gegenüber den plastischen Verformungen der Platte vernachlässigbar klein. Der auftretende Bruchmechanismus besteht aus starren Plattenteilen, welche entlang Fliessgelenklinien rotieren. Die Bruchfigur respektive das formgleiche Geschwindigkeitsfeld ergeben sich aus der Starrkörperbewegung der einzelnen Plattenteile, welche sich um bestimmte Achsen drehen. Dies wird in Abb. 4.6 (a) exemplarisch für eine viereckige Platte mit zwei Stützen bei A und B sowie einer gelenkigen Lagerung entlang DC gezeigt.

Dabei rotieren die Plattenteile I, II und III um die Achsen EF, FG und EG. Die Verlängerungen der die drei Plattenteile I, II und III begrenzenden Fliessgelenklinien gehen aus Kompatibilitätsgründen durch die Schnittpunkte E, F und G der Rotationsachsen. Die Richtungen der Achsen sind somit von der Plattenform und der Stützbedingungen abhängig. Bei einem gelagerten, nicht abhebbaren Plattenrand fällt die Rotationsachse mit diesem Rand zusammen. Bei Plattenteilen mit einer Punktstützung verläuft die Rotationsachse durch den Stützungspunkt, wobei ihre Richtung aber beliebig sein kann.

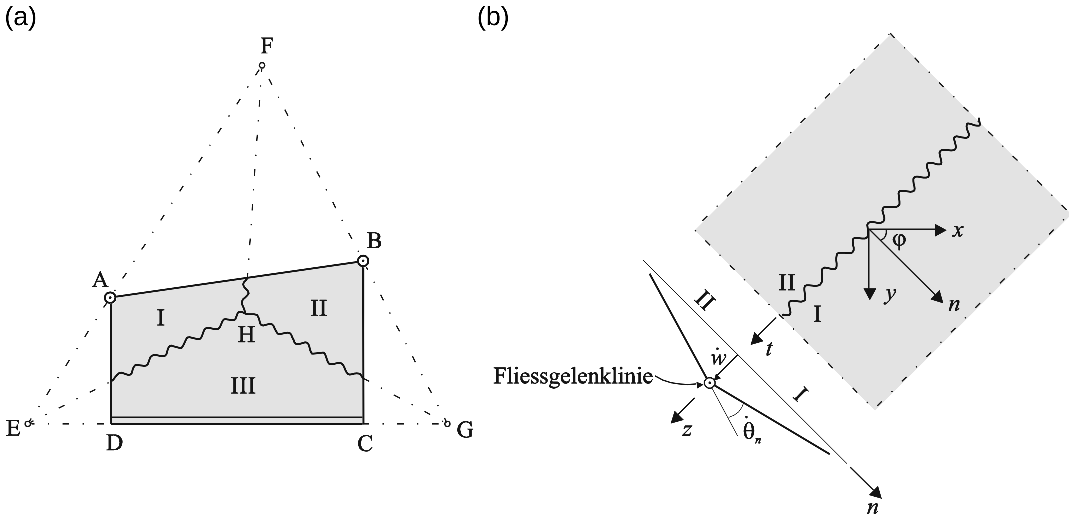


Abb. 4.6 *Ermittlung des Mechanismus respektive des Geschwindigkeitsfeldes unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen:*
(a) am Beispiel einer viereckigen Platte;
(b) Fliessgelenklinie (kinematische Diskontinuität).

Der Bruchmechanismus respektive das plastische Geschwindigkeitsfeld einer Platte wird durch die Drehachsen der Plattenteile und die Verhältnisse der Verdrehungsgeschwindigkeiten untereinander bestimmt. Wirkt eine Einzelkraft auf eine Platte, so bildet sich im Allgemeinen an der Lasteintragungsstelle ein Knotenpunkt mit n Fliessgelenklinien und somit n Plattenteilen. Der Lastangriffspunkt definiert dann die Teilung der Platte und das Geschwindigkeitsfeld wird dann nur durch die $(n-1)$ Verhältnisse der Verdrehungsgeschwindigkeit bestimmt. Fliessgelenklinien stellen Diskontinuitäten im Verschiebungsgeschwindigkeitsfeld dar.

4.5.3 Dissipationsleistung

Diskrete Fliessgelenklinie

Die elementare Dissipationsleistung für das in Abb. 4.7 (a) dargestellte differentielle Element einer Fliessgelenklinie in t-Richtung mit Elementlänge dt beträgt für verschwindende Membrankräfte, $n_n = 0$,

$$\mathrm{d}\dot{D}(\dot{\omega}_n) = m_{nu}\dot{\omega}_n \mathrm{d}t = \left(m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi\right)\dot{\omega}_n \mathrm{d}t \tag{4.31}$$

wobei $\dot{\omega}_n$ die Winkelgeschwindigkeit und m_{nu} der Biegewiderstand sind. Die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit betragen $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n\cos\varphi$ und $\dot{\omega}_y = \dot{\omega}_n\sin\varphi$. Das differentielle Element einer Fliessgelenklinie in t-Richtung setzt sich aus $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\sin\varphi$ und $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t\cos\varphi$ zusammen. Damit lässt sich die elementare Dissipationsleistung pro Längeneinheit mit

$$\mathrm{d}\dot{D}(\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y) = m_{xu}\dot{\omega}_x \mathrm{d}y + m_{yu}\dot{\omega}_y \mathrm{d}x \tag{4.32}$$

berechnen. D. h., die elementare Dissipationsleistung lässt sich aus den Biegewiderständen und Rotationsgeschwindigkeiten in den Bewehrungsrichtungen einer orthotrop bewehrten Platte ermitteln.

Die Betrachtung einer regulären polygonalen Platte mit n Segmenten respektive $\dot{\omega}$ diskreten Fliessgelenklinien in Abb. 4.7 (b) ergibt für $n \to \infty$ die Dissipationsleistung in einem Fächermechanismus einer isotropen Platte, Abb. 4.7 (c).

Fächermechanismus

Die elementare Dissipationsleistung in einem Fächer für ein orthogonal bewehrtes differentielles Plattenelement beträgt

$$\mathrm{d}\dot{D} = m_{\varphi u}\mathrm{d}r\dot{\chi}_{\varphi}r\mathrm{d}\varphi + m'_{ru}\,\mathrm{d}\varphi = m_{\varphi u}\dot{w}_{,r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + m'_{ru}\,\mathrm{d}\varphi \tag{4.33}$$

wobei $\mathrm{d}\varphi$ der Winkel zwischen den Fliessgelenklinien im Fächer bezeichnet.

An einem Beispiel eines Fächermechanismus einer isotropen Platte, $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$, wird die Dissipationsleistung in einem Kreisfächer mit Berandungsradius R bestimmt, Abb. 4.7 (c). Dabei wird eine Einsenkungsgeschwindigkeit um den virtuellen Betrag $\dot{w}$ bei $x = y = 0$ gewählt. Der Hauptkrümmungsradius im Kegelelement beträgt demnach $\rho = Rr$ und $\dot{\alpha}$ entspricht dem Verdrehungsgeschwindigkeitswinkel. Die Dissipationsleistung im Kreisfächer lässt sich in zwei Anteile aufteilen: die Dissipationsleistung entlang der Fächerberandung $\dot{D}_a$ und die Dissipationsleistung im Fächer $\dot{D}_F$. Die gesamte Dissipationsleistung des in Abb. 4.7 (e) dargestellten Fächers mit einem Öffnungswinkel β beträgt

$$\dot{D} = \dot{D}_F + \dot{D}_a = \int_{r=0}^{R}\int_{0}^{\beta} m_u \frac{1}{\rho} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{0}^{\beta}\lambda m_u \mathrm{d}\varphi \tag{4.34}$$

Die Dissipationsleistung im Fächer respektive in der Berandung lässt sich in integrierter Form mit

$$\dot{D}_F = \int_{r=0}^{R}\int_{0}^{\beta} m_u \frac{1}{\rho} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\kappa = \beta m_u \tag{4.35}$$

respektive

$$\dot{D}_a = \int_{0}^{\beta}\lambda m_u \mathrm{d}\varphi = \beta\lambda m_u \tag{4.36}$$

beschreiben. Die Dissipationsleistung in einem isotropen Fächer ist demnach unabhängig vom Radius R.

Eine orthotrope Platte lässt sich mit dem von [Johansen 1962] erstmals aufgestellten Affinitätstheorem durch affine Verzerrungen der Plattenabmessungen und der Belastung mithilfe einer linearen Transformation in eine isotrope Platte überführen. Die Transformation erfolgt mit dem Verhältnis μ der positiven respektive negativen Biegemomente in y- und x-Richtung: $\mu = m_{yu}/m_{xu} = \mu' = m'_{yu}/m'_{xu}$.

Die affine Verzerrung einer isotropen Platte mit dem Verhältnis μ führt zu den affinen Spannungsresultierenden (m_x, μm_y, $\sqrt{\mu}\mathrm{m}_{yx}$). Die Koordinaten (Abmessungen) sind mit $x^* = x$ und $y^* = y\sqrt{\mu}$ zu transformieren. Konzentrierte und verteilte Belastungen sind mit $Q^* = \sqrt{\mu}Q$ und $q^* = q$ zu transformieren.

Für den Fächer einer orthotrop bewehrten Stahlbetonplatte mit $\mu \neq \mu'$ in Abb. 4.7 (d) lässt sich die geometrische Skalierung mit $a^* = (m_{yu} + m'_{yu})/(m_{xu} + m'_{xu})$ vornehmen.

Das Gleichgewicht am Schnittkörper eines infinitesimalen Plattenelements eines Fächers einer isotropen und orthotropen Stahlbetonplatte ist in polaren Koordinaten in Abb. 4.7 (f) und (g) dargestellt. Für beide Fälle lässt sich eine vollständige Lösung am infinitesimalen Plattenelement herleiten [Zweidler 2015] (Kapitel 3.6.3).

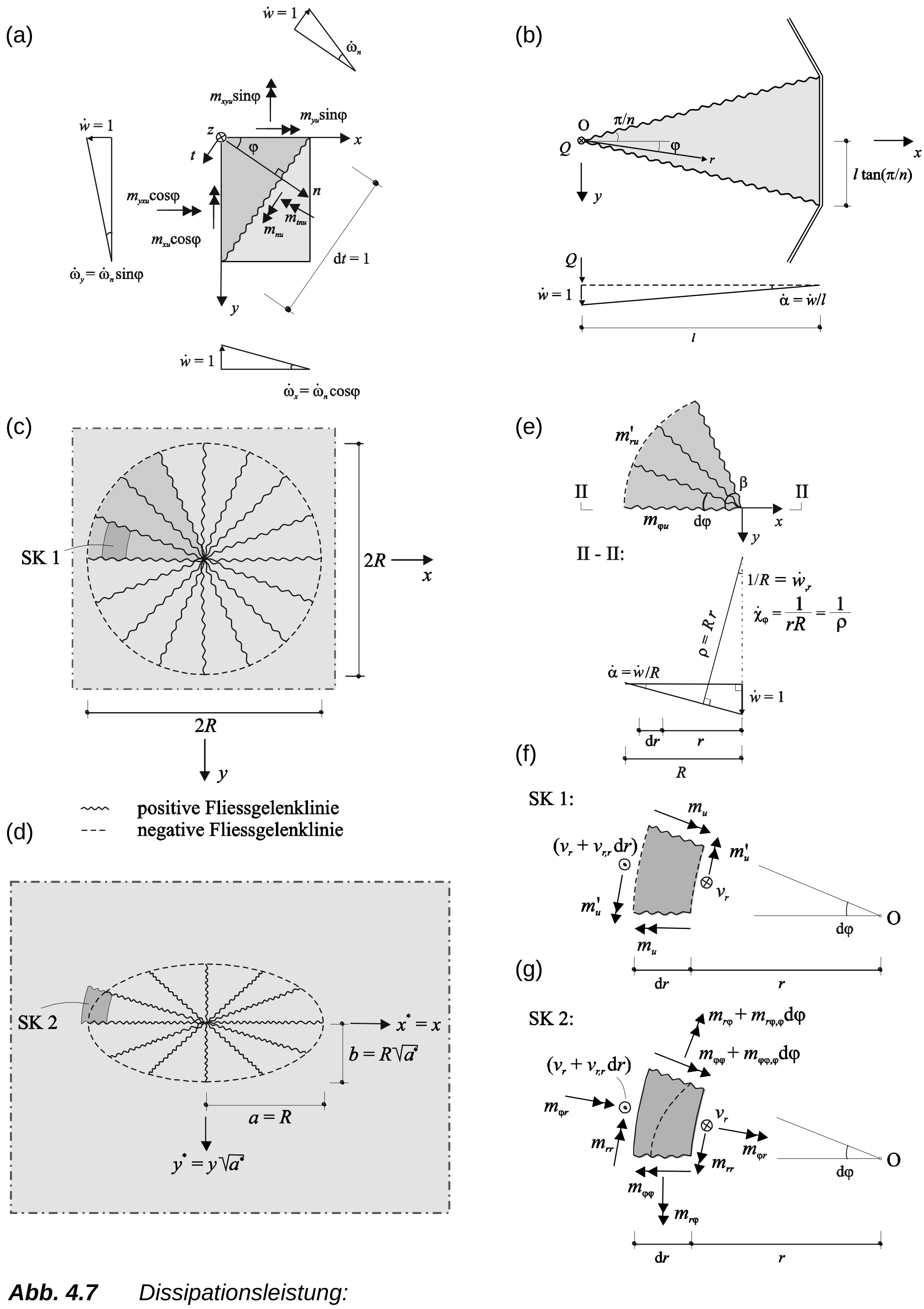


Abb. 4.7 *Dissipationsleistung:*
(a) diskrete Fliessgelenklinie für orthotrope Platten;
(b) Plattensegment einer regulär polygonalen Platte unter Einzellast Q;
(c) Fächermechanismus für isotrope Platten;
(d) Fächermechanismus für orthotrope Platten;
(e) Fächer mit Öffnungswinkel β;
(f) Schnittkörper SK 1
(g) Schnittkörper SK 2 des infinitesimalen Plattenelements in polaren Koordinaten.

4.5.4 Prinzip der virtuellen Leistungen

Die Bestimmung eines oberen Grenzwertes für die (quasi-)statische Traglast von starr-plastischen Platten lässt sich mittels Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen (virtuellen Geschwindigkeiten) und der Theorie des plastischen Potentials bewerkstelligen ([Prager & Hodge 1951], [Johansen 1962], [Sawczuk & Jaeger 1963]). Dabei wird ein kinematisch zulässiges virtuelles Geschwindigkeitsfeld für den Bruchmechanismus, welcher durch eine Anzahl benötigter Parameter bestimmt ist, angenommen. Da die Platte eine Starrkörperbewegung ausführt, sind sowohl die Lage der Drehachsen als auch die Verhältnisse zwischen den Verdrehungsgeschwindigkeiten für die einzelnen Plattenteile im Bruchzustand bekannt.

An Fliessgelenklinien wirken im Allgemeinen Biegemomente, Drillmomente und Querkräfte. Die Biegemomente sind bekannt, da sie die Fliessbedingung erfüllen müssen. Querkräfte und Drillmomente verschwinden, wenn die Fliessgelenklinie mit einer Haupttrajektorie zusammenfällt. Da diese letzteren inneren Kräfte nach der zugrunde gelegten Normalmomenten-Fliessbedingung keine verallgemeinerten Spannungen darstellen, nehmen sie nicht an der inneren Energiedissipation teil und gehen demzufolge bei der Bestimmung von oberen Grenzwerten der (quasi-)statischen Traglast einer Platte nicht in die Energiegleichung ein.

Es treten nur in den Fliessgelenklinien Verdrehungsgeschwindigkeiten $\dot{\omega}_n$ auf. Die Dissipationsleistung in den Fliessgelenklinien (virtuelle Leistung der inneren Kräfte) kann vektoriell durch das Skalarprodukt aus den Biegemomenten in den Fliessgelenklinien und den Verdrehungsgeschwindigkeiten der einzelnen Plattenteile ausgedrückt werden:

$$\dot{D} = \sum_{i=1}^{m} m_{in}\dot{\omega}_{in} = \sum_{i=1}^{m}\left(m_{ixu}\cos^2\varphi + m_{iyu}\sin^2\varphi\right)\dot{\omega}_{in} \tag{4.37}$$

Die Dissipationsfunktion $\dot{D}$ ist abhängig von den Lagerungsbedingungen der Platte und von der gewählten Fliessbedingung (Kapitel 4.4).

Die Leistung der äusseren, (quasi-)statischen Lasten bezogen auf die Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{w}$ = (x, y) beträgt

$$L = \int_A q(x,y)\dot{w}(x,y)\mathrm{d}A \tag{4.38}$$

wobei $q(x,y)$ die (quasi-)statischen Lasten und $\dot{w}$ = (x,y) die den virtuellen Verdrehungsgeschwindigkeiten entsprechenden Verschiebungsgeschwindigkeiten des Punktes (x,y) sind.

Da die Reaktionskräfte durch die Drehachsen gehen, geben diese keinen Beitrag zu den Leistungen. Für die gesamte Platte gilt nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen

$$\sum_{i=1}^{m}\left(m_{ixu}\cos^2\varphi + m_{iyu}\sin^2\varphi\right)\dot{\omega}_{in} = \int_A q(x,y)\dot{w}(x,y)\mathrm{d}A \tag{4.39}$$

wobei die Summation über alle Plattenteile erfolgt.

4.6 Kraftfluss in Stahlbetonplatten

Querkräfte zeigen den Kraftfluss in Stahlbetonplatten auf. Diese können in Form von über die Platte verteilten Hauptquerkräften oder entlang von Diskontinuitätslinien in konzentrierter Form übertragen werden. Für die Beschreibung des Kraftflusses durch das Querkraftfeld spielt der untere (statische) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie eine zentrale Rolle. Die kinematische Methode erlaubt jedoch nur bedingt Aussagen über den Kraftfluss in Platten.

4.6.1 Querkraftfluss an Diskontinuitätslinien

Nielsen diskutierte den Kraftfluss im Traglastzustand in isotropen Stahlbetonplatten [Nielsen 1964]. In einer umfangreichen Arbeit diskutierte [Zweidler 2015] den verallgemeinerten Kraftfluss an geraden Diskontinuitätslinien (Fliessregime III) und deren Schnittpunkten (Fliessregimes I und II), in Fächern, Fliessregionen (Fliessregime II) und in Plattensegmenten auf der Grundlage des Verträglichkeitssatzes. Eine Erweiterung der Darstellung von Mohrschen Spannungskreisen mit sogenannten Fliessgeraden ermöglichte ihm unter Einbezug der Normalmomenten-Fliessbedingung und des Biegewiderstandes verträgliche Spannungszustände zu konstruieren. Die Spannungspunkte der Platte, welche die Fliessbedingung erfüllen, müssen dabei auf den Fliessgeraden liegen. Wenn die Richtungen der statischen und der kinematischen Diskontinuitätslinien zusammenfallen, so liegt eine verträgliche kinematische Diskontinuitätslinie vor.

Mit den Untersuchungen des Kraftflusses an infinitesimalen Plattenelementen von Diskontinuitätslinien mit einer räumlichen Ausdehnung konnte Zweidler zeigen, dass zwischen statischen und kinematischen Diskontinuitätslinien eine eindeutige Unterscheidung besteht. Weiter wurde der Beweis geführt, dass transversal zu geraden Fliessgelenklinien (kinematische Diskontinuitätslinien) in orthotropen und schief bewehrten Stahlbetonplatten kein Querkraftfluss ($v_n = 0$) existieren kann. Diese Erkenntnis erlaubt die Steuerung des Kraftflusses $\partial m_n/\partial n + \partial m_{tnu}/\partial t = v_n = 0$, indem eine gerade Fliessgelenklinie (Fliessregime III) eine Lastscheide darstellt und dadurch die Richtung der Fliessgelenklinie derjenigen der Hauptquerkraftrichtung entspricht: $\varphi_u = \varphi_0$. Damit wird es ermöglicht, einzelne Segmente von Stahlbetonplatten hinsichtlich des Querkraftflusses zu untersuchen. Schnittpunkte von geraden Fliessgelenklinien (Fliessregimes I und II) stellen Querkraftnullpunkte dar und sind somit ebenfalls Lastscheiden. Im Grundriss gekrümmte kinematische Diskontinuitätslinien, die beispielsweise in Fächern (Fliessregime II) vorkommen, müssen transversal einen Querkraftübertrag aufweisen (vergleiche Kapitel 4.6.3).

4.6.2 Knotenkräfte in Gleichgewichtslösungen

Die Gleichgewichtsmethode nach [Ingerslev 1923] und die „Nodal-Force“-Theorie nach [Johansen 1943], [Johansen 1962] basieren auf der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen an starren Plattensegmenten, welche zu einem beliebigen Mechanismus gehören. Die Methoden sollen die analytisch oft aufwendige Minimierung der Traglast nach der Fliessgelenklinienmethode umgehen. Zur Formulierung des Gleichgewichts an den starren Plattenteilen eines Mechanismus werden sogenannte Knotenkräfte berücksichtigt. Diese konzentrierten Querkräfte treten an den Enden von Diskontinuitätslinien, den Fliessgelenklinien, auf.

Die Gleichgewichtsmethode ist allerdings beschränkt gültig und führt in gewissen Fällen im Vergleich mit der Fliessgelenklinientheorie zu unterschiedlichen Ergebnissen respektive zu Widersprüchen [Wood 1961].

In der Literatur werden nach [Nielsen 1964] und [Nielsen & Hoang 2011] zwei Typen von Knotenkräften isotrop bewehrter Platten unterschieden. Knotenkräfte des Typs I treten am Schnittpunkt einer Fliessgelenklinie (kinematische Diskontinuitätslinie) mit einem freien Plattenrand auf. Knotenkräfte des Typs II werden den konzentrierten Querkräften am

Schnittpunkt mehrerer zusammentreffender Fliessgelenklinien mit unterschiedlichem Vorzeichen zugeordnet. [Clyde 1979] zeigte, dass wirklich existierende Knotenkräfte nur an Plattenrändern und bei unterschiedlichen Bewehrungswiderständen auftreten können. Diejenigen Knotenkräfte, die für das Gleichgewicht erforderlich sind und nicht an einer Diskontinuität des Widerstandes auftreten, wurden als „inexistente" Knotenkräfte bezeichnet.

Gleichgewichtslösungen basierend auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie wurden von [Meyboom 2002] dargelegt. Dabei wurden verallgemeinerte Spannungsfelder für trapezförmige und rechteckige Plattensegmente entwickelt, welche in aus Mechanismen herausgetrennten Plattensegmente eingepasst wurden. Diese Plattensegmente wurden dabei entlang der Ränder durch Momente und Knotenkräfte (Querkräfte) beansprucht. Von [Monotti 2004] wurde die Entwicklung von verträglichen Spannungsfeldern in einzelnen, durch die Fliessgelenklinien definierte Plattensegmente von angenommenen Fliessgelenklinienmechanismen weiter verfolgt, mit dem Ziel, eine Verträglichkeitslösung der Plastizitätstheorie aufzufinden. In beiden Arbeiten waren Knotenkräfte zur Erfüllung des Gleichgewichtes und zur Beschreibung des Kraftflusses in der Platte erforderlich.

Zweidlers Diskussion bezüglich der Knotenkräfte basierend auf mechanischen Begründungen gibt Klarheit hinsichtlich deren möglichen Auftretens in der vollständigen Lösung von orthotrop und schief bewehrten Stahlbetonplatten [Zweidler 2015]. Er zeigte, dass die „Nodal-Force"-Theorie mit dem oben erwähnten Grundsatz, dass keine Querkraft transversal zu Fliessgelenklinien übertragen werden kann, im Widerspruch steht. Die Knotenkräfte des Typs I, welche in Form einer am Plattenrand oder bei unterschiedlichen Bewehrungswiderständen übertragenen Querkraft auftreten, konnten mittels Verträglichkeit bestätigt werden. Dagegen können Knotenkräfte des Typs II in vollständigen Lösungen nicht existieren. Sowohl bei im Schnittpunkt zusammentreffenden geraden Fliessgelenklinien mit gleichem Vorzeichen (Theorem III nach Johansen) als auch bei unterschiedlichen Vorzeichen (Theorem IV von Johansen widerlegt) kann aus Verträglichkeitsgründen in vollständigen Lösungen kein Querkraftübertrag erfolgen. Bei Vorhandensein von Knotenkräften des Typs II bei einem gegebenen Mechanismus kann gefolgert werden, dass die vorliegende Lösung nicht zur vollständigen Lösung gehört und die daraus berechnete Last einem oberen Grenzwert der Traglast entspricht.

Wenn ein vorgeschlagener Mechanismus nicht zur vollständigen Lösung gehört, so ist es allerdings aus plastizitätstheoretischer Sicht nicht zulässig, die Gleichgewichtsbedingungen an einem Schnittkörper des Mechanismus zu formulieren. Damit verlieren die auf Knotenkräften basierenden Methoden ihre Gültigkeit. Mit der Beweisführung hinsichtlich der Nicht-Existenz von Knotenkräften an Schnittstellen von geraden Fliessgelenklinien treten nun neben den kinematischen Fliessgelenklinien auch die Schnittstellen von Fliessgelenklinien als Lastscheiden (Querkraftnullpunkten) in Erscheinung.

4.6.3 Querkraftfluss in Plattensegmenten

Die nun mit der Arbeit von Zweidler vorliegenden Erkenntnisse, dass gerade Fliessgelenklinien sowie deren Schnittpunkte Lastscheiden darstellen, ermöglichen die Untersuchung einzelner Segmente von Stahlbetonplatten hinsichtlich des Querkraftflusses. Für Schnittpunkte von gekrümmten Fliessgelenklinien (Fliessregime II; z. B. Fächer) wurde gezeigt, dass diese keine Lastscheiden darstellen und daher einen Querkraftübertrag aufweisen.

Fächer

Die Beanspruchung einer isotropen Stahlbetonplatte durch eine Einzelkraft resultiert in einem rotationssymmetrischen Fächermechanismus, Abb. 4.7 (c). Die vollständige Lösung für den isotropen Fächer liefert für $\lambda_i = 1$ die Traglast $Q_k = 4\pi m_u$, welche unabhängig vom Radius ist. [Johansen 1943], [Johansen 1962] ermittelte den oberen Grenzwert der Traglast mithilfe der Fliessgelenklinientheorie. [Nielsen 1964] bestimmte eine untere Grenzwert-lösung der Traglast, welche mit dem oberen Grenzwert nach Johansen in Übereinstimmung lag; somit liegt eine vollständige Lösung vor. Im Fächer wird die Querkraft in radialer Richtung gleichmässig verteilt. Die negativen Fliessgelenklinien weisen aufgrund der Krümmung im Grundriss einen Querkraftübertrag

$$v_r = -2m_u / r \tag{4.40}$$

auf. Dies lässt sich anhand des infinitesimalen Fächerelementes mit einem Öffnungswinkel $d\varphi$ in Zylinderkoordinaten aufzeigen, Abb. 4.7 (e).

Die vollständige Lösung für einen Fächer einer orthotrop bewehrten Stahlbetonplatte wurde von [Zweidler 2015] gefunden. Die verträglichen Spannungszustände für einen Fächermechanismus liegen auf der Schnittellipse der Fliessfigur des Plattenelements (Fliessregime II). Mithilfe der um Fliessgeraden erweiterten Darstellung von Mohrschen Spannungskreisen und unter Berücksichtigung von positiven und negativen Biegewiderstände konnte er einen allgemeinen, verträglichen Spannungszustand finden, woraus die spezielle Lösung

$$m_{r\varphi} = (m_{yu} - m_{xu})\sin\varphi\cos\varphi$$

$$m_{\varphi} = m_{xu}\sin^2\varphi + m_{yu}\cos^2\varphi \tag{4.41}$$

$$m_r = (m_{xu} + m'_{xu})\frac{\sin^2\varphi}{a^*\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\left[\cos^2\varphi - a^*(1+\cos^2\varphi)\right] - m'_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi$$

für einen Fächermechanismus in orthotrop und schief bewehrten Stahlbetonplatten abgeleitet werden konnte, wobei die Grösse $a^* = (m_{yu} + m'_{yu})/(m_{xu} + m_{xu})$ beträgt.

Durch Einsetzen von (4.41) in die Gleichgewichtsbedingung $(4.6)_2$ lässt sich der radial verlaufende Kraftfluss in einem Fächer für eine orthotrope Stahlbetonplatte, Abb. 4.7 (d) mit

$$v_r = v_0(r,\varphi) = -\frac{a^*}{r\left(a^*\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}(m_{xu} + m'_{xu}) \tag{4.42}$$

beschreiben.

Die Traglast beträgt für den voll ausgebildeten Fächer mit $\varphi = 2\pi$:
$Q_k = 2\pi\sqrt{(m_{xu} + m'_{xu})(m_{yu} + m'_{yu})}$.

Trapez- und dreieckförmige Plattensegmente

Zweidler erarbeitete vollständige Lösungen für dreieck- und trapezförmige Plattensegmente (starre Plattenteile des Mechanismus) mit orthotroper oder schiefwinkliger Bewehrung unter gleichförmiger Belastung q. Die Abmessungen der Plattensegmente, welche an der längsten Kante eine gelenkige Lagerung aufweisen, sind in Abb. 4.8 (a, b) dargestellt [Zweidler 2015].

Der statisch zulässige Spannungszustand eines trapezförmigen Plattensegments mit orthogonaler respektive schiefer Bewehrung lässt sich mit

$$m_x = \frac{x\left(2a^3 + l^3\right) - l\left(2a^3 + x^3\right)}{x\left(l-a\right)^2\left(l+2a\right)} m_{xu} \tag{4.43}$$

$$m_y = m_{yu} - \frac{y^2 l\left(x-a\right)^2\left(x+2a\right)}{x^3\left(l-a\right)^2\left(l+2a\right)} m_{xu} \tag{4.44}$$

$$m_{xy} = m_{xyu} - \frac{yl\left(x-a\right)^2\left(x+2a\right)}{x^2\left(l-a\right)^2\left(l+2a\right)} m_{xu} \tag{4.45}$$

beschreiben und entspricht der vollständigen Lösung. In [Meyboom 2002] wurden für trapezförmige und rechteckige Plattensegmente aus den Schubfeldern abgeleitete verallgemeinerte Spannungsfelder vorgestellt. Die von Zweidler hierfür verwendeten Ansatzfunktionen in (4.43)-(4.45) wurden in vereinfachter Form basierend auf den von Meyboom verwendeten Ansatzfunktionen festgelegt, wobei diese Ähnlichkeit zu den Ansatzfunktionen der vollständigen Lösung für das isotrop bewehrte Trapezsegment [Nielsen 1964] aufweist.

Die Traglast beträgt

$$q_u = -\frac{6l}{\left(l-a\right)^2\left(l+2a\right)} m_{xu} \tag{4.46}$$

Die radial verlaufende Hauptquerkraft (maximale Querkraft) und die dazugehörige Hauptrichtung lassen sich mit der Beziehung (4.11) bestimmen. Die polare Darstellung ergibt sich mit

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{x} \tag{4.47}$$

wobei die Querkraftkomponenten

$$v_x = -\frac{1}{2} q_u x + \frac{1}{2} q_u C a^2 \frac{1}{x} \tag{4.48}$$

$$v_y = -\frac{1}{2} q_u y + \frac{1}{2} q_u C a^2 \frac{y}{x^2} \tag{4.49}$$

mit der Konstanten

$$C = \frac{1}{3a^2}\left(l^2 + al + a^2\right) - m_{xu}\frac{a}{l-a} \tag{4.50}$$

betragen.

Die vollständige Lösung für ein dreieckförmiges Segment folgt aus der Lösung für das trapezförmige Segment mit $a \rightarrow 0$. Die sich daraus ergebenden Momentenkomponenten ergeben sich zu

$$m_x = m_{xu} - \frac{1}{6} q_u x^2 \tag{4.51}$$

$$m_y = m_{yu} - \frac{1}{6} q_u y^2 \tag{4.52}$$

$$m_{xy} = m_{xyu} - \frac{1}{6} q_u xy \tag{4.53}$$

und die Traglast beträgt

$$q_u = \frac{6}{l^2} m_{xu} \tag{4.54}$$

Die Querkraftkomponenten betragen

$$v_x = -\frac{1}{2} q_u x \tag{4.55}$$

$$v_y = -\frac{1}{2} q_u y \tag{4.56}$$

Die vollständigen Lösungen für trapez- und dreieckförmige Plattenelemente mit isotroper Bewehrung $m_{ux} = m_{uy} = m_u$ findet man bei [Nielsen 1964]. Die Hauptquerkraft mit radialem Charakter beträgt für ein trapezförmiges Plattensegment mit isotroper Bewehrung:

$$v_0(r, \varphi) = \frac{q_u}{2} \left(r - \frac{a^2}{r \cos^2 \varphi} \right) \tag{4.57}$$

Die Hauptquerkraft für ein dreieckförmiges Plattensegment folgt aus (4.57) mit $a \rightarrow 0$:

$$v_0(r) = \frac{q_u r}{2} \tag{4.58}$$

Die Traglast für ein trapez- respektive dreieckförmiges Segment beträgt $q_u = 6lm_u / \left[(l - a)^2 (l + 2a)\right]$ respektive $q_u = 6m_u/l^2$.

Die Voraussetzung für die obigen Beziehungen ist, dass die negativen Biegewiderstände $m'_{yu} = m'_{xu} \geq m_u$ sind. In den Eckbereichen ist somit eine obere Bewehrung erforderlich. Die negativen Biegewiderstände lassen sich mit dem zu den jeweiligen Plattensegmenten gehörenden Spannungszustand mithilfe der negativen Fliessbedingung Y' bestimmen.

Abb. 4.9 zeigt den Kraftfluss in einem symmetrisch dreieckförmigen Segment OAB, welches aus einer regulär polygonalen Platte mit n Seiten entnommen wurde und eine Beanspruchung durch eine Einzellast Q in der freien Ecke O erfährt. Entlang AB ist die Platte gelenkig gelagert.

Mit dem Momentenansatz $m_\varphi = m_u$ und $m_r = -m_u \tan 2\varphi$ respektive $m_x = 0$, $m_y = m_u(1 - y^2/x^2)$, $m_{xy} = -m_{uy}/x$ lässt sich für ein symmetrisch dreieckförmiges Plattensegment einen statisch zulässigen Spannungszustand bestimmen. Die radial verlaufende Hauptquerkraft beträgt nach Gleichung (4.11)

$$v_0(r,\varphi) = \frac{m_u}{r\cos^2\varphi} = m_u\,\frac{r}{x^2} \tag{4.59}$$

mit den Querkraftkomponenten $v_x = -m_u/x$ und $v_y = -m_u y/x^2$.

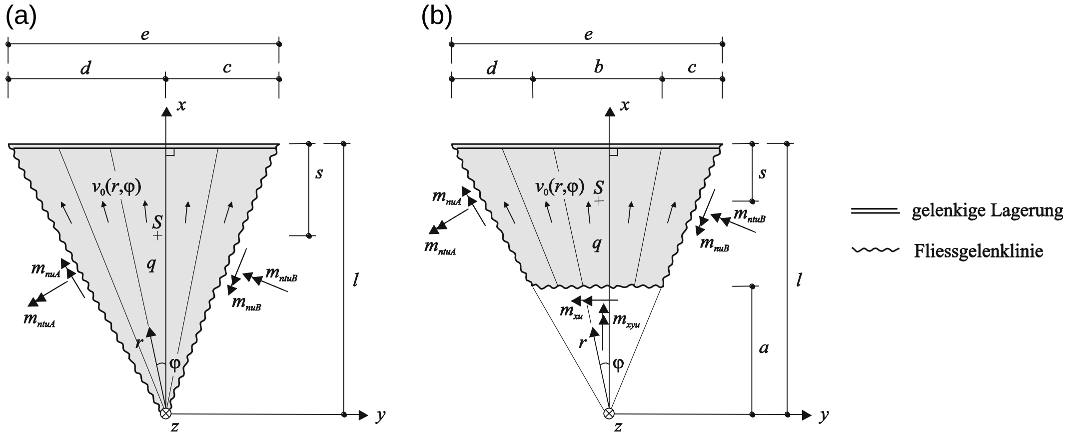


Abb. 4.8 *Radiale Querkraftfelder für gleichmässig belastetes*
(a) dreieckförmiges Plattensegment
(b) trapezförmiges Plattensegment
mit orthotroper oder schiefwinkliger Bewehrung und gelenkiger Lagerung.

Die dazugehörige Richtung der Hauptquerkraft beträgt $\tan\varphi_0 = y/x$. Die Traglast für die regulär, polygonale Platte beträgt $Q_u = 2nm_u\tan(\pi/n)$. Für $n = 4$ erhält man die Traglast $Q_u = 8m_u$ einer Quadratplatte.

Der Spannungszustand mit den statischen Diskontinuitätslinien an den Stellen der Fliessgelenklinien ist mit der betrachteten Mechanismuskonfiguration verträglich. Somit liegt eine vollständige Lösung vor [Marti 2014].

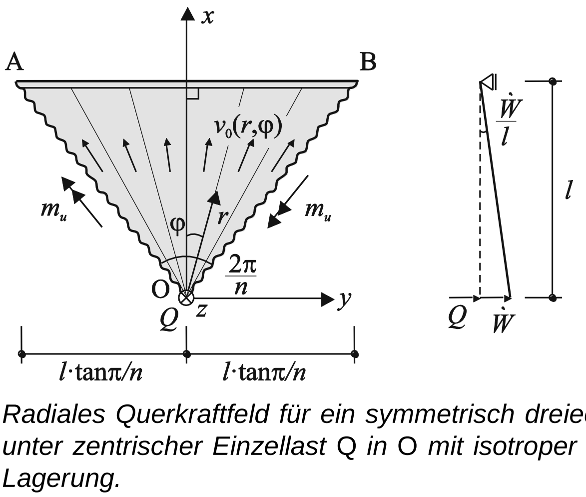


Abb. 4.9 *Radiales Querkraftfeld für ein symmetrisch dreieckförmiges Plattensegment unter zentrischer Einzellast* Q *in* O *mit isotroper Bewehrung und gelenkiger Lagerung.*

4.7 Anwendungsbeispiele

Plattenecke unter Einzellast

Der Mechanismus einer Platte mit isotroper Bewehrung ($m_u = m'_u$) unter einer Einzellast in der Ecke in Abb. 4.10 (a) führt zum oberen Grenzwert der Traglast [Johansen 1943], [Johansen 1962]:

$$Q_k = 2m_u(1 + \alpha - \pi/2) \tag{4.60}$$

für $\alpha \geq \pi/2$ und

$$Q_k = 2m_u \tan\alpha/2 \tag{4.61}$$

für $\alpha < \pi/2$. Zu den abgebildeten Mechanismen existieren verträgliche Spannungszustände [Nielsen 1964], daher liegen die vollständigen Lösungen ($Q_u = Q_k$) vor.

Die Dissipationsleistung in den Fliessgelenklinien einer langen Kragplatte mit Öffnungswinkel $\alpha = \pi$ und Breite b unter Einzellast am Rand beträgt

$$\dot{D} = \dot{W}\left(2m_u\varphi + \lambda_i m_u 2\varphi + \lambda_i 2m_u b\cot\varphi\frac{1}{b}\right) \tag{4.62}$$

Die Leistung der Einzellast beträgt

$$L_a = \dot{W}Q \tag{4.63}$$

Durch das Gleichsetzen der Dissipationsleistung mit der Leistung der Einzellast und der Minimierung von Q_k nach dem Winkel φ, $dQ_k/d\varphi = 0$, erhält man den massgebenden Fliessmechanismus mit $\sin\varphi = \sqrt{\lambda_i/(1 + \lambda_i)}$.

Für den eingespannten Plattenstreifen unter Einzellast mit oberer Bewehrung, $\lambda_i = 1$, beträgt der obere Grenzwert der Traglast:

$$Q_k = m_u(2 + \pi) \tag{4.64}$$

mit dem Winkel $\varphi = \pi/4$. Der obere Grenzwert der Traglast in Gleichung (4.64) entspricht der vollständigen Lösung [Wood 1961].

Kragplatte unter Einzellast am Rand

Abb. 4.10 (b) zeigt eine Kragplatte unter Einzellast Q am freien Rand in der Ecke O. Dieses Beispiel illustriert, dass die Kenntnis der statischen Lösung der Traglast, d. h. die Untersuchung statisch zulässiger Spannungszustände, welche im Gleichgewicht mit den aufgebrachten Kräften sind ohne die Fliessbedingung zu überschreiten, erforderlich ist. Die aus dem vorherigen Beispiel zu erwartende Traglast $Q_u = 2m_u$ für $\alpha = \pi/2$ ist für eine lange Kragplatte nicht korrekt, da dafür kein statisch zulässiger Spannungszustand gefunden werden kann.

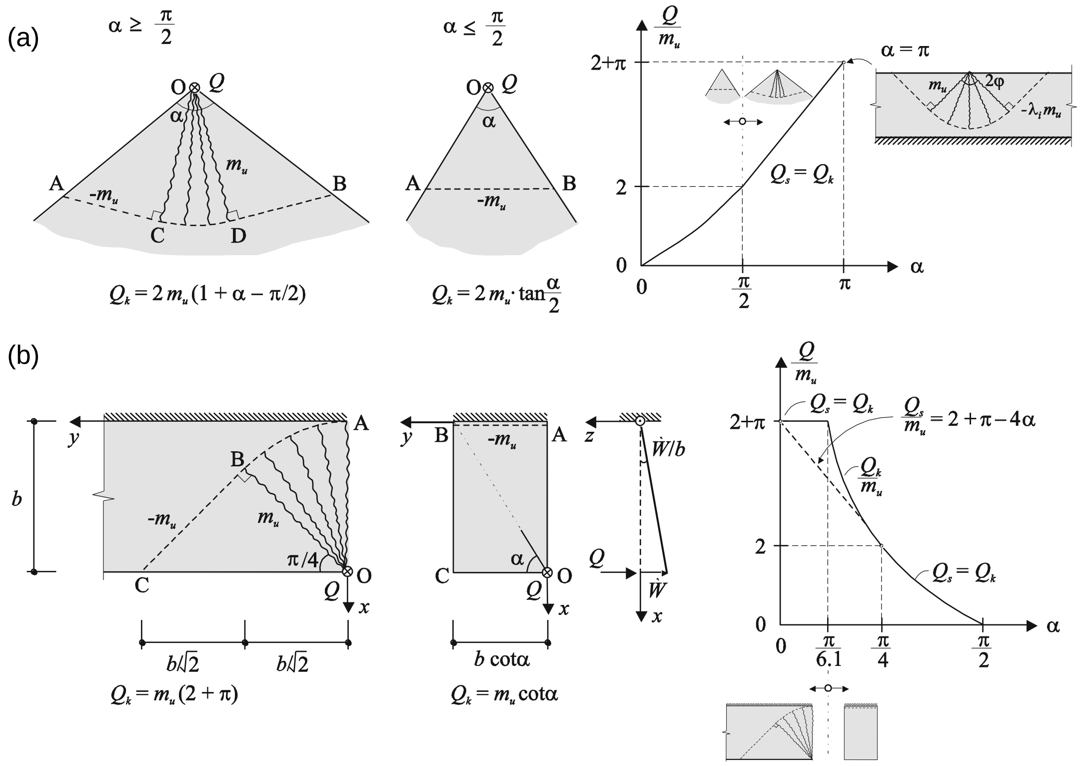


Abb. 4.10 *Platten mit isotroper Bewehrung: Mechanismuskonfigurationen und Ermittlung der Traglast für*
(a) Plattenecke unter Einzellast, $m_u = m_u'$;
(b) Kragplatte unter Einzellast am Rand.

Der obere Grenzwert der Traglast

$$Q_k = m_u(2+\pi) \tag{4.65}$$

einer unendlich langen Platte und der obere Grenzwert der Traglast

$$Q_k = m_u \cot\alpha \tag{4.66}$$

einer kurzen Platte entsprechen den vollständigen Lösungen, da zu den Fliessgelenklinienmechanismen verträgliche Momentenfelder existieren ([Nielsen 1964], [Marti 2003]). Ein steifer Randträger (oder versteckter Unterzug) wirkt bei der Aufnahme von Einzellasten günstig mit.

Plattenstreifen unter Einzellast in Plattenmitte

Die Dissipationsleistung in den Fliessgelenklinien des in Abb. 4.11, i) dargestellten Plattenstreifens mit isotroper Bewehrung m_u unter mittiger Einzellast Q mit einem Abstand x vom freien Plattenrand beträgt

$$\dot{D} = \dot{W}\left(m_u x\frac{4}{b} + 2m_u\varphi + \lambda_i m_u 2\varphi + 2m_u r\cos\varphi\frac{2}{b} + \lambda_e 2m_u\frac{2}{b}x + \lambda_e 2m_u\frac{2}{b}r\cos\varphi\right) \tag{4.67}$$

Durch das Gleichsetzen der Dissipationsleistung mit der Leistung der Einzellast nach (4.63) und der Minimierung von Q_k nach dem Winkel φ, $dQ_k/d\varphi = 0$, erhält man den massgebenden Fliessmechanismus mit $\sin\varphi = \sqrt{(1 + \lambda_e)/(1 + \lambda_i)}$.

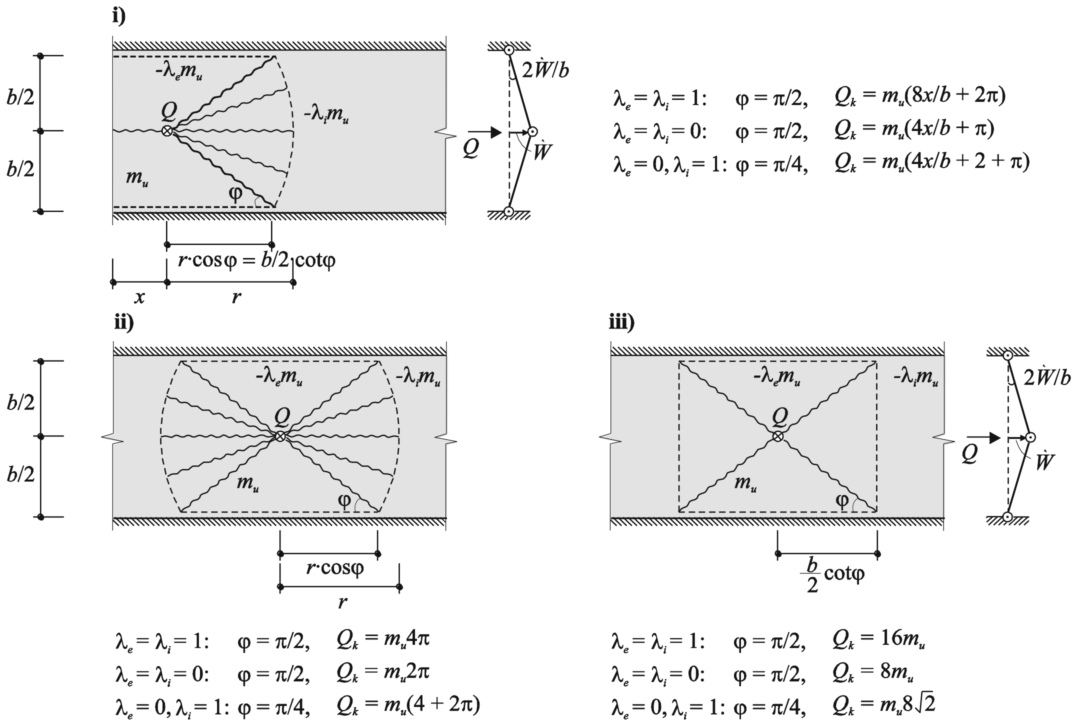


Abb. 4.11 *Plattenstreifen mit isotroper Bewehrung unter mittiger Einzellast: Mechanismuskonfigurationen und Ermittlung von oberen Grenzwerten der Traglast.*

Für den eingespannten Plattenstreifen unter Einzellast mit oberer Bewehrung, $\lambda_i = \lambda_e = 1$, beträgt der obere Grenzwert der Traglast

$$Q_k = m_u\left(\frac{8x}{b} + 2\pi\right) \tag{4.68}$$

mit dem Winkel $\varphi = \pi/2$.

Bei einem gelenkig gelagerten Plattenstreifen unter Einzellast mit oberer Bewehrung, $\lambda_i = 1$ und $\lambda_e = 0$, beträgt $\varphi = \pi/4$ und der obere Grenzwert der Traglast nimmt den Wert

$$Q_k = m_u\left(\frac{4x}{b} + 2 + \pi\right) \tag{4.69}$$

an.

Für einen langen Plattenstreifen mit isotroper Bewehrung m_u unter mittiger Einzellast wird der „Fächermechanismus" in Abb. 4.11, ii) gegenüber dem „Pyramidenmechanismus", iii) massgebend. Die Dissipationsleistung für den „Fächermechanismus" beträgt

$$\dot{D} = \dot{W}\left(4m_u\varphi + \lambda_i m_u 4\varphi + \lambda_e 4m_u r\cos\varphi\frac{2}{b} + 4m_u\frac{2}{b}r\cos\varphi\right) \tag{4.70}$$

Durch das Gleichsetzen der Dissipationsleistung (4.70) mit der Leistung der Einzellast nach Gleichung (4.63) und der Minimierung von Q_k nach dem Winkel φ, $dQ_k/d\varphi = 0$, erhält man den massgebenden Fliessmechanismus mit $\sin\varphi = \sqrt{(1 + \lambda_e)/(1 + \lambda_i)}$. Für den eingespannten Plattenstreifen unter Einzellast mit oberer Bewehrung, $\lambda_i = \lambda_e = 1$, beträgt der obere Grenzwert der Traglast

$$Q_k = m_u 4\pi \tag{4.71}$$

mit dem Winkel $\varphi = \pi/2$. Bei einem gelenkig gelagerten Plattenstreifen unter Einzellast mit oberer Bewehrung, $\lambda_i = 1$ und $\lambda_e = 0$, beträgt $\varphi = \pi/4$ und der obere Grenzwert der Traglast nimmt den Wert

$$Q_k = m_u (4 + 2\pi) \tag{4.72}$$

an.

Die Beispiele zeigen, dass ein gewählter Plattenmechanismus immer auch hinsichtlich seiner statischen Verträglichkeit untersucht werden sollte.

4.8 Diskussion

Das komplexe Tragverhalten von Stahlbetonplatten, aufgrund der statischen Unbestimmtheit und des nichtlinearen Verhaltens während dem Reissen des Betons und des Fliessens der Bewehrung, erfordert dementsprechend aufwendige Berechnungsverfahren, um die damit verbundenen, verschiedenen Spannungszustände während der sukzessiven Laststeigerung zu bestimmen.

Eine zuverlässige Abschätzung der Traglast von Stahlbetonplatten lässt sich demgegenüber mithilfe der Methoden der Plastizitätstheorie wesentlich leichter vornehmen.

Die Annahme von Fliessgelenklinien in Stahlbetonplatten, welche den zum oberen Grenzwert der Traglast gehörenden Mechanismus bilden, entspricht einer stärkeren kinematischen Restriktion als die Theorie dünner, plastischer Platten. Anstelle der Formulierung von allgemein gültigen Fliessbedingungen basierend auf den sechs verallgemeinerten Verzerrungen werden kinematische Freiheitsgrade auf diejenigen von Fliessgelenklinien beschränkt. Daraus resultiert ein oberer Grenzwert der (quasi-)statischen Traglast der auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhenden Tragwiderstände.

In der Regel gelingt es nicht, Fliessbedingungen in der allgemeinen Form $Y(n_i,m_i) = 0$ anzugeben, so dass man weitere Vereinfachungen vornehmen muss. Der Biegewiderstand m_{nu} an einer Fliessgelenklinie in t-Richtung wird im Allgemeinen ohne Berücksichtigung der Membraneffekte bestimmt, d. h., es wird näherungsweise angenommen, dass die Extension der Plattenmittelebene nicht behindert ist und somit $n_n = 0$ an der Fliessgelenklinie gilt. Dies führt in der Regel zu Membranschubkräften n_{tn} und Drillmomenten m_{tn}. Wie die Querkräfte sind auch diese Schnittgrössen keine verallgemeinerten Spannungen, so dass die ihnen zugeordneten Verzerrungsgeschwindigkeiten verschwinden und diese daher nicht zur Dissipationsleistung beitragen. Eine solche Beschränkung der kinematischen Freiheitsgrade auf die vorhandenen Freiheitsgrade einer Fliessgelenklinie mit reiner Biege- und Drillmomentenbeanspruchungen führt zu der Normalmomenten-Fliessbedingung. Bei bezüglich der Bewehrungsrichtungen grossen Bewehrungsgehalten sowie grossen Drillmomentenbeanspruchungen werden diese Widerstände jedoch teilweise beträchtlich überschätzt. Die Überschätzung des Tragwiderstandes wird demgegenüber allerdings häufig durch die günstige Wirkung der vernachlässigten Membrankräfte kompensiert.

Die Anwendbarkeit der Fliessgelenklinientheorie auf Stahlbetonplatten ist bei konzentrierten Krafteinleitungen und bei Stützungen von Platten mit Einschränkungen verbunden, welche eine zusätzliche Untersuchung und Beurteilung benötigen.

Die Fliessgelenklinientheorie war bis anhin für die Bemessung nicht geeignet, da es schwierig respektive nicht möglich war, das Bewehrungslayout in Bezug auf den tatsächlichen Spannungszustand zu variieren. Mit der Arbeit „Kraftfluss in Stahlbetonplatten“ von

[Zweidler 2015] wurde eine Bemessungsmethode für orthogonal und schief bewehrte Stahlbetonplatten vorgestellt, welche die Steuerung des Kraftflusses im Traglastzustand erlaubt und ein direkter Bezug zwischen Lastabtragung, Anordnung und Menge der Bewehrung herstellt. Mit dem Auffinden des zur Traglast gehörenden, statisch zulässigen Spannungszustandes können mithilfe der Normalmomenten-Fliessbedingung nach der Beziehung (4.25) vollständige Lösungen für Plattensegmente entwickelt werden. Die vollständigen Lösungen der Plattensegmente werden für die Plastizitätskontrolle verwendet. Die Traglast muss demnach dem Minimum des kinematischen (oberen) Grenzwertes nach der Fliessgelenklinientheorie entsprechen. Nach dem Verträglichkeitssatz der Traglastverfahren liegt in diesem Fall eine vollständige Plattenlösung vor.

5 Dynamische Modellbildung

5.1 Einleitung

Im vorliegenden Kapitel: Dynamische Modellbildung werden einführend Schwingungen von Platten in Kapitel 5.2 thematisiert. Die Grundgleichungen des Stosses werden in Kapitel 5.3 erläutert. Ausgehend von einem Stoss mit einer Dauer $t \rightarrow 0$ wird die Dirac-Funktion vorgestellt. Der Dirac-Stoss wird in der Literatur auch als Impulsbelastung bezeichnet. Des Weiteren werden die allgemeinen Beziehungen für den „Kraftstoss“ (zeitabhängige Stossfunktionen) und den „Aufprallstoss“ formuliert.

Die in der Literatur zahlreich diskutierten Masse-Feder-Systeme mit einem Freiheitsgrad werden in Kapitel 5.4 erläutert. Die Einteilung in linear elastisch-ideal plastisches und starr-ideal plastisches Materialverhalten lässt eine systematische Diskussion der wesentlichen Grundkonzepte zu und zeigt den Gültigkeitsbereich einer starr-ideal plastischen Idealisierung auf. Der Kraftstoss wird dabei in Form einer auf ein (vorerst) allgemeines System aufgebrachten Last-Zeit-Funktion berücksichtigt. Dem System werden eine Masse sowie eine Feder zur Idealisierung des Materialverhaltens zugeordnet.

Das erhöhte Dissipationsvermögen duktiler Tragwerke unter stossartiger Beanspruchung führt zu einem günstigen Tragverhalten. Diese baupraktisch wichtige Gegebenheit ist für die in Kapitel 5.5 dargelegten Grundlagen der dynamischen, starr-ideal plastischen Modellbildung sowie den weiterführenden Überlegungen in Kapitel 6 von zentraler Bedeutung. Des Weiteren wird die praktische Bedeutung von Grenzbetrachtungen hinsichtlich der Art der Einwirkung – „Impulsbelastung“ und „quasi-statische Belastung“ – aufgezeigt. Die Grenzbetrachtung eines Stosses als Impulsbelastung, d. h. einer kurzzeitig wirkenden dynamischen Belastung, lässt die für diese Arbeit zentrale Modellvereinfachung anhand des Impulserhaltungssatzes (Kapitel 3.5.2) erahnen.

Die mit stossartig belasteten Tragelementen wie Balken oder Platten einhergehende Komplexität und die damit verbundene Schwierigkeit, (vollständige) elastisch-plastische Lösungen anhand von analytischen oder numerischen Methoden zu finden, führte zur Entwicklung vereinfachter Methoden zur Analyse des dynamischen Tragwerksverhaltens. Näherungslösungen spielen aus praktischer Sichtweise eine wichtige Rolle. Oft werden elastische Effekte ganz vernachlässigt, weil in vielen Fällen die Tragwerke infolge grosser dynamischen Lasten beansprucht sind und die elastischen Energien gegenüber den plastischen Energien vernachlässigt werden können. Diese Vereinfachungen führten zu starr-plastischen Modellen, deren Anwendung in der Vergangenheit für zahlreiche Anwendungsbereiche untersucht wurde. Oft wurden auch Effekte grosser Durchbiegungen vernachlässigt, womit eine weitere Vereinfachung erzielt werden konnte. Die Annahme der starr-plastischen Theorie ist jedoch auf einen gewissen Bereich begrenzt anwendbar. Einerseits kann die Theorie nur angewendet werden, wenn die elastischen Verformungen vernachlässigt werden dürfen, d. h., wenn die äussere Stossenergie um ein Vielfaches grösser ist als die totale elastische Verzerrungsenergie. Auf der anderen Seite müssen die Durchbiegungen im Vergleich zur Dicke des Bauteils klein sein, damit Effekte aus Geometrieänderungen nicht berücksichtigt werden müssen. Beispielsweise wurde bei Tragelementen (Balken, Platten) aus metallischen Baustoffen experimentell beobachtet, dass die Methoden für grosse Durchbiegungen erweitert werden müssen, um auch Membranzustände zu berücksichtigen ([Parkes 1955], [Bodner & Symonds 1962], [Jones 1971], [Kaliszky 1973] etc.). Und zudem mussten bei gewissen Metallen auch die erhöhten Dehngeschwindigkeiten berücksichtigt werden. Effekte infolge grosser Dehngeschwindigkeiten haben einen verfestigenden Effekt. Daher erfordern starr-plastische Näherungsmethoden in gewissen Fällen eine Erweiterung respektive Berücksichtigung der Dehnrateneffekte ([Martin 1967], [Lee & Martin 1970], [Symonds 1973], [Kaliszky 1973] etc.). Theoretische Lösungen für dynamische, starr-plastische Modelle wurden bis anhin vor allem in Hinsicht auf das Tragverhalten von Metallstrukturen entwickelt und mit zahlreichen Versuchen an Stahlträgern und -platten verifiziert.

Die „Tragwerksantwort" auf eine Stossbelastung ist abhängig von der Stossart, dem Tragwerkswiderstand (Tragvermögen), der Lagerung des Tragwerkes und, da Beschleunigungen involviert sind, der Masse des Tragwerks.

Verschiedene Körper aus unterschiedlichen Materialien verhalten sich unter gegebenen Kräften unterschiedlich. Daher müssen verschiedene Verfahren respektive Methoden je nach Problemstellung verwendet werden. Stahlbeton verhält sich unter kleinen Kräften praktisch starr; mit zunehmender Belastung zeigt er elastisches Materialverhalten, zuerst im ungerissenen, dann im gerissenen Bereich. Und schliesslich bei grossen aufgebrachten Kräften zeigt er in den sogenannten plastischen Gelenkbereichen respektive -zonen ein plastisches Verhalten und in den restlichen Bereichen wiederum annähernd ein starres Verhalten (Starrkörperbewegungen). Je nach Problemstellung idealisiert man in die eine oder andere Richtung.

5.2 Schwingungen von Platten

Die dynamische Differentialgleichung der Eigenschwingungen (freie Transversalschwingungen) von Platten mit kleinen Durchbiegungen lässt sich mithilfe der Differentialgleichung nach der Beziehung (4.14) mit q = 0 bestimmen:

$$\Delta\Delta w = -\frac{\rho h \ddot{w}}{D} \tag{5.1}$$

wobei $\rho h \ddot{w}$ die Trägheitskräfte und $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ die Plattensteifigkeit bezeichnen. Die dämpfungsfreien Eigenschwingungen $w(x,y,t)$ lassen sich als Funktion einer Ortsfunktion $F(x,y)$ und einer (periodischen) sinusodialen Funktion $\sin\omega t$ in der Form

$$w(x,y,t) = F(x,y) \cdot \sin\omega t \tag{5.2}$$

darstellen.

Die Differentialgleichung für die Ortsfunktion $F(x,y)$ ergibt sich, wenn der Ansatz nach (5.2) in die Beziehung (5.1) eingesetzt wird:

$$\Delta\Delta F - \omega^2 \frac{\rho h}{D} F = 0 \tag{5.3}$$

dabei bezeichnet ω die Eigenkreisfrequenzen.

Analytische Lösungen sind für rechteckige und kreisförmige Platten vorhanden, beispielsweise lassen sich für eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Seitenlängen a und b mit dem Ansatz

$$F(x,y) = F_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y, \quad \text{mit} \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

durch Einsetzen in die Differentialgleichung nach (5.3) die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^2 D}{\rho h}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)^2 \tag{5.5}$$

bestimmen. Für die erste (und tiefste) Eigenkreisfrequenz erhält man

$$\omega_1 = \omega_{11} = \frac{\pi^2}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}} \cdot \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) \tag{5.6}$$

Ein Vergleich der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte mit einem entsprechenden Balken zeigt, dass die Platte aufgrund der grösseren Steifigkeit schneller als der entsprechende Balken schwingt, d. h. die erste Eigenkreisfrequenz ist grösser.

Für grösser werdende Halbwellenzahlen *m*, *n* (höhere Eigenschwingungsformen) wird der Einfluss der Rotationsträgheit grösser, was zu einer grösseren Fehleranfälligkeit der analytischen Lösung führen kann.

Die Lage (x,y) der Anregung und allfällige Imperfektionen beeinflussen die sich einstellenden Eigenformen.

Die analytische Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen von schwingenden Platten kann bereits bei einfachen Plattenkonfigurationen zu mathematischen Schwierigkeiten führen.

Eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 lässt sich mit der Energiemethode nach Rayleigh, die auf dem Energiesatz nach der Beziehung (3.33) basiert, ermitteln. Der Energiesatz liefert:

$$T + U + V = \text{konstant} = T_{max} = W_{max} \tag{5.7}$$

wobei W_{max} das Maximum der Formänderungsarbeit W_s bezeichnet. Die Dämpfung wird wiederum ausser Acht gelassen. Die kinetische Energie der Platte mit Volumen V und Dichte ρ lässt sich mit Beziehung (5.2) wie folgt schreiben:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{w} \mathrm{d}V = \frac{\omega^2 \cos^2 \omega t}{2} \int_V \rho F^2(x,y)\, \mathrm{d}V \tag{5.8}$$

wobei das Volumenelement dV = h dxdy ist. Die maximale kinetische Energie T_{max} und die Formänderungsarbeit W_s betragen in kartesischen Koordinaten:

$$T_{max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_x \int_y F^2(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.9}$$

Und

$$W_s = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} z^2 \tag{5.10}$$

wobei das Volumenelement dV = 1·dz beträgt und $w(x,y,t)$ wiederum nach der Beziehung (5.2) berechnet wird.

Aus dem Energiesatz nach der Beziehung (5.7) erhält man durch Einsetzen der kinetischen Energie nach (5.9) durch Umformung die erste Eigenkreisfrequenz

$$\omega_1^2 = \frac{2W_{max}}{\rho h \int\limits_x \int\limits_y F^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{5.11}$$

In Abb. 5.1 ist eine schematische Übersicht der beiden Dissipationsarten – Dämpfung und Duktilität – dargestellt. Eine Schwingungsbeanpruchung im Gebrauchszustand erfordert eine elastische Auslegung des Tragwerkes. Die wirksame Dissipation in diesem Fall wird als Dämpfung bezeichnet. Bei Schwingungen unter (kurzzeitiger) Beanspruchung im Traglastzustand können grosse plastische Verformungen auftreten. In diesem Fall macht eine Analyse im elastischen Zustand keinen Sinn. Voraussetzung dafür ist eine genügende Duktilität, d. h. plastische Verformungsfähigkeit.

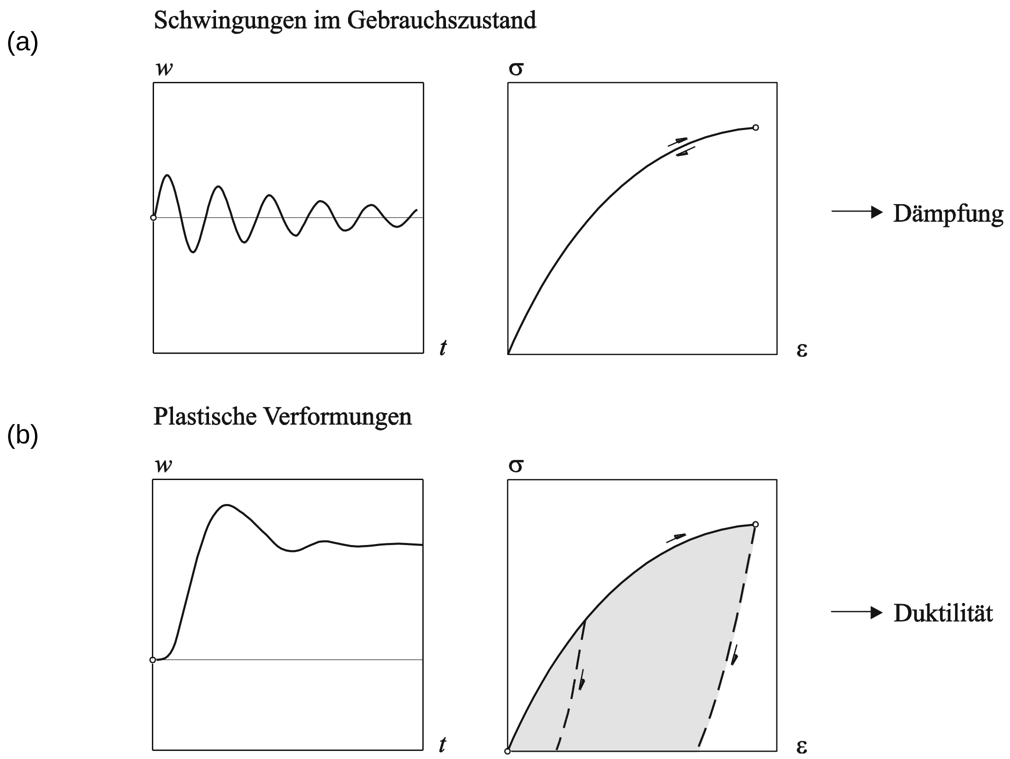


Abb. 5.1 *Schematische Übersicht der Dissipation:*
(a) Dämpfung;
(b) Duktilität.

5.3 Grundgleichungen des Stosses

Der kurze Stoss lässt sich mathematisch mit der sogenannten Dirac-Funktion

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

beschreiben, wobei das Integral unter der Kurve der Funktion den Betrag von eins aufweist:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{5.13}$$

Die Dirac-Funktion $\delta(t)$ ist in der Literatur auch als „Impulsfunktion“ oder „Stossfunktion“ bekannt. Sie ist im strengen Sinne keine Funktion, sondern eine Distribution, d. h. ihr Wert ist nur definiert, wenn sie unter einem Integralzeichen vorkommt. Gemäss (5.12) verschwindet der Funktionswert für alle t mit Ausnahme von $t = 0$, dort strebt er gegen unendlich.

Die Sprungfunktion $H(t)$, auch Heaviside-Funktion genannt, erhält man durch einfache zeitliche Integration der Dirac-Funktion $\delta(t)$:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

Die Sprungfunktion ist bei $t = 0$ aufgrund der Diskontinuität nicht definiert. Umgekehrt lässt sich die Dirac-Funktion $\delta(t)$ aus der einfachen (zeitlichen) Ableitung der Sprungfunktion $H(t)$ bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(t) = \delta(t) \tag{5.15}$$

Die zeitliche Integration der Sprungfunktion führt auf die Rampenfunktion

$$\int_{-\infty}^{t} H(\tau)\, d\tau = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

Die Rampenfunktion und ihre einfache und zweifache zeitliche Ableitung sind in Abb. 5.2 (a-c) dargestellt.

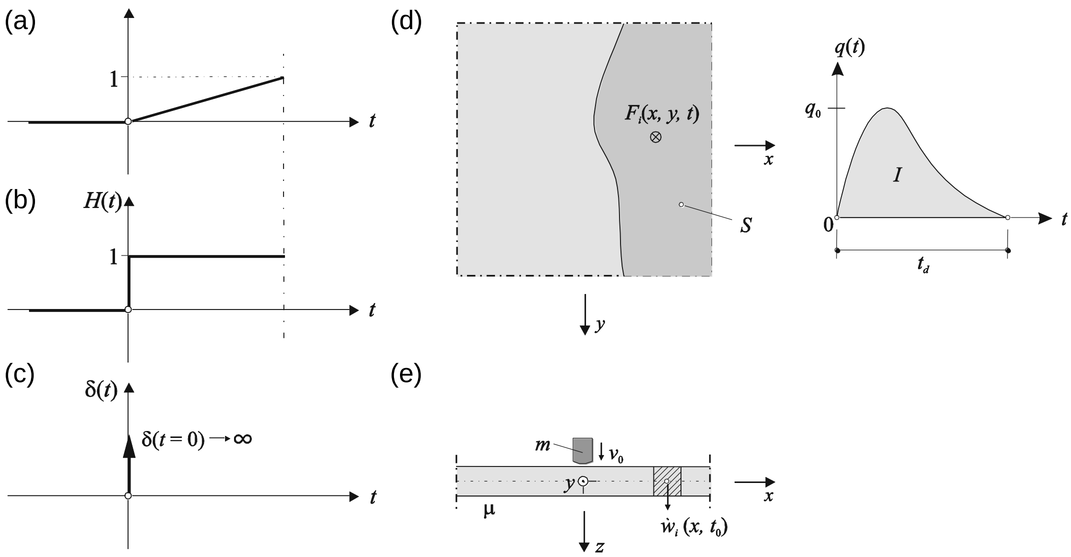


Abb. 5.2 *Darstellung von*
(a) Rampenfunktion;
(b) Sprungfunktion: einfache (zeitliche) Ableitung der Rampenfunktion;
(c) Dirac-Funktion: zweifache (zeitliche) Ableitung der Rampenfunktion;
(d) Kraftstoss;
(e) Aufprallstoss.

Eine allgemeine dynamische Einwirkung, ein sogenannter Kraftstoss auf eine Platte mit kartesischen Koordinatenachsen x und y lässt sich wie folgt formulieren:

$$F_i(x,y,t) = q(t) \cdot F_i^0(x,y) \tag{5.17}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, n$, wobei $F_i^0(x,y)$ die örtliche Verteilungsfunktion und $q(t)$ die zeitabhängige Funktion des Kraftstosses bezeichnen.

Eine rechteckige Stossfunktion $q(t)$ mit einem Maximalwert von q_0 und einer Stossdauer t_d ist wie folgt definiert:

$$q(t) = \begin{cases} q_0, & t \leq t_d \\ 0, & t > t_d \end{cases} \tag{5.18}$$

Lässt man q_0 gegen unendlich, $q_0 \to \infty$, und t_d gegen null, $t_d \to 0$, streben, dann vereinfacht sich der Kraftstoss zu einer Impulsbelastung, welche durch den endlichen Impuls

$$I = q_0 t_d \tag{5.19}$$

charakterisiert wird.

Für eine Impulsbelastung lässt sich mit dem Impulserhaltungssatz die Beziehung

$$\int_A \int_{t=0}^{t_d} F_i(x,y,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}A = I \int_A F_i^0(x,y) \mathrm{d}A = \int_A \mu(x,y) v(x,y) \mathrm{d}A \tag{5.20}$$

schreiben, wobei $\mu(x,y)$ die Masse der Platte pro Flächeneinheit, $v(x,y) = v_0(t = 0)$ die Anfangsgeschwindigkeit der Platte und A die Fläche der Platte bezeichnen.

Die Definition einer dynamischen Einwirkung gemäss der Beziehung (5.17) ist beispielsweise typisch bei Einwirkungen infolge Explosion. Bei einem Aufprallstoss eines Körpers mit der Masse m und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf eine Platte mit der Masse μ pro Flächeneinheit lässt sich wiederum der Impulserhaltungsatz gemäss

$$m \cdot \dot{W} + \int_A \mu \dot{w} \mathrm{d}A = I_0 = m \cdot v_0 \tag{5.21}$$

formulieren, wobei $\dot{W}$ die „gemeinsame" Anfangsgeschwindigkeit des Aufprallkörpers und der Platte am Aufprallort nach dem Stoss ist. Die Voraussetzung für die Beziehung (5.21) ist, dass sich die aufprallende Masse und die Platte nach dem Stoss gemeinsam bewegen.

5.4 Masse-Feder-Systeme mit einem Freiheitsgrad

Zahlreiche Autoren modellieren das komplexe Tragverhalten von Tragwerken unter dynamischen Einwirkungen mit äquivalenten Masse-Feder-Systemen mit einem oder mehreren Freiheitsgraden. Diese Modellbildung hat Gültigkeit, falls tatsächlich eine Modalform (elastisch und plastisch) existiert, welche gegenüber anderen Modalformen überwiegt. Eine umfangreiche Darstellung von Masse-Feder-Systemen mit verschiedenen Systemeigenschaften findet sich in [Petersen 2000].

Das Verhalten eines einmassigen Modells mit einem Freiheitsgrad unter einem Kraftstoss $F(t)$ wird im vorliegenden Kapitel näher untersucht, wobei einerseits linear elastisch-ideal plastisches (Kapitel 5.4.1) und andererseits starr-plastisches Materialverhalten (Kapitel 5.4.2) berücksichtigt wird. Als Kraftstoss werden nachfolgend Last-Zeitfunktionen mit unterschiedlichen Formen (rechteckig, halb-sinusförmig, dreieckig mit und ohne Lastanstieg) und beliebiger, endlicher Stossdauer betrachtet. Es werden der Einfluss der Form der Stossfunktion und der dazugehörenden Stossdauer näher untersucht. Zudem wird der Gültigkeitsbereich von Lösungen aus Grenzbetrachtungen für die Einwirkung – Impulsbelastung und quasi-statische Belastung – für verschiedene Formen der Stossfunktion aufgezeigt.

Im strengen Sinn entspricht eine Impulsbelastung einer Belastung, die mit einer Dirac-Funktion (Kapitel 5.3) beschrieben werden kann, d. h. die Belastung wird augenblicklich in Form einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf ein Tragwerk aufgebracht.

Die Differentialgleichung eines linear elastischen Masse-Feder-Dämpfer-Systems mit einem Freiheitsgrad lautet für den Dirac-Stoss:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+kw=\delta(t) \tag{5.22}$$

wobei $\delta(t)$ die Einheit s^{-1} besitzt. Die zeitliche Integration von Gleichung (5.22) für den Zeitbereich kurz vor und kurz nach $t = 0$, bezeichnet mit $t = 0-$ und $t = 0+$, liefert die Beziehung

$$\int_{t=0-}^{t=0+} m\ddot{w}(t)\mathrm{d}t = m\dot{w}(t=0+)=1 \tag{5.23}$$

wobei die Anfangsbedingungen $w(t = 0-) = \dot{w}(t = 0-) = 0$ für die Zeit vor $t = 0$ und $w(t = 0+) = 0$ für die Zeit nach $t = 0$ gelten.

Mit der Beziehung (5.23) liegt eine neue Anfangsbedingung in Form der Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{w}(t=0+)=v_0=1/m \tag{5.24}$$

vor. Der Dirac-Stoss überträgt dem System somit eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der Einheit $1/\mathrm{kg} = \mathrm{mN}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

In diesem Kapitel wird eine Stossfunktion respektive Impulsfunktion in einer etwas erweiterten Definition betrachtet, nämlich als eine Belastung mit einer genügend kurzen Stossdauer, so dass die Tragwerksantwort eines Masse-Feder-Systems näherungsweise nicht von der Form und dem Maximalwert der Stossfunktion abhängt, sondern nur von dessen Impuls (Fläche unter Kurve). Die gleiche Beschreibung trifft auch auf den Dirac-Stoss zu, bei dem das Integral und nicht der Wert bei $t = 0$ gegeben ist.

Des Weiteren wird die globale Verschiebeduktilität, auch Verformungsvermögen genannt, als Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verformungen verwendet.

Einführend wird der plastische Aufprallstoss (vergleiche Kapitel 3.5.4) anhand eines linear elastischen (ungedämpften) Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad diskutiert, Abb. 5.3. Ein starrer Körper mit einer Masse m_1 trifft stossartig auf ein elastisch reagierendes System mit einer Masse m_2. Das System ist somit so ausgelegt, dass es dem Aufprall ohne Schaden widersteht, d. h., es bleibt im elastischen Bereich. Allfällige lokale plastische Verformungen an der Aufprallstelle sowie am aufprallenden Körper werden akzeptiert. Der Stoss selbst wird als idealplastisch angenommen, somit vereinen sich die beiden Körper mit den Massen m_1, m_2. Die Kompressionsphase sei derart kurz, dass innerhalb dieser Phase noch keine Verschiebungen im System auftreten. Die Feder weist eine Federkonstante k auf; deren Masse wird vernachlässigt. Die Masse des Systems (Körper 2) verursacht eine (statische) Verschiebung $y_{stat,m2} = m_2 g/k = G_2/k$, welche als Ruhezustand des Systems betrachtet wird, wobei G_2 das Gewicht des Körpers 2 bezeichnet. Gegenüber dieser „Anfangsverschiebung" $y_{stat,m2}$ der Masse m_2 hat die aufprallende Masse m_1 eine Entfernung H, die Fallhöhe. Die Energieerhaltung während des freien Falls liefert die Geschwindigkeit der Masse m_1 im Augenblick des Aufpralls $v_{1a} = \sqrt{2gH}$. Mit dem Impulserhaltungssatz erhält man zum Zeitpunkt am Ende der Kompressionsphase die gemeinsame Geschwindigkeit $\dot{w} = m_1 v_{1a}/m$, wobei $m = m_1 + m_2$ die vereinigten Massen bezeichnen. Diese Geschwindigkeit $\dot{w}$ wird sprungartig erreicht und ist mit einer gewissen Verschiebung von m_2 verbunden. Diese Verschiebung wird jedoch als sehr klein betrachtet und daher vernachlässigt. Die beiden vereinten Massen weisen somit eine statische Verschiebung von $y_{stat,m} = G/k = (m_1 + m_2)g/k = y_{stat,m1} + y_{stat,m2}$ auf. Nach Beendigung der Kompressionsphase, d. h. am Ende des Stosses, fängt das System an sich zu bewegen, wobei die Schwingungskoordinate mit $y = y(t)$ bezeichnet wird. Dieser Zeitpunkt am Ende der Kompressionsphase wird als Beginn der Schwingung $t = 0$ betrachtet. Die kinetische Energie beträgt dann $T = 0.5m\dot{w}^2$. Anschliessend schwingt das System um die statische Gleichgewichtslage $y_{stat,m}$ des gesamten Systems.

Die Dämpfung wirkt sich auf die Stossreaktion wegen ihrer geringen Grösse und der kurzen Stosszeit praktisch nicht aus. Der Dämpfungsgrad erreicht bei elastisch schwingenden Tragwerken Werte bis ca. $\zeta = 0.02$ [Petersen 2000]. Es gibt verschiedene Lösungswege für das vorliegende Stossproblem. Die Lösung wird im Folgenden durch eine Energiebilanzierung ermittelt.

Zu dem Zeitpunkt, wenn die Masse m_1 auf die ruhende Masse m_2 trifft, ist in der Feder bereits die Formänderungsarbeit $0.5ky^2_{stat,m2}$ gespeichert. Für die nachfolgende Energiebetrachtung wird diese statische Ruhelage der Masse m_2 als Nullniveau betrachtet. Zum Zeitpunkt der maximalen elastischen Verschiebung der beiden Massen m_1 und m_2 beträgt die durch den Aufprallstoss der Masse m_1 verursachte gespeicherte Formänderungsenergie, welche der grau markierten Fläche des in Abb. 5.3 dargestellten Federkraft-Verschiebungs-Diagramms entspricht,

$$\frac{1}{2}k\left[\left(y_{stat,m} + y_{\max}\right)^2 - y^2_{stat,m2}\right] \tag{5.25}$$

Der Energieerhaltungssatz für konservative Systeme nach Gleichung (3.33) liefert

$$\frac{1}{2}m\dot{w}^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(y_{stat,m} + y_{\max}\right)^2 - y^2_{stat,m2}\right] - mg\left(y_{stat,m1} + y_{\max}\right) \tag{5.26}$$

dabei bezeichnet der Term

$$-mg\left(y_{stat,m1} + y_{\max}\right) \tag{5.27}$$

den Verlust an potentieller Energie infolge der Verschiebung $y_{\max}$ gegenüber der Ruhelage.

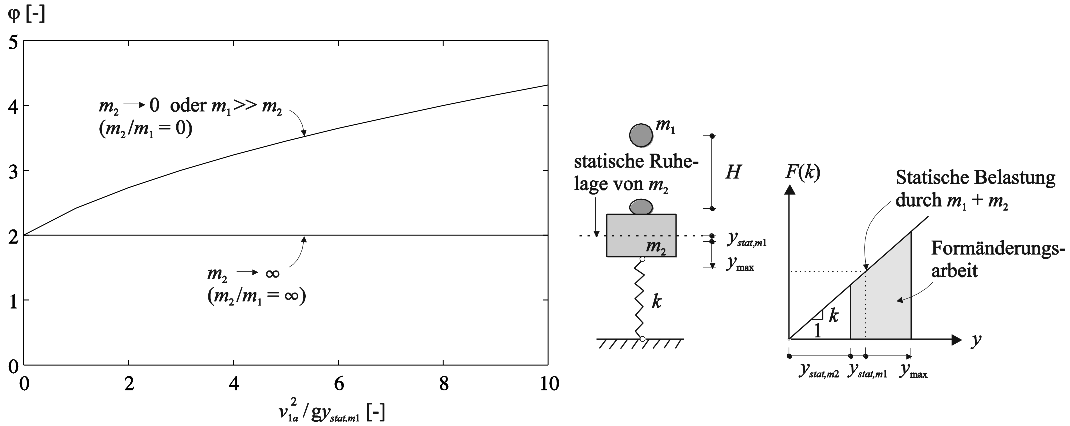


Abb. 5.3 *Grenzbetrachtungen am linear elastisch reagierenden Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad für den plastischen Aufprallstoss.*

Durch Umformung von Gleichung (5.26) und das Lösen der quadratischen Gleichung für die maximale elastische Verschiebung y_{max} erhält man schliesslich

$$y_{\max} = y_{stat,m1}\sqrt{1+v_{1a}^2 / \left(gy_{stat,m}\right)} \tag{5.28}$$

Weiter kann ein auf die Verschiebung $y_{stat,m1}$ der Masse m_1 bezogener Vergrösserungsfaktor φ – auch Stossfaktor genannt – berechnet werden:

$$\varphi = \frac{y_{stat,m1}+y_{\max}}{y_{stat,m1}} = 1+\frac{y_{\max}}{y_{stat,m1}} = 1+\sqrt{1+v_{1a}^2 / \left(gy_{stat,m}\right)} \tag{5.29}$$

d. h. $\varphi y_{stat,m1} = \varphi m_1 g/k = y_{stat,m1} + y_{max}$

Nachfolgend werden die in Abb. 5.3 dargestellten Grenzbetrachtungen untersucht. Gleichung (5.29) wird unter Annahme von $\gamma = m_2/m_1$ umgeformt:

$$\varphi = 1+\sqrt{1+\frac{v_{1a}^2}{(1+\gamma)gy_{stat,m1}}} \tag{5.30}$$

Falls $m_1 >> m_2$ respektive $m_2 \rightarrow 0$ geht, so beträgt das Verhältnis der beiden Massen im Grenzfall $\gamma = m_2/m_1 = 0$ und der Stossfaktor wird zu

$$\varphi = 1+\sqrt{1+\frac{v_{1a}^2}{gy_{stat,m1}}} > 2 \tag{5.31}$$

Ist die Masse des Tragwerks unendlich gross, d. h. $m_2 \rightarrow \infty$, dann wird das Massenverhältnis im Grenzfall $\gamma = m_2/m_1 = \infty$ und somit der Stossfaktor $\varphi = 2$. D. h., egal wie gross die Geschwindigkeit der Masse m_1 ist, der Stossfaktor beträgt immer 2. Wird die Masse m_1 plötzlich aufgebracht, d. h. $v_{1a} = 0$ (Fallhöhe $H = 0$), so beträgt der Stossfaktor 2. D. h., eine plötzlich aufgebrachte Last ruft gegenüber der „langsam“ auf den gleichen Endwert anwachsenden Belastung eine Verdoppelung der Verschiebungen – und damit auch der Beanspruchungen – hervor.

Die Eigenfrequenz (Grundfrequenz) des Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad unter Einschluss der gesamten mitschwingenden Masse $m = m_1 + m_2$ beträgt:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{kg/G} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/y_{stat,m}} \tag{5.32}$$

Gleichung (5.31) für den Stossfaktor lässt sich durch Berücksichtigung von Gleichung (5.32) umformen zu

$$\varphi = 1 + \sqrt{1 + (2\pi)^2 \frac{f^2}{g^2} v_{1a}^2} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_{1a}}{\omega y_{stat,m}}\right)^2} \tag{5.33}$$

Gleichung (5.33) zeigt, dass der Stossfaktor φ für ein elastisch reagierendes System umso grösser ist, je höher die Eigenfrequenz *f* und damit je höher die Steifigkeit *k* ist.

Die Lösung für das betrachtete Beispiel lässt sich auch mittels der Bewegungsdifferentialgleichung für die freie Schwingung des Systems (Anfangswertproblem) finden.

Der Stossfaktor nach der Beziehung (5.29) lässt sich auf allgemeine elastisch reagierende Stab- und Flächentragwerke mit unterschiedlichen Lagerungsbedingungen erweitern. In der Literatur wird häufig der Ansatz gewählt, dass die Form der dynamischen Biegelinie (erste Eigenform) zum Zeitpunkt der grössten Verschiebung am Aufprallort mit derjenigen der statischen Biegelinie übereinstimmt. [Petersen 2000] hat eine solche Lösung für Stabtragwerke mit der Lösung eines Mehrmassenschwingers verglichen und festgestellt, dass der Ansatz, dass die dynamische Biegelinie affin zur statischen ist, unterstellt, dass sich die gesamte Massenbelegung mit einer Geschwindigkeit in Bewegung setzt, die im Verhältnis der statischen Biegeordinaten zur Ordinate am Aufprallort steht. Dies bedeutet, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als unendlich gross angesehen wird. Bei einer punktuellen Stossbeanspruchung beteiligt sich allerdings nicht die gesamte Masse des Tragwerkes von Anbeginn an der Bewegung, weder affin zur maximalen dynamischen Biegelinie noch affin zur statischen. Daher schlägt er vor, die Grundfrequenz des Tragwerks (z. B. nach Rayleigh) vorgängig zu berechnen, die Federsteifigkeit anhand einer statischen Einheitslast am Aufprallort zu bestimmen und daraus die Masse des „Ersatzschwingers" zu berechnen.

5.4.1 Linear elastisch-ideal plastisches Modell

Eine „genaue" Lösung der Antwort eines Tragwerkssystems auf eine Stossbelastung wäre theoretisch nur dann möglich, wenn das System aus einer Anzahl von Massen und Federn besteht und die Last-Zeit-Funktion mit einer mathematischen Funktion beschrieben werden kann. Aus diesem Grund ist es erforderlich, das Tragwerk und die äussere Belastung zu idealisieren. Oft muss nur die erste Eigenform des Tragwerks berücksichtigt werden, und das Tragwerk lässt sich auf ein Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad und somit mit einer einzigen Federcharakteristik zurückführen.

Das Masse-Feder-System mit Einwirkung und die idealisierte (bilineare) linear elastisch-ideal plastische Widerstandsfunktion sind in Abb. 5.4 (a, b) dargestellt. Der linear elastische Anstieg ist durch die Steifigkeit k_e charakterisiert. Die Verschiebung der Masse m_e wird mit w bezeichnet. Die globale Duktilität, die sogenannte Verschiebeduktilität, entspricht dem Verhältnis zwischen der grösstmöglichen totalen Verschiebung $w_{\max}$ und der elastischen Verschiebung bei Fliessbeginn w_y. Die bleibende plastische Verschiebung wird mit w_f angegeben und beträgt $w_f = w_{\max} - w_y$.

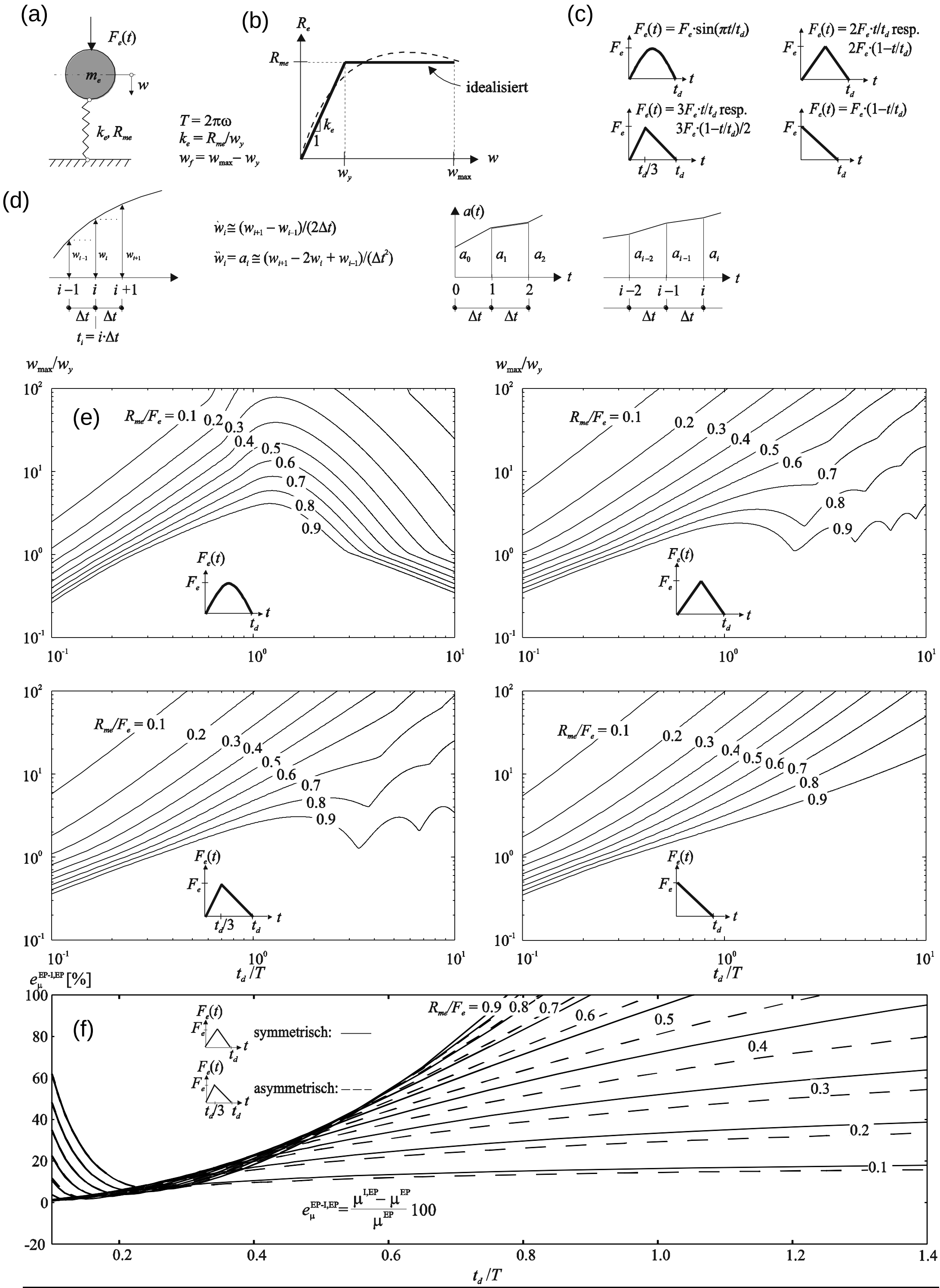


Abb. 5.4 *Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad (Dämpfungsrate $\zeta = 0$) unter Kraftstoss:*

(a) System mit Einwirkung;
(b) idealisierte Widerstandsfunktion (linear elastisch-ideal plastisch);
(c) verschiedene Stossfunktionen;
(d) Zentrales Differenzenverfahren nach [Irvine 1987];
(e) Antwortspektren für verschiedene Stossfunktionen;
(f) Fehler $e_{\mu}^{EP\text{-}I,EP}$ zwischen analytischer Lösung und Lösung einer Impulsbelastung: Vergleich zwischen symmetrisch und asymmetrisch dreieckförmiger Stossfunktion.

Mit einem Masse-Feder-System von einem Freiheitsgrad wird eine starke Idealisierung des tatsächlichen Tragsystems angenommen. Es müssen daher Vereinfachungen getroffen werden, indem die kontinuierlich verteilte Masse durch eine äquivalente Masse m_e, der Last-Durchbiegungsverlauf durch einen idealisierten Verlauf mit äquivalentem Bauwerks-widerstand $R_e(w)$ sowie die äussere Belastung durch eine äquivalente äussere Belastung $F_e(t)$ ersetzt werden.

Der nachfolgenden Analyse werden verschiedene Last-Zeitfunktionen $F_e(t)$ mit endlicher, beliebiger Stossdauer t_d zugrunde gelegt, welche in Abb. 5.4 (c) dargestellt sind. In diesem Kapitel wird die Reaktion eines Masse-Feder-Systems mit bilinearer Widerstandsfunktion $R_e(w)$ auf einen halbsinusförmigen und einen symmetrisch- respektive asymmetrisch-dreieckigen Kraftstoss (mit und ohne Lastanstieg) analysiert. Einerseits wird eine numerische Lösung präsentiert und andererseits werden Energiebetrachtungen vorgenommen, welche Grenzbetrachtungen erlauben. Die Analyse kann sowohl für elastisches als auch elastisch-plastisches Tragwerksverhalten vorgenommen werden.

Die Vernachlässigung der Dämpfung ist möglich, weil bei den meisten Problemstellungen nur der erste Maximalwert der Verschiebung und nicht der kontinuierliche Verlauf der Schwingung von Interesse ist. Aus diesem Grund hat die Dämpfung einen geringen Einfluss [Norris et al. 1959].

Die Bewegungsdifferentialgleichung des Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad lautet unter Vernachlässigung der Dämpfung für das äquivalente System:

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + R_e(w) = m_e \ddot{w} + k_e w = F_e(t) \tag{5.34}$$

Für den elastischen Bereich kann die Eigenschwingdauer gemäss

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m_e w_y / R_{me}} \tag{5.35}$$

bestimmt werden.

Das Auffinden der Lösung für die vorliegende Problemstellung erweist sich aus mathematischer Sicht als schwierig, da die Maximalwerte der Verschiebung $w_{\max}$ nicht als eine geschlossene Lösung berechnet, sondern nur durch numerische Auswertung bestimmt werden können. Deshalb ist für die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (5.34) eine numerische Integrationsmethode wie beispielsweise ein Zeitschrittverfahren wie das „zentrale Differenzenverfahren“ ([Irvine 1986], [Petersen 2000]), welches den nachfolgenden Berechnungen zugrunde gelegt wird, erforderlich.

Mit dem zentralen Differenzenverfahren lässt sich die Bewegungsdifferentialgleichung (5.34) in eine Differenzengleichung übersetzen. Die Wegordinate wird mit w_i und der Zeitpunkt am jeweiligen Stützpunkt i = 0, 1, 2, … mit $t_i = i\Delta t$ bezeichnet, wobei Δt = konstant der Zeitschritt ist. Die Bewegungsgleichung (5.34) lautet für den elastischen respektive den plastischen Bereich:

$$\ddot{w} + \omega^2 w = a(t) \tag{5.36}$$

respektive

$$\ddot{w} + r = a(t) \tag{5.37}$$

wobei $r = R_{me}/m_e$, $a(t) = F_e(t)/m_e$ und $\omega^2 = k_e/m_e$ ist und die Dämpfung ($\zeta = 0$) vernachlässigt wurde.

Die finite Übersetzung der Gleichungen (5.36) und (5.37) liefert mit

$$\begin{aligned}
\ddot{w}_{i-1} &= \left(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i\right)/\Delta t^2 \\
\dot{w}_{i-1} &= \left(w_i - w_{i-2}\right)/2\Delta t \\
w_{i-1} &= w_{i-1} \\
a_{i-1} &= \frac{a_{i-2}}{6} + \frac{2}{3}a_{i-1} + \frac{a_i}{6}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

(Abb. 5.4 (d)) die Rekursionsformeln für den elastischen respektive plastischen Bereich der Widerstandsfunktion:

$$w_i = \left[\left(2 - \omega^2\Delta t^2\right)w_{i-1} - w_{i-2} + \left(\frac{a_{i-2}}{6} + \frac{2}{3}a_{i-1} + \frac{a_i}{6}\right)\Delta t^2\right] \tag{5.39}$$

respektive

$$w_i = \left[2w_{i-1} - w_{i-2} - r\Delta t^2 + \left(\frac{a_{i-2}}{6} + \frac{2}{3}a_{i-1} + \frac{a_i}{6}\right)\Delta t^2\right] \tag{5.40}$$

Bei baudynamischen Problemstellungen ist der Ingenieur meistens an den maximalen Auswirkungen, den Verformungen und den Spannungen interessiert und weniger am gesamten Antwortverlauf des Tragwerks. Typischerweise wurden für verschiedene Stossfunktionen Antwortspektren ([U.S. Army 1957], [Biggs 1964], [Petersen 2000]) oder Druck-Impuls-Diagramme ([Westine & Baker 1975], [Krauthammer 2008]) basierend auf einem Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad entwickelt.

In Abb. 5.4 (e) sind solche Antwortspektren-Diagramme für verschiedene Stossfunktionen dargestellt, aus denen sich die auf w_y bezogene maximale Verschiebung $w_{\max}/w_y$ in Abhängigkeit von t_d/T und R_{me}/F_e entnehmen lässt. Das Verhältnis $w_{\max}/w_y$ ist die sogenannte globale Duktilität μ. Für die Diagrammerstellung werden die Bewegungsgleichungen für den elastischen und plastischen Bereich (Gleichungen (5.39) und (5.40) in eine dimensionsfreie Form überführt. Der Vergleich der Diagramme für einen sinus- und einen dreiecksförmigen Impuls macht grosse Unterschiede deutlich. Abb. 5.4 (f) zeigt den Fehler $e_w^{\text{EP-I,EP}}$ zwischen der numerischen Lösung des Masse-Feder-Systems und der Näherungslösung des Systems unter einer Impulsbelastung für eine symmetrisch- und asymmetrisch-dreieckförmige Stossfunktion (EP: linear elastisch-ideal plastisch).

Eine ausführliche Herleitung der numerischen Lösung auf der Grundlage eines Zeitschrittverfahrens ist beispielsweise in [Petersen 2000] zu finden.

Energiebetrachtungen

Mittels Energiebetrachtungen lässt sich eine Methode finden, die Differentialgleichung der Bewegung zu integrieren. Die näherungsweise Analyse eines Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad anhand von Energiebetrachtungen basiert auf dem Prinzip, dass zu

der Zeit, wenn die maximale Verschiebung $w_{\max}$ des Tragelementes erreicht und die Geschwindigkeit null ist, die Arbeit der äusseren Stosskräfte gleich der inneren Verformungsenergie des Bauwerks entspricht. Die innere Verformungsenergie kann anhand der bilinearen
Widerstandsfunktion $R_e(w)$ in Abb. 5.4 (b) ermittelt werden. Der Energieerhaltungssatz liefert unter Vernachlässigung der Dämpfung die äussere Arbeit, welche im Gleichgewicht mit der kinetischen Energie und der Verformungsenergie ist:

$$\int_0^{w(t)} F_e(t)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \int_0^{w(t)} R_e(w)\,\mathrm{d}w \tag{5.41}$$

Die kinetische Energie hängt mit der Bewegung eines Körpers zusammen. Die Verformungsenergie ist diejenige Energie, die gespeichert (elastische Verformung) und/oder dissipiert (plastische Verformung) wird. Gleichung (5.41) vereinfacht sich, wenn der Zustand beim Erreichen der maximalen Verschiebung betrachtet wird, da dann die Geschwindigkeit und somit die kinetische Energie null ist, d. h.,

$$\int_0^{w_{\max}} F_e(t)\,\mathrm{d}w = \int_0^{w_{\max}} R_e(w)\,\mathrm{d}w \tag{5.42}$$

Die Arbeit der äusseren Kräfte $W_e(t)$ zum Zeitpunkt t beträgt:

$$W_e(t) = \int_0^{w(t)} F_e(t)\,\mathrm{d}w = \int_0^{t} F_e(t)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{5.43}$$

Die Geschwindigkeit dw/dt erhält man durch die Integration von Gleichung (5.34):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_e}\int_0^{t} \left[F_e(t) - R_e(w)\right]\mathrm{d}t \tag{5.44}$$

Das Einsetzen der Geschwindigkeit dw/dt nach der Gleichung (5.44) in Gleichung (5.43) liefert die durch die äusseren Kräfte verrichtete Arbeit:

$$W_e(t) = \int_0^{t} F_e(t)\left\{\frac{1}{m_e}\int_0^{t}\left[F_e(t) - R_e(w)\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t \tag{5.45}$$

Um die Gesamtarbeit der äusseren Kräfte zu erhalten, wird Gleichung (5.43) von $t = 0$ bis $t = t_m$ integriert, wobei t_m die Zeit bei Erreichen der maximalen Verschiebung bezeichnet.

Die verrichtete Arbeit $W_e(t)$ ist somit von der äusseren Belastung, der Masse des Tragwerks und der Widerstandsfunktion des dynamischen Systems abhängig. Wenn die Zeit t_m bei Erreichen der maximalen Verschiebung grösser ist als die Stossdauer t_d, dann muss Gleichung (5.45) nur bis t_d integriert werden, da die Arbeit nach t_d konstant bleibt. Ist t_m viel grösser als t_d, dann ist der Widerstand $R_e(w)$ während des Aufbringens der äusseren Last klein und kann vernachlässigt werden. Dann vereinfacht sich die Arbeit nach Gleichung (5.45) zu:

$$\int_0^{t_d} F_e(t)\left\{\frac{1}{m_e}\int_0^{t} F_e(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t = W_{e,I} \tag{5.46}$$

und entspricht der äusseren Arbeit einer Impulsbelastung $W_{e,I}$, wobei

$$\int_0^{t_d} F_e(t)\mathrm{d}t = I \tag{5.47}$$

der totale Impuls der äusseren Kräfte ist und der Fläche unter der Last-Zeit-Funktion entspricht.

Die kinetische Energie, welche beim Stoss erworben wurde, beträgt $T_0 = m_e v_0^2/2$ und somit ist die Arbeit der äusseren Kräfte

$$W_{e,I} = \frac{I^2}{2m_e} \tag{5.48}$$

wobei die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = I/m_e$ beträgt. In diesem Fall ist die äussere Belastung eine Impulsbelastung, d. h. während des Aufbringens der Belastung können der Widerstand und die innere Verformungsenergie des Systems als null angenommen werden. Die kinetische Energie $T_0 = m_e v_0^2/2 = I^2/(2m_e)$ wurde zur Zeit der maximalen Verschiebung vollständig in innere Verformungsenergie überführt. Gleichung (5.45) zeigt, dass die innere Widerstandsfunktion die Arbeit der äusseren Lasten immer reduziert. Deshalb kann die Arbeit $W_{e,I} = I^2/(2m_e)$ als die maximal mögliche Arbeit für eine äussere Last betrachtet werden.

Die vom Tragwerk absorbierte Energie E_i entspricht der Fläche unter der Widerstand-Verschiebungs-Funktion, Abb. 5.4 (b), und beträgt für elastisches respektive elastisch-plastisches Tragwerksverhalten

$$E_i = \frac{1}{2}k_e w_{\max}^2 = \frac{1}{2}R_{me} w_{\max} \tag{5.49}$$

respektive

$$E_i = R_{me}\left(w_{\max} - w_y/2\right) \tag{5.50}$$

wobei $w_{\max}$ die maximale Verschiebung des Systems und $w_y = R_{me}/k_e$ die elastische Verschiebung bei Fliessbeginn bezeichnen.

Grenzbetrachtungen

Im Folgenden wird die Näherungslösung eines durch einen dreieckigen und einen sinusförmigen impulsartigen sowie einen quasi-statischen Kraftstoss belastetes Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad ermittelt und mit der numerischen Lösung verglichen. Die beiden Last-Zeit-Funktionen werden verwendet, um die externe Arbeit zu bestimmen. Dabei wird angenommen, dass die Stossdauer t_d sehr klein ist, so dass die Belastung bereits wieder verschwunden ist, bevor das System eine merkliche Verschiebung erfährt. Die äussere Belastung $F_e(t)$ steht nur mit den Trägheitskräften im Gleichgewicht. Der innere Widerstand R_{me} wird dabei vernachlässigt, da dieser erst mit zunehmender Verformung anwächst. Durch einfache Integration kann man die Anfangsgeschwindigkeit ermitteln,

$$\dot{w} = v = \frac{1}{m_e}\int_{t=0}^{t_d} F_e(t)\mathrm{d}t = \frac{I}{m_e} \tag{5.51}$$

welche eine Funktion des Impulses I (Fläche unter Last-Zeit-Funktion) ist. Der Impuls I einer sinus- respektive dreiecksförmigen Last-Zeit-Funktion beträgt:

$$I = 2t_d F_e / \pi \tag{5.52}$$

respektive

$$I = t_d F_e / 2$$

Durch Gleichsetzen der kinetischen Energie $T_0 = 0.5 m_e v_0^2 = I^2/2m_e$, welche beim Stoss aufgenommen wird, mit der inneren Deformationsenergie $E_i = R_{me} w_{\max}(1 - 0.5 w_y/w_{\max})$ lässt sich durch algebraische Umformung der Bauwerkswiderstand

$$R_{me} = \frac{I\omega}{\sqrt{2\mu - 1}} \tag{5.53}$$

berechnen, wobei $\mu = w_{\max}/w_y$ die Duktilität, $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k_e/m_e}$ die Eigenfrequenz und $k_e = R_{me}/w_y$ die Steifigkeit bezeichnen.

Durch Einsetzen von (5.52) in Gleichung (5.53) lässt sich durch Umformung das Verhältnis F_e/R_{me} für die sinusförmige respektive dreiecksförmige Stosslast finden:

$$F_e / R_{me} = T\sqrt{2\mu - 1}/\pi t_d$$

respektive (5.54)

$$F_e / R_{me} = T\sqrt{2\mu - 1}/4t_d$$

Aus Abb. 5.5 ist ersichtlich, dass im Bereich $t_d/T \leq 0.4$ für eine dreieckförmige Last-Zeit-Funktion die Abweichung zwischen der Näherungslösung einer Impulsbelastung und der numerischen Lösung eines Masse-Feder-Systems mit der gleichen Widerstandsfunktion vernachlässigbar klein ist (≤ 10 %). Demzufolge ist in diesem Bereich die Betrachtung der Stosskraft als eine Impulskraft gerechtfertigt, da während der Stossdauer die Verschiebungen des Tragwerks vernachlässigbar sind. Des Weiteren ist der Einfluss der Duktilität aus Abb. 5.5 ersichtlich. Je grösser die vorhandene Duktilität $\mu = w_{\max}/w_y$ des Tragwerks, desto kleiner ist die Abweichung zwischen der Näherungslösung einer Impulsbelastung und der numerischen Lösung. Im Fall einer Impulsbelastung hängt die Arbeit der äusseren Kraft nur von der Fläche unter der Last-Zeit-Funktion ab und ist somit unabhängig von der jeweiligen Form der Funktion und den Eigenschaften des dynamischen Systems. Für lange Stossdauern ist die Form der Last-Zeitfunktion hingegen wichtig und somit ist dann eine dynamische Lösung erforderlich.

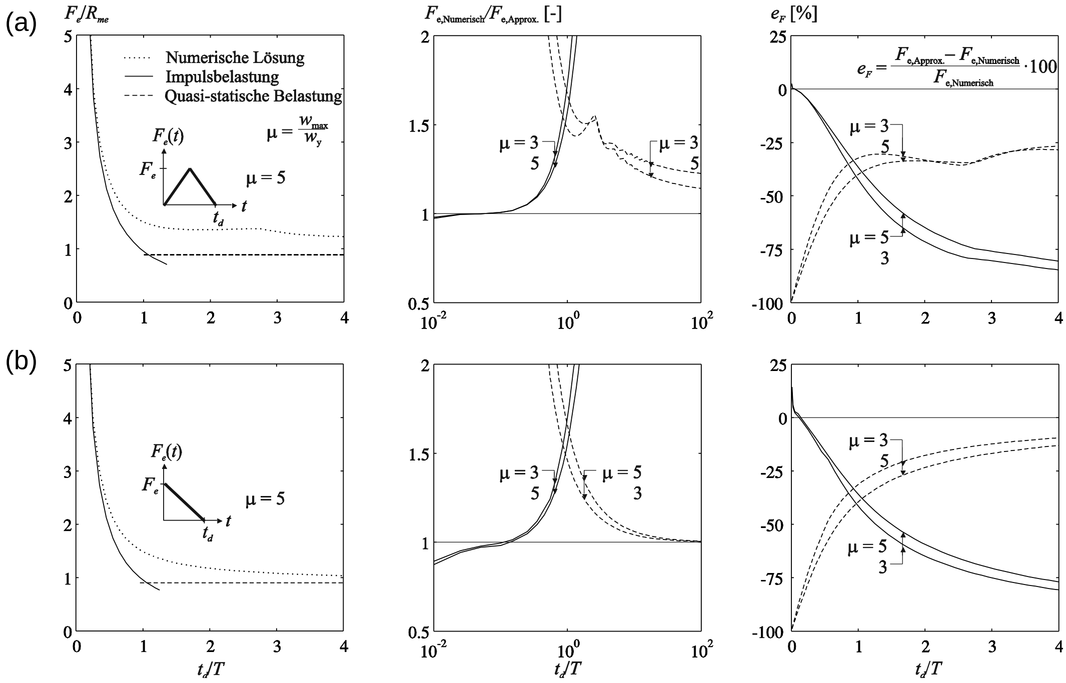


Abb. 5.5 *Näherungslösungen für einen impulsartigen Kraftstoss (Impulsbelastung), eine quasi-statische Belastung sowie eine numerische Lösung eines elastisch-plastischen Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad:*
(a) symmetrisch-dreieckförmiger Kraftverlauf;
(b) dreieckförmiger Kraftverlauf ohne Lastanstieg (Dämpfungsrate $\zeta = 0$).

[Brooks & Newmark 1953] befassten sich erstmals mit solchen approximativen Energie- und Impulsbetrachtungen und erkannten wichtige Zusammenhänge zwischen der mitschwingenden Masse des Tragwerks, dem Widerstand und dem Verhältnis t_d/T. [Basler 1966] respektive [Biggs 1964] untersuchten ebenfalls basierend auf der approximativen Energie- und Impulsmethode Tragwerke, welche durch asymmetrisch dreieckförmige respektive rechteckförmige Kurz- und Langzeitbelastungen beansprucht werden. Dabei wurden die beiden Extrembelastungen „Impulsbelastung" und „quasi-statische Belastung", welche abhängig vom Verhältnis t_d/T sind, diskutiert. [Basler 1966] erzielte damit wertvolle Erkenntnisse für die Beurteilung von Explosionsbelastungen konventioneller Waffen und von Atombomben auf Bauwerke und erkannte, dass die ersteren eher im Bereich von Impulsbelastungen und die letzteren eher im quasi-statischen Bereich liegen. Diese beiden Beanspruchungsarten sind somit, obwohl beide kurzfristig sind, ungleich. Seine Untersuchungen waren die Grundlage für die technischen Weisungen für die Konstruktion / Bemessung von Schutzbauten [Bundesamt für Zivilschutz 1994).

5.4.2 Starr-plastisches Modell

Es wird ein einmassiges Modell mit einem Freiheitsgrad und einem starr-ideal plastischen Materialverhalten, wie in Abb. 5.6 (a) dargestellt, betrachtet. In der starr-plastischen Lösung werden die elastischen Verformungen vernachlässigt (Steifigkeit $k_e \to \infty$; vergleiche Abb. 5.4 (b)). Als Einwirkung wird ein Kraftstoss $F_e(t)$ mit beliebiger Form der Stossfunktion berücksichtigt, Abb. 5.6 (b).

Die Bewegungsdifferentialgleichung des einmassigen Modells mit starr-plastischem Materialverhalten unter eines Kraftstosses $F_e(t)$ lautet:

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + R_{me} = F_e(t) \tag{5.55}$$

Einfache Integration von (5.55) und Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\dot{w}(t = 0) = 0$ ergibt die Geschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_e}\left(\int_0^t F_e(t)\mathrm{d}t - R_{me}\, t\right) \tag{5.56}$$

Die Dauer der Bewegung erhält man aus der Bedingung $\dot{w}(t_f) = 0$ und sie beträgt:

$$t_f = \frac{\int_0^t F_e(t)\mathrm{d}t}{R_{me}} = \frac{I}{R_{me}} \tag{5.57}$$

Die einfache Integration von (5.56) und die Berücksichtigung der Anfangsbedingung $w(t = 0) = 0$ liefert die Durchbiegung:

$$w = \frac{1}{m_e}\int_0^t \left[\int_0^t F_e(t)\mathrm{d}t - R_{me}\, t\right]\mathrm{d}t \tag{5.58}$$

Die maximale Durchbiegung $w(t = t_f) = w_f$ für eine rechteckförmige Stossfunktion lautet nach (5.58) und (5.57):

$$w_f = w(t = t_f) = \frac{1}{2}\frac{F_e t_d^2}{m_e}\left(\frac{F_e}{R_{me}} - 1\right) \tag{5.59}$$

[Youngdahl 1970], [Youngdahl 1971] führte sogenannte Korrelationsparameter (äquivalente Parameter) ein, welche den Effekt der Form der Stossfunktion eliminieren. Er untersuchte Lösungen für verschiedene Tragelemente wie Balken, Platten und Schalen und konnte damit den Effekt der Form der Stossfunktion eliminieren ([Youngdahl 1971], [Youngdahl 1987], [Youngdahl & Krajcinovic 1986]). [Krajcinovic 1972] und [Zhu et al. 1986] führten diesbezüglich weitere Untersuchungen durch.

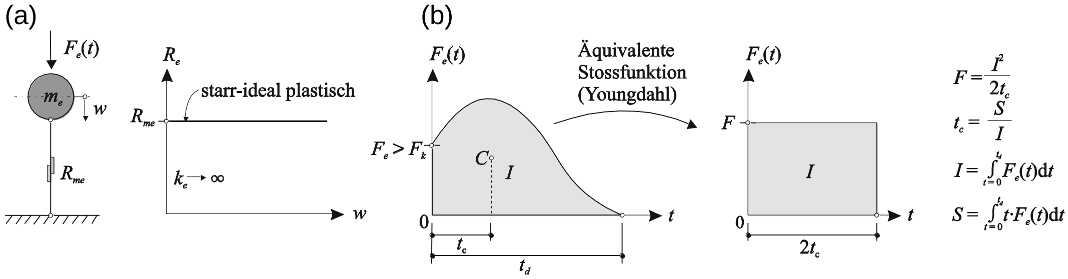


Abb. 5.6 *Starr-plastisches Modell:*
(a) einmassiges Modell mit einem Freiheitsgrad;
(b) Stossfunktion mit beliebiger Form und äquivalente, rechteckförmige Stossfunktion nach [Youngdahl 1970], [Youngdahl 1971].

Die maximale Durchbiegung für eine äquivalente, rechteckförmige Stossfunktion beträgt anstelle von (5.59) mithilfe der Korrelationsparameter nach Youngdahl [Krajcinovic 1972]:

$$w_f = w(t = t_f) = \frac{I}{m_e}\left(\frac{I^2}{2F_u} - t_c\right) = \frac{S}{m_e}\left(\frac{F}{F_u} - 1\right) \tag{5.60}$$

wobei

$$I = \int_0^{t_d} F_e(t)\mathrm{d}t\,, \qquad S = \int_0^{t_d} F_e(t)t\mathrm{d}t \tag{5.61}$$

$$t_c = \frac{S}{I}\,, \qquad F = \frac{I}{2t_c} \tag{5.62}$$

Energiebetrachtungen sind wertvolle Verfahren, um Näherungslösungen für die bleibenden Dehnungen und Verformungen von Tragwerken zu erhalten. Insbesondere zeigt sich deren Stärke, wenn das transiente (zeitabhängige) Verhalten des Tragelementes nicht von Interesse ist. Für den Impulsbereich wird in der Energiegleichung die auf das Tragelement wirkende kinetische Energie $T = 0.5 m_e v_0^2 = 0.5 m_e (I/m_e)^2 = I^2/2m_e$ (wobei $v_0 = \dot{w}$) mit der Dissipationsenergie (plastische Verformungsenergie) $D = R_{me}\, w_f$ gleichgesetzt, somit resultiert:

$$\frac{I^2}{w_f m_e R_{me}} = 2 = \lambda \tag{5.63}$$

Für den quasi-statischen Bereich (Verhältnis der Stossdauer im Vergleich zur Eigenschwingdauer lang) wird die Verformungsarbeit $W_e = w_f\, F_e$ (Arbeit der äusseren Kräfte) mit der Dissipationsenergie $D = R_{me}\, w_f$ gleichgesetzt, d. h.,

$$F_e / R_{me} = 1 = \zeta \tag{5.64}$$

Für beide Grenzwertbetrachtungen wird für die Berechnung der Dissipationsenergie die erste Eigenform angenommen. Abb. 5.7 (a-c) zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Durchbiegung eines starr-plastischen Modells mit rechteckiger Stossfunktion für verschiedene Verhältnisse $\zeta = F_e/R_{me} = 2$, 1.5 und konstanter Stossdauer t_d. Des Weiteren ist in Abb. 5.7 (d-e) der Vergleich der analytischen Lösung für ein starr-plastisches Modell mit einer rechteckförmigen Stossbelastung mit den beiden Näherungslösungen für eine Impulsbelastung und quasi-statische Belastung sowie der Fehler e der Näherungslösungen dargestellt. In Abb. 5.8 ist der Vergleich der analytischen Lösung für ein starr-plastisches Modell mit einer dreieckförmigen Stossfunktion mit und ohne Lastanstieg (Korrelationsparameter nach Youngdahl) mit den beiden Näherungslösungen für eine Impulsbelastung und eine quasi-statische Belastung sowie der Fehler e der Näherungslösungen dargestellt.

Kaliszky erweiterte das starr-plastische Modell für idealviskoses Materialverhalten und eine allfällige Berücksichtigung geometrischer Änderungen des Tragwerks.

5.4.3 Diskussion

Näherungslösungen

Die vorangegangenen Untersuchungen zeigen deutlich, dass die Intensität der Stossbelastung ein wichtiger Faktor für die Wahl der dynamischen Modellbildung darstellt. Das verfügbare Verformungsvermögen von Stahlbetonbauteilen ist eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung plastischer Bemessungsmethoden von Stahlbetonkonstruktionen unter statischen Lasten. Demgegenüber ist für Bauteile unter Stossbelastung nebst dem Verformungsvermögen auch das Verhältnis t_d/T (Impulsbelastung) eine wichtige Voraussetzung für die plastische Bemessung.

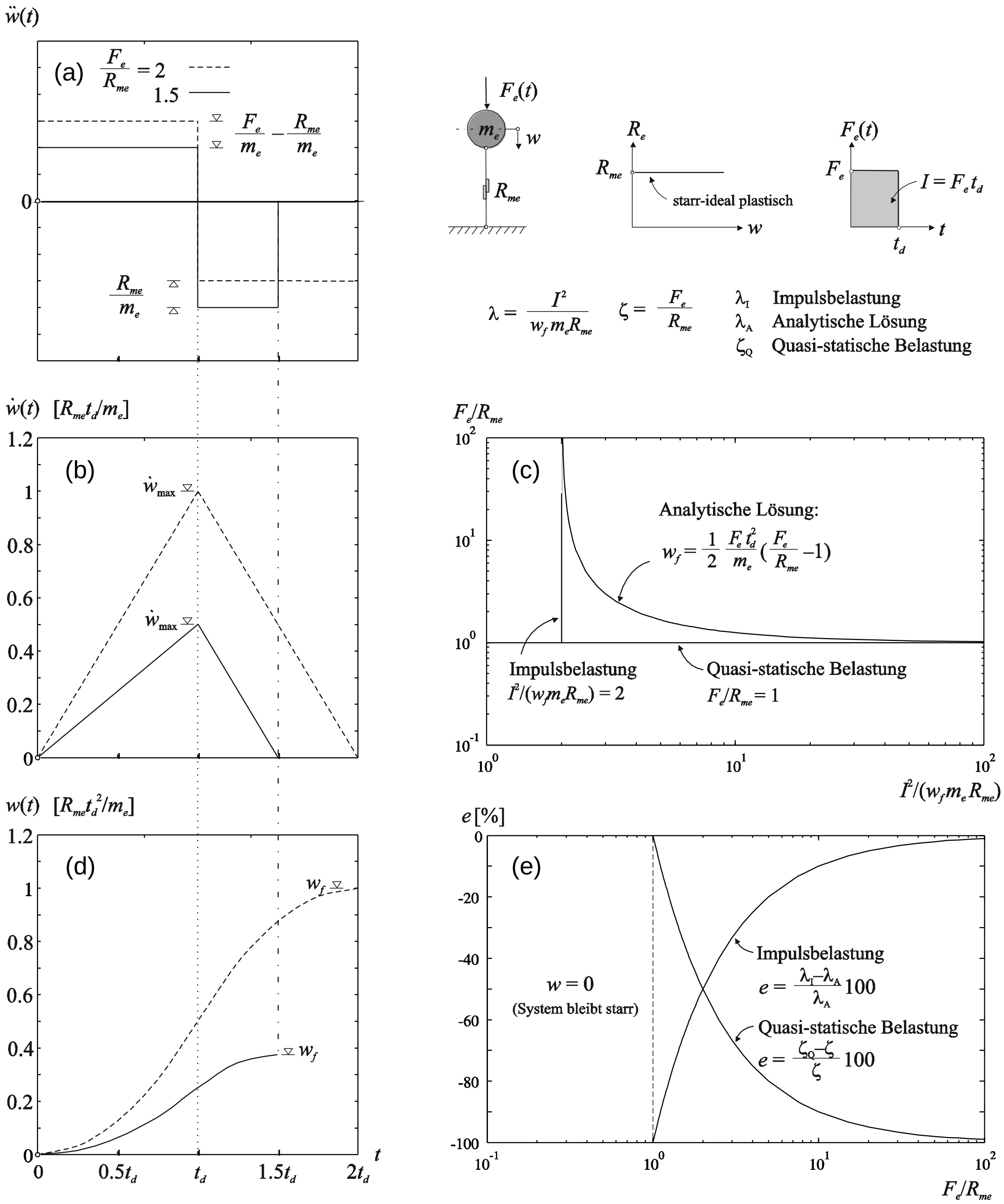


Abb. 5.7 *Starr-plastisches Modell mit rechteckiger Stossfunktion:*

(a)-(c) zeitlicher Verlauf der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Durchbiegung für verschiedene Verhältnisse F_e/R_{me} und konstanter Stossdauer t_d;

(d) Vergleich der analytischen Lösung und des starr-plastischem Modell mit den Grenzbetrachtungen als Impulsbelastung und quasi-statische Belastung;

(e) Fehler zwischen starr-plastischem Modell und Vereinfachung als Impulsbelastung $e[\%] = (\lambda_I - \lambda_A)100/\lambda_A$ respektive quasi-statischer Belastung $e[\%] = (\zeta_Q - \zeta)100/\zeta$.

[Lee & Symonds 1952] führten erstmals das Kriterium $R >> 1$ für den Gültigkeitsbereich starr-plastischer Lösungen ein, wobei R das Energieverhältnis der Dissipationsenergie zu maximaler elastischer Formänderungsenergie:

$$R = \frac{R_{me} w_f}{\left(R_{me} w_y / 2\right)} = 2 w_f / w_y \qquad (5.65)$$

bezeichnet.

Elastische Effekte werden daher oft vernachlässigt, falls die auf das Tragwerk aufgebrachte totale dynamische Energie viel grösser ist als die maximale elastische (reversible) Formänderungsenergie. [Symonds 1967] zeigte anhand eines einmassigen Systems mit einem Freiheitsgrad, welches die Eigenform-Bewegung des Tragwerks repräsentiert, dass das Energieverhältnis R eine erforderliche, aber nicht hinreichende Bedingung bei dynamisch aufgebrachten Lasten darstellt. Das Verhältnis der Stossdauer t_d eines Kraftstosses zur Eigenschwingdauer T eines Tragwerks spielt ebenso eine wichtige Rolle. [Symonds & Frye 1988] untersuchten das dynamische Verhalten eines einmassigen Systems mit einem Freiheitsgrad und einer Feder, welche einerseits aus einem linear elastisch-ideal plastischen und andererseits aus einem starr-plastischen Material bestand. Dabei wurden sechs verschiedene Kraftstösse betrachtet, anhand derer der Einfluss der Lastanstiegszeit und der Stossdauer eines Kraftstosses auf die Genauigkeit/Gültigkeit starr-plastischer Modelle untersucht wurde. Mit der umfangreichen Untersuchung konnte bestätigt werden, dass das Kriterium des Energieverhältnisses $R >> 1$ wichtig ist, aber nicht die einzig notwendige Bedingung darstellt, damit eine starr-plastische Idealisierung des Materialverhaltens eine gute Näherung des in Wirklichkeit vorhandenen elastisch-plastischen Verhaltens ergibt. Es wurde beobachtet, dass die Abweichung einer starr-plastischen Näherungslösung von einer linear elastisch-ideal plastischen Lösung bei einem Kraftstoss ohne Lastanstiegszeit und einer im Vergleich zur Eigenschwingdauer langen Stossdauer signifikant sein kann. Die Fehler respektive die Abweichungen sind am kleinsten für die grössten Energieverhältnisse R, und die Maximalwerte der Fehlerkurven nehmen mit zunehmender Stossdauer ab. Ein starr-plastisches Modell ist bei einer dynamischen Einwirkung am besten geeignet für sehr kurzzeitig wirkende Stösse, d. h. bei Impulsbelastungen.

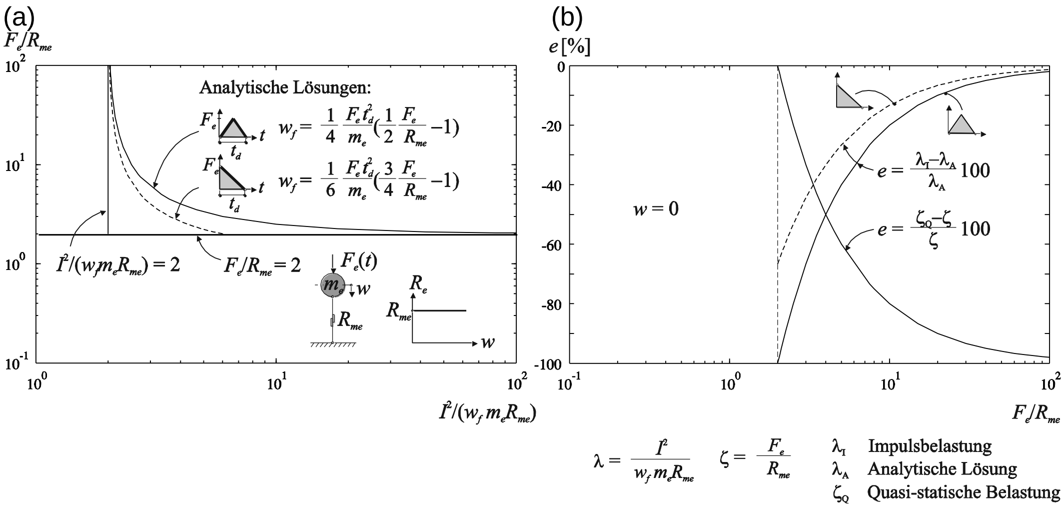


Abb. 5.8 *Starr-plastisches Modell: Vergleich der analytischen Lösung und des starr-plastischen Modells mit Grenzbetrachtung als Impulsbelastung und quasi-statische Belastung:*
(a) dreieckförmige Stossfunktion mit und ohne Lastanstieg (Korrelationsparameter nach Youngdahl);
(b) Fehler zwischen starr-plastischem Modell und Vereinfachung als Impulsbelastung e[%] = (λ_I–λ_A)100/λ_A respektive quasi-statischer Belastung e[%] = (ζ_Q–ζ)100/ζ.

Abb. 5.9 zeigt den Fehler e_w, welcher für eine rechteckförmige und eine symmetrisch dreieckförmige Stossfunktion bei einer Vereinfachung einer starr-plastischen Modellbildung und einer Impulsbelastung entsteht. Der Vergleich zwischen der numerischen Lösung eines linear elastisch-ideal plastischen Modells (Kapitel 5.4.1) und der starr-plastischen Lösung (Kapitel 5.4.2) respektive einer Impulsbelastung für verschiedene Energieverhältnisse zeigt, dass der Fehler e_w für erstere negative und für letztere positive Werte annimmt. Für beide Fälle nimmt der Fehler mit zunehmender Stossdauer zu. Die Vernachlässigung der Stossdauer, indem eine Impulsbelastung angenommen wird, führt daher zu einer Überschätzung (konservativ) und die Vernachlässigung elastischer Verformungen führt zu einer Unterschätzung (nicht konservativ) der Durchbiegungen.

Mit dem Verhältnis der Stossdauer t_d zur Eigenschwingdauer T eines Bauwerks kann eine Aussage hinsichtlich der Stossart gemacht werden. Wenn die Stossdauer im Vergleich zur Eigenschwingdauer des Bauwerks klein ist (Impulsbereich), kann die Arbeit der äusseren Kräfte als Funktion des Impulses berechnet werden. Die erforderliche Energieabsorption beträgt dann $I^2/2m_e$, wobei I die Fläche unter der Last-Zeit-Funktion und m_e die äquivalente Masse des Bauwerks ist. In diesem Bereich spielt die Eigenschwingdauer T keine Rolle, solange diese etwa vier Mal der Stossdauer t_d entspricht. Daraus kann geschlossen werden, dass die erforderliche Energieabsorption reduziert werden kann, wenn die Masse des Bauwerks erhöht wird. Die vom Tragwerk absorbierte Energie ist durch $E_i = \frac{1}{2} k_e w_{\max}^2 = \frac{1}{2} R_{me} w_{\max}$ für elastisches und $E_i = R_{me}\left(w_{\max} - w_y/2\right)$ für plastisches Bauwerksverhalten gegeben, wobei $w_{\max}$ die maximale Verschiebung, w_y die maximale elastische Verschiebung, k_e die Steifigkeit und R_{me} der maximale plastische Widerstand bezeichnen. Somit kann $w_{\max}$ für einen gegebenen Energieinput bei einer Vergrösserung der Steifigkeit k_e im elastischen Fall und dem plastischen Widerstand R_{me} im plastischen Fall reduziert werden. Eine Erhöhung der Steifigkeit allein und daher eine Reduktion von w_y haben nur einen geringen Einfluss, falls die maximale Durchbiegung $w_{\max}$ um einiges grösser ist als die elastische Durchbiegung w_y.

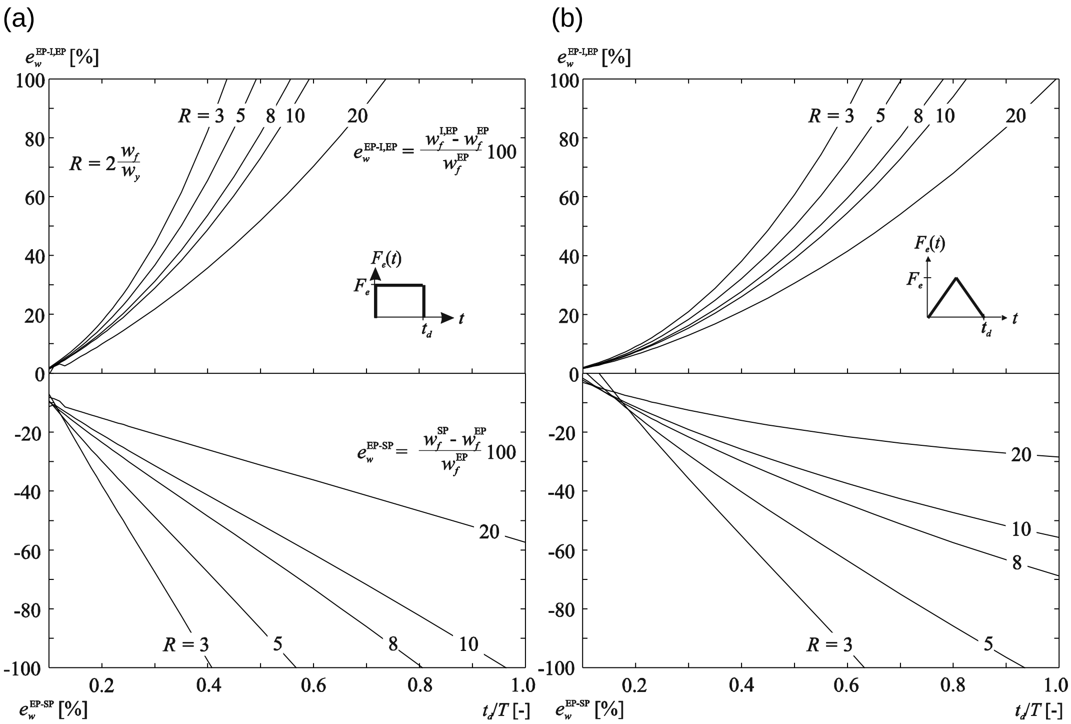


__Abb. 5.9__ Vergleich zwischen dem starr-plastischen Modell und dem elastisch-ideal plastischen Modell: Fehler Impulsbelastung $e_w^{EP\text{-}I,EP}$ und starr-plastische Lösung; $e_w^{EP\text{-}SP}$:
(a) rechteckförmige Stossfunktion;
(b) symmetrisch dreieckförmige Stossfunktion (starr-plastische Lösung: Korrelationsparameter nach Youngdahl).

Falls die Stossdauer t_d im Vergleich zur Eigenschwingdauer T des Bauwerks gross ist, ist die Bauwerksantwort wiederum unabhängig von der Eigenschwingdauer (quasi-statische Bereich). Wenn sich das Verhältnis der Stossdauer zur Eigenschwingdauer des Bauwerks zwischen diesen Extrembereichen befindet, dann spielt die Eigenschwingdauer eine wichtige Rolle. Betrachtet man den Bereich $t_d/T < 1$, so kann im elastischen sowie plastischen Bereich beobachtet werden, dass sich die maximale Verschiebung $w_{\max}$ oder der erforderliche Widerstand R_{me} mit zunehmender Eigenschwingdauer T reduziert. Eine Erhöhung der Eigenschwingdauer T kann durch eine Erhöhung der Masse des Bauwerks m_e oder durch eine Reduktion der Steifigkeit k_e erreicht werden. Eine optimierte Lösung der dynamischen Problemstellung kann oft durch ein sehr flexibles Bauwerk erreicht werden.

Zusammenhang zwischen Duktilität und Tragwiderstand

Zur einmaligen Aufnahme eines seltenen Ereignisses, wie z. B. bei einer Stosseinwirkung infolge Steinschlags auf Schutzgalerien, Explosionen oder Flugzeugaufprall ist es im Allgemeinen nicht zweckmässig und nicht wirtschaftlich, die Tragwerke so auszubilden, dass nur elastische Beanspruchungen entstehen [Ammann 1983]. Dies würde oft einen unverhältnismässig hohen Tragwiderstand erfordern. Vielmehr sollen plastische Verformungen zugelassen werden. Da es sich um seltene Ereignisse handelt, können entsprechende Schäden hingenommen werden. Das Ziel der Bemessung soll allein die Vermeidung eines globalen Tragwerksversagens sein. Die Voraussetzung dafür ist, dass das so bemessene Tragwerk ein entsprechendes plastisches Verformungsvermögen, d. h. eine genügende Duktilität aufweist.

Das Verhältnis von maximal aufnehmbarer plastischer Durchbiegung $w_{\max}$ zur maximalen elastischen Durchbiegung w_y (Verformungsvermögen) spielt für die Aufnahme dynamischer Lasten eine massgebende Rolle. Für die Annahme dieser Verhältniszahl muss man in erster Linie die Rotationsfähigkeit der Querschnitte von Tragelementen respektive das Last-Deformations-Diagramm des ganzen Bauteiles kennen [Bachmann 1997].

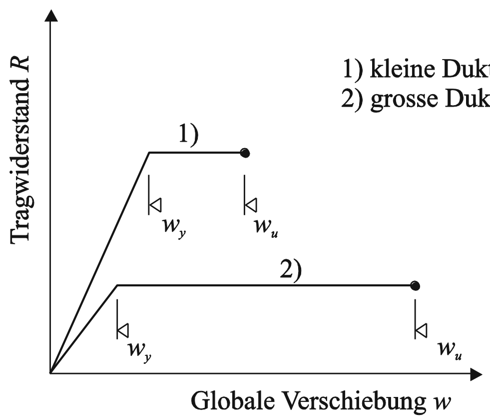


Abb. 5.10 *Beziehung zwischen Duktilität und Tragwiderstand.*

Bei Tragwerken unter Stossbelastung besteht zwischen Tragwiderstand und Duktilität eine enge Wechselwirkung: Je kleiner der Tragwiderstand ist, desto grösser muss die Duktilität sein und umgekehrt ([Basler 1966], [Bachmann 1997]), Abb. 5.10. Gemäss [Basler 1966] kommt es in erster Näherung sogar nur auf das Produkt dieser Grössen an. Für die wirtschaftliche Lösung von Stossproblemen ist diese enge Wechselbeziehung von grösster Bedeutung, wobei bezüglich der Einsturzgefahr die folgende Näherungsbeziehung: „Güte" des Tragwerksverhaltens ≈ Tragwiderstand × Duktilität gilt [Bachmann 1997]. Wenn das Tragwerk mit einem tiefen Tragwiderstand versehen wird, sind grosse plastische Verformungen erforderlich. Somit ist der Duktilitätsbedarf hoch und das Tragwerk ist dementsprechend mit einer hohen Duktilität auszubilden. Dank Duktilität kann somit der Tragwiderstand reduziert werden. Damit werden zwar erhebliche Schäden entstehen, aber es wird keinen Einsturz geben. Weil man damit einen geringeren Tragwiderstand hat, können meist sehr kostengünstige Lösungen gefunden werden.

Die allgemeine Definition der Duktilität setzt eine linear elastisch-ideal plastische Last-Verformungsbeziehung voraus. Die Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verschiebungen wird als Verschiebeduktilität bezeichnet (globale Duktilität). Demgegenüber wird die Rotationsduktilität an einem plastischen Gelenk der Länge l_{pl} definiert (lokale Duktilität), vergleiche Kapitel 6.3.3. Die globale Duktilität wird oft für das Gesamtverhalten eines Tragwerks verwendet, beispielsweise für die Erdbebenbemessung eines Gebäudes. Zwischen der lokalen und globalen Duktilität besteht wiederum ein direkter Zusammenhang.

Die Rotationskapazität kann keinesfalls allein aus einer Querschnittsanalyse ermittelt werden. Systemeigenschaften wie Belastung, Geometrie (Schlankheit, Form und Grösse der Querschnitte) und Bewehrungslayout (Gehalt, Verteilung und Bewehrungsdetails) als auch die Materialeigenschaften (Spannungs-Dehnungsdiagramm von Beton und Stahl) müssen berücksichtigt werden [Sigrist 1995]. Die Verwendung eines Betonstahls mit hoher Duktilität trägt zu einer hohen globalen respektive lokalen Duktilität (Verformungsvermögen) bei.

Der Verformungsbedarf ist von der Belastungskonfiguration und vom betrachteten System abhängig. Am Beispiel eines Masse-Feder-Systems nach Abb. 5.4 (a, b) wird die Abhängigkeit des Verformungsbedarfs (Verschiebeduktilität) von den Verhältnissen F_e/R_{me} und t_d/T für zwei verschiedene Stossfunktionen in Abb. 5.11 aufgezeigt. Je grösser das Verhältnis t_d/T ist, desto grösser ist der Duktilitätsbedarf w_{max}/w_y. Je grösser das Verhältnis F_e/R_{me} ist, desto grösser ist der Duktilitätsbedarf w_{max}/w_y.

(a) (b)

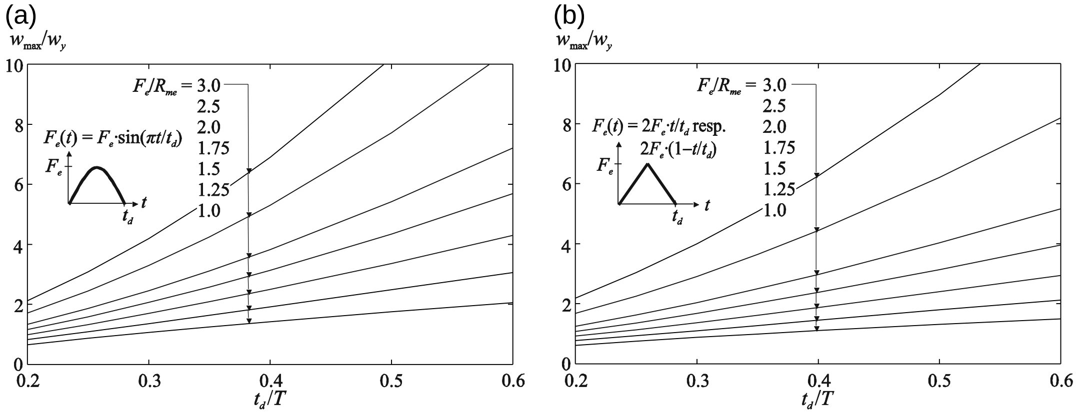


Abb. 5.11 *Verformungsbedarf am Beispiel eines Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad (ungedämpft) unter Kraftstoss:*
(a) halb-sinusförmige
(b) symmetrisch dreieckförmige Stossfunktion.
System mit Einwirkung und idealisierte linear elastisch-ideal plastische Widerstandsfunktion nach Abb. 5.4 (a, b).

In der Praxis basieren die Berechnungsmethoden zur Untersuchung von Stossbelastungen auf Tragwerken oft auf Annahmen bezüglich der Duktilität ([Jacquemoud 1999], [Bundesamt für Zivilschutz 1994], [U.S. Army 1957]). Die [U.S. Army 1957] schlägt für Stahlbetonkonstruktionen, welche auf Biegung versagen, eine Duktilität von 5 bis 20 vor. Dieses Verhältnis wurde anhand von Experimenten bestimmt und besagt, dass es für eine gegebene Querschnittsform hauptsächlich vom Bewehrungsgehalt abhängig ist. Die Schutzbaunorm [Bundesamt für Zivilschutz 1994] in der Schweiz stützt sich auf diese amerikanischen Untersuchungen. Dabei wird eine genügende Rotationskapazität der plastischen Gelenkbereiche vorausgesetzt und die globale (Biege-) Bemessung neuer und Beurteilung bestehender Bauwerke wird mit dem Fliessgelenklinienverfahren (oberer Grenzwert der Plastizitätstheorie) durchgeführt. Die Frage stellt sich nun aber, ob diese plastische Umverteilung der inneren Kräfte auch wirklich erfolgen kann und ob die zugrunde gelegten plastischen Verformungen auch auftreten können.

5.5 Starr-plastische Modellierung des Tragverhaltens

5.5.1 Übersicht

In Kapitel 5.4.3 wurde gezeigt, dass sich eine starr-plastische Modellierung des Tragwerks generell für impulsartige Belastungen am besten eignet. Der relative Fehler einer starr-plastischen Lösung gegenüber einer linear elastisch-ideal plastischen Lösung kann mit dem Energieverhältnis R abgeschätzt werden, d. h. das Verhältnis der plastischen Arbeit dividiert durch die elastische Verformungsarbeit.

Mit energetischen Überlegungen lässt sich veranschaulichen, dass die von der äusseren Belastung verrichtete Arbeit während der Bewegung zum Teil in kinetische Energie und zum Teil in plastische Formänderungsenergie umgewandelt wird. Sofern das Tragwerk die (äussere) dynamische Belastung ohne Versagen ertragen kann, wird die äussere Energie bis zum Erreichen des Ruhezustandes vollständig in plastische Formänderungsenergie dissipiert.

Die Erweiterung der Traglastverfahren für statische Lasten auf dynamische Problemstellungen war trotz einigen frühen Erfolgen nicht einfach, da selbst die Vereinfachung als starr-plastisches Verhalten aufgrund der zeitabhängigen Verschiebungsfelder zu mathematischen Schwierigkeiten führte. Das Verschiebungsfeld eines dynamisch beanspruchten Tragwerks ist im Allgemeinen aufgrund der vorhandenen Trägheitskräfte nicht stationär während der Bewegungsantwort des Tragwerks. Dies führt sogar mit der zugrundeliegenden vereinfachten starr-plastischen Theorie bereits bei einfachen Problemstellungen zu komplizierten Berechnungen. Nur für wenige einfache Plattenbeispiele wie die Kreisplatte [Hopkins & Prager 1954] oder die Quadratplatte [Cox & Morland 1959] unter gleichförmiger Stossbelastung (Kraftstoss) konnten vollständige Lösungen für spezifische Fliessbedingungen (Fliessbedingung von Tresca respektive Johansen) hergeleitet werden.

In diesem Kapitel werden dynamische Belastungen in Form von Kraftstoss und Aufprallstoss betrachtet, welche grösser als die statischen Traglasten nach der Plastizitätstheorie sind und während einer sehr kurzen Dauer auf ein Tragwerk wirken.

Historisch bedingt stellt der Kragbalken unter dynamischer Beanspruchung ein wichtiges Tragsystem dar. Aufgrund dessen statischer Bestimmtheit ist der Kragbalken besonders geeignet, um die wesentlichen dynamischen Eigenschaften aufzuzeigen, welche sinngemäss auch für andere Tragsysteme gelten. [Parkes 1955] zeigte am Beispiel eines starr-plastischen Kragbalkens unter Aufprallstoss mit der analytischen Lösung, dass die Verschiebungen entlang des Kragbalkens vom Verhältnis der Masse des Aufprallkörpers zur Masse des Kragbalkens abhängig sind. Die theoretischen Ergebnisse wurden mit Experimenten (metallische Tragwerke) verifiziert. Dabei zeigte sich, dass mit einem starr-plastischen Materialmodell das komplexe dynamische Tragverhalten qualitativ richtig beschrieben werden kann. Diese Erkenntnis hat zahlreiche nachfolgende Arbeiten beeinflusst.

Symonds verweist erstmals auf das Energieverhältnis R, bei welchem elastische Effekte für grosse Aufprallenergien im Vergleich zur Energie aus plastischen Verformungen vernachlässigbar sind. Des Weiteren erarbeiteten Bodner & Symonds ein Modell zur Erfassung weiterer Einflussgrössen wie beispielsweise Dehnrateneffekten, womit quantitativ eine gute Übereinstimmung zwischen Analyse und Experiment am Beispiel des Kragbalkens aus metallischem Baustoff erreicht werden konnte.

Mit dem Kragbalken in Abb. 5.12 (a) wird vorerst die vollständige Lösung nach der Plastizitätstheorie für eine statische Einzellast F am Kragarmende mit derjenigen einer Sprungbelastung $F(t) = F$ für $t > 0$ verglichen und es werden Besonderheiten aufgezeigt.

Bei einer starr-plastischen Modellierung des Tragwerksverhaltens unter Stossbelastung $F(t)$ erfährt das Tragwerk eine beschleunigende Bewegung, sobald die dynamische Last eine höhere Intensität (Lastmaximum) erreicht als die (quasi-)statische Traglast. Das Beispiel zeigt auf, wie die Intensität der Sprungbelastung $F > F_u$ die Verformungen des Kragbalkens beeinflusst. Der Querkraft- und Biegemomentenverlauf entlang des Kragbalkens infolge einer am freien Balkenende wirkenden statischen Traglast $F_u = M_u/l$ betragen $V_z(x) = F_u$ und $M_y(x) = -F_u x = -M_u$, Abb. 5.12 (c), (i), wobei angenommen wird, dass sich das plastische Gelenk an der Einspannstelle ausbildet.

Die dynamische Analyse erfordert die vorgängige Annahme eines kinematisch verträglichen Geschwindigkeitsfeldes. Es wird angenommen, dass sich das plastische Gelenk an der Einspannstelle B bildet, sobald die Sprunglast $F > F_u$ erreicht. Demzufolge erfährt der Kragbalken eine beschleunigende Wirkung und rotiert um die Einspannstelle. Aus dem Momentengleichgewicht

$$Fl - M_u = \frac{1}{3} m_B l^2 \frac{\mathrm{d}\dot{W}}{\mathrm{d}t} \tag{5.66}$$

um die Einspannstelle B erhält man die Beschleunigung des Kragbalkens am freien Kragbalkenende:

$$\ddot{W} = \frac{\mathrm{d}\dot{W}}{\mathrm{d}t} = \frac{3(F - F_u)}{m_B l} \tag{5.67}$$

wobei m_B die Masse des Balkens pro Längeneinheit bezeichnet. Die Querkraft und das Biegemoment betragen

$$\begin{aligned} V_z(x) &= \frac{\partial M_y}{\partial x} = -\frac{1}{2}(F - 3F_u) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 (F - F_u) \\ M_y(x) &= \int_x V_z \mathrm{d}x = \frac{3}{2}(F - F_u)\left(\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{3l^2} - x\right) + \frac{1}{2}(F - 3F_u)x \end{aligned} \tag{5.68}$$

wobei die Integrationskonstanten mit den Randbedingungen $V_z(x = L) = 0.5(F - 3F_u)$ (aus vertikalem Kräftegleichgewicht) und $M_y(x = l) = -M_u = -F_u l$ bestimmt werden.

Die Plastizitätskontrolle erfordert den Nachweis, dass ein statisch zulässiger Spannungszustand vorliegt. Aus Abb. 5.12 (c), (ii) ist ersichtlich, dass für $F_u < F \leq 3F_u$ ein statisch zulässiger Spannungszustand vorliegt. Für $F > 3F_u$ würde die Querkraft gemäss $(5.68)_1$ im Bereich der Einspannstelle ($x = l$) negative Werte annehmen und das maximale Biegemoment würde den Biegewiderstand, der über die Länge des Bauteils konstant sein soll, überschreiten, $M_y > M_u$. Somit wäre die Plastizitätsbedingung eines statisch zulässigen Spannungszustands in diesen Bereichen nicht erfüllt. Demnach muss ein alternatives Geschwindigkeitsfeld gewählt werden, um zu einer vollständigen Lösung zu gelangen.

Für $F > 3F_u$ wird daher angenommen, dass sich das plastische Gelenk im Abstand $x = \zeta$ vom freien Kragbalkenende ausbildet, Abb. 5.12 (c), (ii). Das Kragbalkensegment AG rotiert um G und das Segment BG bleibt starr. Aus dem Momentengleichgewicht um G erhält man

$$F\zeta - M_u = \frac{1}{3} m_B \zeta^2 \frac{\mathrm{d}\dot{W}}{\mathrm{d}t} \tag{5.69}$$

und aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht ergibt sich die Kraft als Funktion der Beschleunigung:

$$F = \frac{1}{2} m_B \zeta \frac{\mathrm{d}\dot{W}}{\mathrm{d}t} \tag{5.70}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass die Querkraft am Ort des plastischen Gelenks null ist, $V_z(x = \zeta) = 0$. Weiter erhält man mit den Beziehungen (5.69) und (5.70) die Stelle des plastischen Gelenks

$$\zeta = \frac{3F_u l}{F} \tag{5.71}$$

und die Beschleunigung des Kragbalkens am freien Kragbalkenende

$$\frac{\mathrm{d}\dot{W}}{\mathrm{d}t} = \ddot{W} = \frac{2F^2}{3m_B l F_u} \tag{5.72}$$

Der Ort des plastischen Gelenks, $x = \zeta$, ist gemäss der Beziehung (5.71) von der Belastungsintensität abhängig, jedoch unabhängig von der Zeit t, d. h. das Gelenk bleibt stationär. In Abb. 5.12 (b) ist die Beschleunigung des Kragbalkens am freien Kragbalkenende in Abhängigkeit von der Lastintensität $\eta = F/F_u$ dargestellt.

Die Querkraft und das Biegemoment betragen für $F > 3F_u$

$$\begin{aligned} V_z(x) &= \frac{\partial M_y}{\partial x} = F\left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^2 \\ M_y(x) &= \int_x V_z \mathrm{d}x = -F_u l + \frac{F\zeta}{3}\left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^3 \end{aligned} \tag{5.73}$$

wobei die Integrationskonstanten mit den Randbedingungen $V_z(x = \zeta) = 0$ und $M_y(x = \zeta) = -M_u = -F_u l$ bestimmt werden.

Bei einer starr-plastischen Idealisierung des Tragverhaltens erfolgt die gesamte Energiedissipation in den plastischen Gelenken respektive Gelenkbereichen. Zwischen den Spannungen und Dehnungen gibt es keine eindeutige Beziehung. Daher sind Grenzwertsätze, vergleiche Kapitel 5.5.2, wichtige Hilfsmittel, um die tatsächliche Tragwerksantwort einzugrenzen und um die wesentlichen dynamischen Grundlagen zu verstehen. Wegweisend war dabei eine Arbeit basierend auf dem plastischen Potential und dem Prinzip der virtuellen Leistungen von [Martin 1964], in welcher Grenzwerte für die maximale Verschiebung und die Dauer der Tragwerksantwort hergeleitet wurden. Anschliessend wurden zahlreiche weitere dynamische Grenzwerte hergeleitet und deren Anwendungsgrenzen diskutiert. Die Arbeit von [Martin & Symonds 1966] war wegweisend für Näherungslösungen. Das von ihnen entwickelte Modalform-Näherungsverfahren für Impulsbelastungen, Kapitel 5.5.3, war die Grundlage für die Erarbeitung zahlreicher Näherungsverfahren ([Kaliszky 1970], [Jones 1971], [Jones 1989]).

In Kapitel 5.5.4 werden die analytischen Lösungen für den starr-plastischen Kragbalken unter einem rechteckförmigen Kraftstoss und unter Aufprallstoss diskutiert. Die analytischen Lösungen setzen sich aus verschiedenen Phasen zusammen. Dabei wird das von

Lee & Symonds eingeführte Konzept des „wandernden" plastischen Gelenks für den Kraftstoss mit $F > 3F_u$ und den Aufprallstoss verwendet, d. h. das Gelenk bleibt während der Bewegung nicht stationär und somit formt sich das plastische Gelenk zu Beginn der Bewegung in einem Abstand $x = \zeta$ vom freien Kragbalkenende. Für den Kraftstoss mit $F_u < F \leq 3F_u$ lässt sich eine analytische Lösung mit einem stationären Gelenk an der Einspannstelle finden. Am Ende der Bewegung befindet sich das plastische Gelenk unabhängig von der Lastintensität und Art des Stosses an der Einspannstelle.

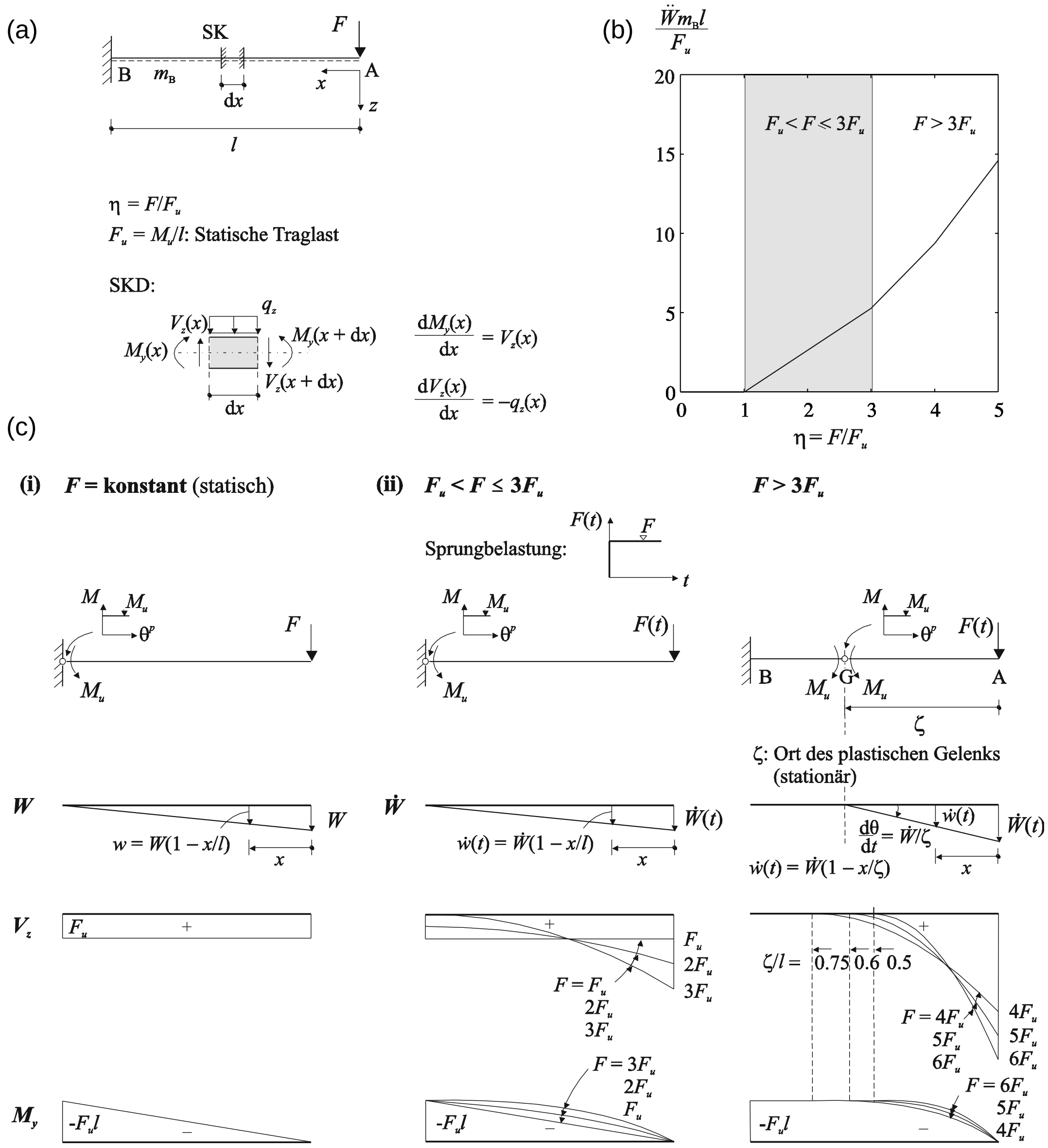


Abb. 5.12 *Starr-plastische Lösung eines Kragbalkens unter statischer Belastung und Sprungbelastung:*
(a) Statisches System, Schnittkörperdiagramm SKD;
(b) Beschleunigung $\ddot{W}$ am Kragbalkenende A;
(c) System mit plastischem Gelenk, Verschiebungs- respektive Geschwindigkeitsdiagramme und Schnittgrössendiagramme:
(i) statische Einzellast F;
(ii) Sprungbelastung F(t) = F für t > 0 am freien Kragbalkenende.

Des Weiteren wird die analytische Lösung für die Quadratplatte unter gleichförmigem Kraftstoss nach [Cox & Morlland 1959] vorgestellt.

Näherungslösungen für Platten unter Kraftstoss und Aufprallstoss, bei welchen die transiente Phase vernachlässigt und nur die stationäre Phase berücksichtigt wird ([Kaliszky 1969], [Kaliszky 1970], [Jones 2003]), führen zu einer wesentlichen Reduktion der mathematischen Komplexität.

[Stronge & Yu 1993] und [Jones 2012] geben einen umfassenden Überblick über die starrplastische Modellierung des Tragverhaltens verschiedener Tragsysteme. Dabei liegt das Schwergewicht auf analytischen Lösungen und es werden auch Auswirkungen Effekte zweiter Ordnung (grosse Durchbiegungen, Dehnrateneffekte) vorgestellt.

5.5.2 Dynamische Grenzwertsätze

Die dynamische Plastizitätstheorie liefert mithilfe des Prinzips der maximalen spezifischen Dissipationsleistung und des Prinzips der virtuellen Leistungen, dynamische Grenzwerte für die Dauer der Tragwerksantwort und die Durchbiegung. Nachfolgend werden die dynamischen Grenzwertsätze analog zu den statischen Grenzwertsätzen für infinitesimal kleine Verschiebungen hergeleitet. Einen unteren (oberen) Grenzwert der maximalen Durchbiegung eines dynamisch belasteten, starr-plastischen Tragwerks lässt sich für einen kinematisch zulässigen Geschwindigkeitszustand (statisch zulässigen Spannungszustand) bestimmen. Das angenommene kinematisch zulässige Geschwindigkeitsfeld respektive das statisch zulässige Spannungsfeld stellt dabei eine separable Funktion von örtlichen Variablen und der Zeit dar.

Die Bewegungsgleichung eines dynamischen Systems lässt sich für ein differentielles Element wie folgt formulieren:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}^{d}}{\partial x} = -\rho \dot{v}_i^{d} + t_i^{d} \tag{5.74}$$

wobei die Kräfte $-\rho \dot{v}_i^{d}$ und t_i^{d} rechterhand von (5.74) die Trägheitskräfte und die auf den Körper einwirkenden Volumenkräfte bezeichnen und σ_{ij}^{d} einen dynamisch zulässigen Spannungszustand darstellt.

Mit einer virtuellen Geschwindigkeit $\dot{u}_i^{k} = v_i^{k}$ lässt sich ein beliebiges kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld darstellen. Die Integration des Skalarproduktes aus $-\partial \sigma_{ij}^{d}/\partial x$ nach der Beziehung (5.74) und v_i^{k} über das gesamte Körpervolumen V unter Berücksichtigung der virtuellen Leistung der (äusseren) Oberflächenkräfte F_i liefert unter Beachtung der Symmetrie des Spannungstensors $(\sigma_{ij}^{d}\, \partial v_i^{k}/\partial x = \sigma_{ij}^{d}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{k})$ für einen homogenen Körper mit einem Volumen V und einer Oberfläche S:

$$\int_V \left(-\rho \dot{v}_i^{d} + t_i\right) v_i^{k}\, \mathrm{d}V + \int_S F_i v_i^{k}\, \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}^{d}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{k}\, \mathrm{d}V \tag{5.75}$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen nach der Beziehung (5.75) wird ein beliebiges kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld v_i^{k} mit einem beliebigen dynamisch zulässigen Spannungszustand σ_{ij}^{d}, welcher mit den äusseren Kräften F_i im Gleichgewicht ist, in Beziehung gestellt.

Unterer Grenzwert für die Dauer der Tragwerksantwort

Ein unterer Grenzwert für die Dauer der Tragwerksantwort, $t_f^{k} \le t_f$, lässt sich für einen kinematisch zulässigen Geschwindigkeitszustand $\left(v_i^{k}, \varepsilon_{ij}^{k}\right)$ ermitteln, wobei $v_i^{k}(x_j, t)$ das kinematisch zulässige Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Die gesamte Dissipationsleistung während der Tragwerksantwort t_f genügt der Ungleichung

$$\dot{D}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}\right)=\int_{V}\sigma_{ij}^{k}\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}\mathrm{d}V\geq\int_{V}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}\mathrm{d}V=\int_{V}\left(-\rho\dot{v}_{i}\right)v_{i}^{k}\mathrm{d}V+\int_{S}F_{i}v_{i}^{k}\mathrm{d}S \tag{5.76}$$

welche sich mithilfe des Prinzips der virtuellen Leistungen (5.75) und des Prinzips der maximalen spezifischen Dissipationsleistung (3.64) unter Vernachlässigung der Volumenkräfte, $t_i = 0$, ergibt. Dabei bezeichnen v_i ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld und σ_{ij} einen beliebigen Spannungszustand, welcher nirgends die Fliessbedingung verletzt. Zu Beginn der Bewegung wird der Körper durch ein impulsartiges Geschwindigkeitsfeld $v_i(x_j,t = 0) = v_{0i}$ und eine statisch zulässige äussere Belastung $F_i(x_j,t)$ beansprucht. Diese statisch zulässige Belastung F_i beeinflusst die Bewegungsdauer, jedoch werden diese als genügend klein angenommen, so dass diese die kinetische Energie des Körpers nicht erhöhen. Am Ende der Tragwerksantwort, $t = t_f$, beträgt die Geschwindigkeit $v_i(x_j,t = t_f) = 0$.

Ein unterer Grenzwert für die Dauer der Tragwerksantwort wurde erstmals von [Martin 1964] anhand eines kinematisch zulässigen und zeitunabhängigen Geschwindigkeitsfeldes $v_i^k(x_j,t) = v_i^k(x)$ hergeleitet. Die zeitliche Integration von Gleichung (5.76) mit den Intervallen $[t = 0,t = t_f]$ liefert einen unteren Grenzwert für die Dauer t_f^k der Tragwerksantwort:

$$t_f\geq t_f^k=\frac{\int_{S}v_i^k\int_{t=0}^{t_f}F_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S+\int_{V}\rho v_{0i}v_i^k\,\mathrm{d}V}{\dot{D}\left(v_i^k\right)} \tag{5.77}$$

Der Grenzwert nach der Beziehung (5.77) hängt von der gewählten Form des Geschwindigkeitsfeldes $v_i^k(x)$ ab, ist jedoch unabhängig von der Grösse der Geschwindigkeit. Des Weiteren ist es nicht erforderlich, dass die Oberflächenkräfte F_i eine separate Funktion der Zeit und des Ortes darstellen ([Kaliszky 1970], [Stronge 1983]).

Oberer Grenzwert für die Durchbiegung

Gleichung (5.76) lässt sich für ein zulässiges Geschwindigkeitsfeld $v_i^k = v_i$ wie folgt ausschreiben:

$$\int_{S}F_iv_i\,\mathrm{d}S-\int_{V}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}V=\int_{V}\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}\left(v_iv_i\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V \tag{5.78}$$

Die zeitliche Integration von Gleichung (5.78) mit den Intervallen $[t = 0,t]$ unter Berücksichtigung eines auf den Körper einwirkenden impulsartigen Geschwindigkeitsfeldes $v_i(x_j,t = 0) = v_{0i}$ zum Beginn der Bewegung liefert:

$$\int_{S}\int_{0}^{t}F_iv_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S-\int_{V}\int_{0}^{t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V=-\int_{V}\frac{\rho}{2}v_{0i}v_{0i}\,\mathrm{d}V \tag{5.79}$$

Ein oberer Grenzwert für die maximale Durchbiegung an einem Ort $\bar{x}$ des Tragwerks lässt sich durch Betrachtung eines statisch zulässigen Spannungszustandes ermitteln. Die statisch zulässige äussere Belastung wird mit F_i^s bezeichnet; sie greift am Ort $\bar{x}$ an und ist mit dem statisch zulässigen Spannungsfeld im Gleichgewicht.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen für den statisch zulässigen Spannungszustand lautet

$$\int_0^t F_i^s v_i\left(\bar{x},t\right)\mathrm{d}t + \int_V \frac{\rho}{2} v_i v_i \mathrm{d}V = \int_V \int_0^t \sigma_{ij}^s \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}t\mathrm{d}V \leq \int_V \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}t\mathrm{d}V \tag{5.80}$$

Die Differenz der Leistung der äusseren Kräfte F_i^s und F_i ergibt sich gemäss den Beziehungen (5.79) und (5.80) zu:

$$\int_0^t F_i^s v_i\left(\bar{x},t\right)\mathrm{d}t - \int_S \int_0^t F_i v_i \mathrm{d}t\mathrm{d}S = \int_V \frac{\rho}{2}\left(v_{0i} v_{0i} - v_i v_i\right)\mathrm{d}V + \int_V \int_0^t \left(\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}t\mathrm{d}V \tag{5.81}$$

Die zeitliche Integration von Gleichung (5.81) mit den Intervallen [$t = 0, t = t_f$] und die Vernachlässigung des letzten Integralterms rechterhand von (5.81) lässt auf einen oberen Grenzwert für die maximale Durchbiegung

$$W_f \geq \frac{\int_S \int_0^t F_i v_i \mathrm{d}t\mathrm{d}S + \int_V \frac{\rho}{2} v_{0i} v_{0i} \mathrm{d}V}{F_i^s\left(\bar{x},t_f\right)} \tag{5.82}$$

am Ort $\bar{x}$ des Tragwerks schliessen, wobei $v_i(x_j, t = t_f) = 0$ ist.

Der obere Grenzwert für die maximale Durchbiegung an einem Ort $\bar{x}$ wurde erstmals von [Martin 1964] für ein impulsartiges Geschwindigkeitsfeld $v_{0i} > 0$ und $F_i(x,t) = 0$ bestimmt. Die Beziehung (5.82) vereinfacht sich zu

$$F_i^s W_f \geq \int_V \frac{\rho}{2} v_{0i} v_{0i} \mathrm{d}V = T_0 \tag{5.83}$$

und besagt, dass die Leistung der statischen Traglast F_u stets kleiner oder gleich der kinetischen Anfangsenergie T_0 ist, da nach dem unteren (statischen) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie $F_u \geq F_s$ gilt.

Somit resultiert aus (5.83) die Beziehung

$$W_f \leq \frac{T_0}{F_u} \leq \frac{T_0}{F_s} \tag{5.84}$$

für die Durchbiegung.

Ein unterer Grenzwert für die maximale Durchbiegung wurde von [Morales & Nevill 1970] und [Morales 1972] entwickelt und von [Wierzbicki 1972] präzisiert.

[Ploch & Wierzbicki 1981] erweiterten den oberen Grenzwert der Durchbiegung nach (5.82) unter Einbezug von Effekten zweiter Ordnung (grosse Durchbiegungen).

Erweiterungen der dynamischen Grenzwertsätze für starr-plastisches Materialverhalten wurden für elastisch-plastisches oder auch auf für viskoses Materialverhalten ([Martin 1967], [Symonds & Wierzbicki 1975]) gemacht.

[Stronge 1985] untersuchte die Einflussgrössen der Tragwerkseigenschaften und der Belastungskonfiguration auf die dynamischen Grenzwerte hinsichtlich ihrer Genauigkeit. Dabei wurde generell festgestellt, dass der Bereich zwischen den unteren und oberen Grenzwerten bei (eindimensionalen) Stabtragwerken unter gleichförmiger Belastung klein ist und für (zweidimensionale) Flächentragwerke und unter konzentrierter Belastung grösser ist.

5.5.3 Eigenformen

Neben den vorgängig beschriebenen dynamischen Grenzwertsätzen wurden Modalform-Näherungslösungen erarbeitet, welche im Allgemeinen eine bessere Übereinstimmung mit analytischen Lösungen aufzeigen, da sie im Vergleich zu den Grenzwertsätzen auf einer verbesserten Abschätzung der Verschiebungskonfiguration beruhen. Modalform-Lösungen sind von grundlegender Wichtigkeit für das Verständnis und die Berechnung der Verformungen eines Tragwerks aufgrund einer Stossbeanspruchung.

Die Verformungen eines Tragwerks unter einer grossen Stossbeanspruchung lassen sich im Allgemeinen in zwei Phasen unterteilen: Eine initiale transiente (instationäre) Phase gefolgt von einer stationären modalen Phase. Ausgehend von einem eingeführten initialen Geschwindigkeitsfeld ändert sich das Verschiebungsfeld während der transienten Phase (Phase 1) kontinuierlich, bis eine Modalform erreicht wird, in welcher das Verschiebungsfeld konstant bleibt (Phase 2). In den meisten Fällen wird ein grosser Teil der Aufprallenergie während der stationären Phase, der Phase 2, in welcher sich eine Modalform-Konfiguration einstellt, dissipiert [Stronge & Yu 1993].

Modalform-Näherungslösung für Impulsbelastung

Bei der Modalform-Näherungslösung (engl.: mode approximation technique) nach [Martin & Symonds 1966] für starr-plastische, impulsartig beanspruchte Tragwerke wird der Verschiebungszustand während der Bewegung durch die Annahme eines stationären Durchbiegungsfeldes vereinfacht. Die Form des Verschiebungsfeldes wird durch eine Formfunktion $\phi_i^*(x_j)$, auch Modalform oder Eigenform genannt (engl.: mode oder mode shape), beschrieben und bleibt während der Bewegung konstant.

Eine Modalform-Lösung betrachtet ein Geschwindigkeitsfeld $\dot{w}_i^*(x_j, t)$, welches sich durch Multiplikation von zwei separaten Funktionen für die zeitlichen und örtlichen Variablen bildet:

$$\dot{w}_i^*(x_j, t) = v^*(t)\phi_i^*(x_j) \tag{5.85}$$

wobei $v^*(t)$ die zeitabhängige Geschwindigkeitsamplitude und $\phi_i^*(x_j)$ die von der Lage x_j abhängige Modalform bezeichnen. Das wirkliche Geschwindigkeitsfeld $v_i(x_j, t)$ stellt generell nicht eine separate Funktion der zeitlichen und örtlichen Variablen dar.

Das initiale (anfängliche) Geschwindigkeitsfeld für $t = 0$ lässt sich in der Form

$$\dot{w}_i^*(x_j, t = 0) = v_0^*(t)\phi_i^*(x_j) \tag{5.86}$$

beschreiben, wobei $v_0^*(t)$ das Anfangsgeschwindigkeitsfeld darstellt. Das Näherungsverfahren ersetzt somit das wirkliche Anfangsgeschwindigkeitsfeld $\dot{w}_i\,(x_j, t = 0) = \dot{w}_{0i} = v_{0i}$ mit einem modalen Anfangsgeschwindigkeitsfeld. Das modale Geschwindigkeitsfeld $\dot{w}_i^*$ und das zugehörige modale Beschleunigungsfeld $\ddot{w}_i^*$ weisen die gleiche Form auf, d. h. $\ddot{w}_i^* = \dot{v}_0^*(t)\phi_i^*(x_j)$.

Anhand einer Funktion $\Delta_0(t)$ lässt sich der Unterschied zwischen dem initialen, modalen Geschwindigkeitsfeld $v_0^*(t)\varphi_i^*(x_j)$ und dem impulsartig aufgebrachten, wirklichen Geschwindigkeitsfeld $\dot{w}_i(x_j,t=0) = \dot{w}_{0i}$ mittels der kinetischen Energie aufgrund der Differenz der beiden Geschwindigkeitsfelder quantifizieren:

$$\Delta_0\left(v_0^*\right) = \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\dot{w}_{0i} - v_0^*\varphi_i^*\right)\left(\dot{w}_{0i} - v_0^*\varphi_i^*\right)\mathrm{d}V \tag{5.87}$$

Da beide Geschwindigkeitsfelder vollständige Lösungen darstellen, nimmt der Unterschied $\Delta(t)$ zwischen der modalen Näherungsgeschwindigkeit und der tatsächlichen Geschwindigkeit kontinuierlich ab, d. h. $\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}t \leq 0$. Die Differenz Δ_0 ergibt sich aufgrund der geometrischen Unterschiede zwischen dem initialen, modalen Geschwindigkeitsfeld und dem wirklichen Anfangsgeschwindigkeitsfeld. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0^* der Modalform-Lösung, welche diese Differenz Δ_0 minimiert, lässt sich mit der Ableitung

$$\mathrm{d}\Delta_0 / \mathrm{d}v_0^* = 0 \tag{5.88}$$

bestimmen und beträgt:

$$v_0^* = \frac{\int_V \rho \dot{w}_0 \phi_i^* \mathrm{d}V}{\int_V \rho \phi_i^* \phi_i^* \mathrm{d}V} \tag{5.89}$$

Die initiale kinetische Energie der Modalform-Lösung T_0^* mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0^* nach der Beziehung (5.89) ist stets kleiner oder gleich der wirklichen, initialen kinetischen Energie T_0, $T_0^* \leq T_0$.

Mit der sogenannten Minimum-Δ_0-Methode, Gleichung (5.87), lässt sich der „beste" Wert für die modale Anfangsgeschwindigkeit v_0^* berechnen, um damit eine Näherungslösung für die maximale Verschiebung zu bestimmen, d. h. es handelt sich bei der Lösung nicht etwa um einen oberen oder unteren Grenzwert für die Verschiebung.

Die „richtige" Wahl der Modalform ϕ_i^* ist von zentraler Bedeutung. Diesbezüglich stellt sich die Frage, ob die erste Modalform gegenüber höheren Modalformen massgebend ist. Die plastischen Verformungen eines Tragwerks führen generell fast immer zu einer Verformungskonfiguration, die der ersten Modalform entspricht [Stronge & Yu 1993].

[Symonds 1980] untersuchte verschiedene Kriterien zur Bestimmung derjenigen Modalformen, die zur besten Näherungslösung von impulsartig beanspruchten Tragwerken führen. Dabei hat er festgestellt, dass diejenige Modalform, welche den grössten unteren Grenzwert für die dynamische Dauer t_f^k der Tragwerksbewegung, Gleichung (5.77) mit $F_i = 0$ (Impulsbelastung), liefert, generell zur genauesten Modalform-Näherungslösung führt. [Martin 1981] erarbeitete ein iteratives Verfahren, um die massgebende Modalform zu ermitteln.

Eigenschaften von Modalformen

[Martin & Symonds 1966] haben das Konvergenzverhalten eines dynamischen Verschiebungsfeldes einer starr-plastischen, impulsartig beanspruchten Tragstruktur zu einer Modalform bewiesen. Die Konvergenz zu einer Modalform erfolgt umso schneller, je ähnlicher das initiale Anfangsgeschwindigkeitsfeld und das modale Geschwindigkeitsfeld sind.

[Lee & Martin 1970] und [Lee 1972] haben ein kinematisches Extremalprinzip erarbeitet, um die Eigenschaften einzelner Modalformen zu bestimmen. Für die Bestimmung einzelner Modalformen wird eine Funktion $J^*(\dot{w}_i^k)$ für die Ableitung der kinetischen Energie nach der Zeit (Leistung der Trägheitskräfte) eines kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes $\dot{w}_i^k$ eingeführt. Diese sogenannte Dissipationsleistung J^* für die kinetische Energie beträgt

$$J^*(\dot{w}_i^k) = \frac{\dot{D}^k - \int_S F_i \dot{w}_i^k \, \mathrm{d}S}{\sqrt{T^k}} \tag{5.90}$$

wobei $T^k = \int_V (\rho \dot{w}_i^k \dot{w}_i^k / 2)\, \mathrm{d}V$ und $\dot{D}^k = \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\varepsilon}_{ij}^k \mathrm{d}V$ die kinetische Energie und die Dissipationsleistung bezeichnen. Die Beziehung (5.90) wird als Lee's Funktion (engl.: Lee's functional) bezeichnet und kann für die Ermittlung der Modalformen eines starr-plastischen Tragwerks basierend auf dem Prinzip der minimalen spezifischen Dissipationsleistung verwendet werden. Aus allen kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldern $\dot{w}_i^k$, welche zu einer identischen kinetischen Energie des Systems führen, ergeben sich für die Modalform-Lösungen Extrema der Funktion J^*. Diese Extrema können stationäre Maxima, Minima oder Sattelpunkte von J^* darstellen.

Ein Tragwerk, das plastische Verformungen erfährt, kann eine Vielzahl von Modalformen aufweisen, wobei diese in der gleichen Weise nummeriert werden können wie diejenigen Modalformen, die sich bei elastischen Verformungen ergeben. Die Anzahl der Modalformen erhöht sich mit der Anzahl sich bildender plastischer Gelenke. Stabile Modalformen sind lokale Minima für J^*, während Maxima und Sattelpunkte instabil sind.

In der Endphase der Tragwerksbewegung stellen diese immer eine stabile Modalform dar, ausser wenn das initiale Geschwindigkeitsfeld mit einer instabilen Modalform identisch ist [Martin 1981]. Unter allen möglichen stabilen Modalformen gibt es immer eine Modalform, welche zu einer minimalen spezifischen Dissipationsleistung J^* führt; dieser Mechanismus wird auch als erste Eigenform oder Modalform bezeichnet.

5.5.4 Analytische Lösungen

Das Konzept des wandernden plastischen Gelenks wurde erstmals von [Lee & Symonds 1952] eingeführt. Dieses Konzept des wandernden Rotationsgelenks wird sinngemäss für die nachfolgenden Beispiele eines Kragbalkens unter Kraftstoss und Aufprallstoss verwendet. Die Lösung beruht auf der Unterteilung des gesamten Bewegungsvorgangs in einzelne Phasen.

Die analytische Lösung eines Kragbalkens unter Aufprallstoss von [Parkes 1955] beeinflusste zahlreiche nachfolgende Arbeiten, da mit diesem Beispiel an Experimenten verifiziert werden konnte, dass das Tragverhalten als starr-plastisch modelliert werden kann.

Für Platten wurde erstmals von [Hopkins & Prager 1954] die analytische Lösung einer Kreisplatte unter rechteckförmiger Stossbeanspruchung (Kraftstoss) unter Verwendung des Fliesskriteriums von Tresca hergeleitet. Basierend auf der Arbeit von Hopkins & Prager erarbeiteten [Cox & Morland 1959] die analytische Lösung einer Quadratplatte unter rechteckförmiger Stossbeanspruchung unter Verwendung des Fliesskriteriums von Johansen.

Kragbalken unter Kraftstoss

Am Beispiel eines Kragbalkens mit der Masse m_B pro Längeneinheit unter einem am Kragarmende einwirkenden dynamischen, rechteckförmigen Kraftstoss $F(t) = F_0$ für $0 \leq t \leq t_d$ und $F(t) = 0$ für $t > t_d$ wird die Problemstellung des starr-plastischen Tragverhaltens erläutert, Abb. 5.13.

In Kapitel 5.5.1 wurde für den Kragbalken mit einem starr-plastischen Materialverhalten aufgezeigt, dass der Ort des Auftretens des plastischen Gelenks und somit das Geschwindigkeitsfeld für eine Sprungbelastung von der Intensität der dynamisch aufgebrachten Last F_0 im Vergleich zur statischen Traglast F_u, $\eta = F_0/F_u$, abhängig ist. Bei einer Lastintensität $\eta = F_0/F_u > 3$ würde der Mechanismus nach der Plastizitätstheorie für statische Lasten mit dem plastischen Gelenk bei der Einspannstelle zu einer Verletzung der Fliessbedingungen für einen gewissen Bereich bei der Einspannstelle führen, so dass das plastische Gelenk bei $x = \zeta$ angenommen werden muss.

Die Phase 1 entspricht der in Kapitel 5.5.1 aufgezeigten Phase für eine Sprungbelastung und endet zum Zeitpunkt $t = t_d$, d. h. am Ende der Stossdauer, da der Kraftstoss dort eine Diskontinuität aufweist. Das plastische Gelenk bleibt dabei ebenfalls stationär.

Die Geschwindigkeit $\dot{W}$ und die Durchbiegung W des Kragbalkens am freien Kragbalkenende für den Kraftstoss $F(t) = F_0$ für $0 \le t \le t_d$ mit $F_u < F_0 < 3F_u$ erhält man durch Integration der Beschleunigung nach Gleichung (5.72)

$$\dot{W} = \dot{W}_1 = \frac{3(F_0 - F_u)}{m_B l} t \tag{5.91}$$

und

$$W = W_1 = \frac{3}{2} \frac{(F_0 - F_u)}{m_B l} t^2 \tag{5.92}$$

unter Verwendung der Anfangsbedingungen $\dot{W}(t = 0) = 0$ und $W(t = 0) = 0$. Die Phase 2 beginnt zum Zeitpunkt $t = t_d$, d. h. wenn die Belastung $F_0 = 0$ ist. Als Übergangsbedingung müssen die Geschwindigkeit $\dot{w}(t)$ und die Verschiebung $w(t)$ bei $t = t_d$ kontinuierlich sein. Bei einer Lastintensität $1 < \eta = F_0/F_u < 3$, bei dem sich ein Mechanismus mit einem Fliessgelenk an der Einspannstelle ausbildet, wird die Fliessbedingung nirgends verletzt und die analytische Lösung besteht demzufolge aus zwei Phasen.

Die Integration von Gleichung (5.72) für die Beschleunigung mit $F_0 = 0$ ergibt die Geschwindigkeit

$$\dot{W} = \dot{W}_2 = -\frac{3F_u}{m_B l} t + \frac{3F_0}{m_B l} t_d \tag{5.93}$$

während der Phase 2, wobei die Integrationskonstante mit der Übergangsbedingung $\dot{W}(t = t_d) = 3(F_0 - F_u) t_d / m_B l$ berechnet wird.

Die Integration von Gleichung (5.93) ergibt mit der Verwendung der Übergangsbedingung $W(t = t_d) = \frac{3}{2} \frac{(F_0 - F_u)}{m_B l} t_d^2$ die Durchbiegung

$$W = W_2 = -\frac{3F_u}{2m_B l} t^2 + \frac{3F_0 t_d}{m_B l} t - \frac{3F_0 t_d^2}{2m_B l} \tag{5.94}$$

während der Phase 2.

Der Kragbalken kommt zum Zeitpunkt

$$T = \frac{F_0}{F_u} t_d \tag{5.95}$$

zum Stillstand (Bedingung: $\dot{W}(t = T) = 0$). Die Durchbiegung des freien Kragbalkenendes beträgt dann:

$$W(t = T) = W_f = \frac{3t_d^2}{2m_B l}\left(\frac{F_0^2}{F_u} - F_0\right) \tag{5.96}$$

Für die Lastintensität $\eta > 3$ erhält man aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht

$$\frac{1}{2} m_B \zeta \dot{W} = F_0 t \tag{5.97}$$

mit $0 \le t \le t_d$ und dem Momentengleichgewicht am Segment AG

$$\int_{x=0}^{\zeta} m_B \dot{W}\left(x - \frac{x^2}{\zeta}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} m_B \dot{W} \zeta^2 = M_u t \tag{5.98}$$

den Ort des plastischen Gelenkes während der Phase 1:

$$\zeta = \frac{3M_u}{F_0} = \text{konstant} \tag{5.99}$$

Die Integration von Gleichung (5.72) für die Beschleunigung ergibt mit den Anfangsbedingungen $\dot{W}(t = 0) = 0$ und $W(t = 0) = 0$ die Geschwindigkeit

$$\dot{W} = \dot{W}_1 = \frac{2F_0^2}{3m_B l F_u} t \tag{5.100}$$

und die Durchbiegung

$$W = W_1 = \frac{F_0^2 t_d^2}{3m_B l F_u} t^2 \tag{5.101}$$

Die Phase 2 zeichnet sich durch das ausgehend von $x = \zeta$ bis $x = l$ (Einspannstelle) wandernde plastische Gelenk mit einer konstanten Geschwindigkeit aus. Den Ort $\zeta(t)$ des plastischen Gelenks erhält man aus dem Momentengleichgewicht (5.98) durch Einsetzen der Geschwindigkeit $\dot{W}$ aus Gleichung (5.97) mit $t = t_d$

$$\zeta = \frac{3F_u l}{I} t \tag{5.102}$$

wobei $I = F_0 t_d$ der Impuls (Fläche unter Kurve) ist.

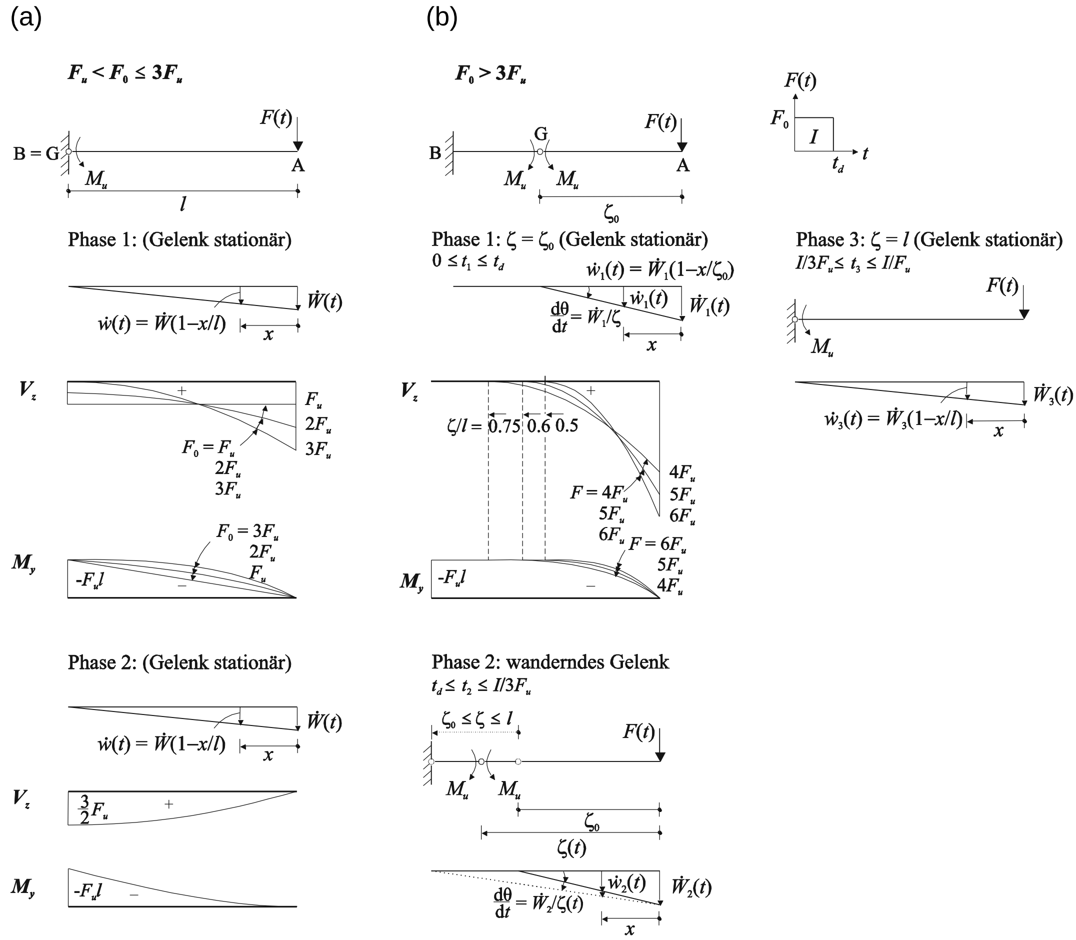


Abb. 5.13 *Analytische Lösung eines dynamisch belasteten Kragbalkens: System mit Belastung und plastischem Gelenk, Geschwindigkeitsfeld, Biegemomenten- und Querkraftverlauf für Belastungsintensität:*
(a) $F_u < F_0 < 3F_u$;
(b) $F_0 > 3F_u$.

Die Geschwindigkeit des freien Kragbalkenendes beträgt während der Phase 2

$$\dot{W} = \dot{W}_2 = \frac{2I}{m_B \zeta} = \frac{2I^2}{3 m_B l F_u t} \tag{5.103}$$

wobei $t_d \le t \le t_2$. Dabei beträgt

$$t_2 = \frac{I}{3F_u} \quad (\zeta = l) \tag{5.104}$$

aus Gleichung (5.102) und entspricht dem Zeitpunkt, wenn das plastische Gelenk die Einspannstelle erreicht. Die Durchbiegung am freien Kragbalkenende beträgt während der Phase 2:

$$W = W_2 = \frac{I^2}{3 m_B l F_u}\left(2 \ln(t/t_d) + 1\right) \tag{5.105}$$

Aus den Gleichungen (5.104) und (5.105) ist ersichtlich, dass die Geschwindigkeit des Kragbalkens beim Erreichen des plastischen Gelenks an der Einspannstelle noch einen endlichen Wert besitzt. Daher besteht die Lösung bei einer grossen Lastintensität $\eta \geq 3$ aus drei Phasen. Die Phase 3 ist durch ein stationäres Gelenk an der Einspannstelle gekennzeichnet und dauert solange, bis die Geschwindigkeit null ist. Somit entspricht die Phase 3 bei einer Lastintensität von $\eta > 3$ der Phase 2 bei einer Lastintensität von $1 < \eta < 3$.

Aus der Änderung im Momentengleichgewicht um B erhält man die Geschwindigkeit während der Phase 3:

$$\dot{W} = \dot{W}_3 = \frac{3I}{m_B l} - \frac{3F_u}{m_B l} t \tag{5.106}$$

Den Zeitpunkt T am Ende der Phase 3 erhält man aus der Bedingung $\dot{W}_3(t = T) = 0$, und er beträgt:

$$T = \frac{I}{F_u} \tag{5.107}$$

Die Durchbiegung am Ende der Bewegung beträgt:

$$W(t = T) = W_2 + W_3 = W_f = \frac{I^2}{m_B l F_u}\left(\frac{2}{3}\ln(\eta / 3) + 1\right) \tag{5.108}$$

Die jeweiligen Phasen sind für die entsprechenden Lastintensitäten η in Abb. 5.13 dargestellt.

Der Rotationswinkel lässt sich anhand der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{W}}{l} \tag{5.109}$$

berechnen und beträgt für die jeweiligen Phasen ($\eta > 3$)

$$\theta_1 = -\frac{I^2\eta}{9 m_B F_u l^2}, \quad \theta_2 = -\frac{2I^2}{3 m_B l}, \quad \theta_3 = -\frac{2I^2}{3 m_B F_u l^2} \tag{5.110}$$

Die Durchbiegung, die dissipierte Energie und die Variation der Geschwindigkeit am Kragarmende sind in Abb. 5.14 (a-c) dargestellt.

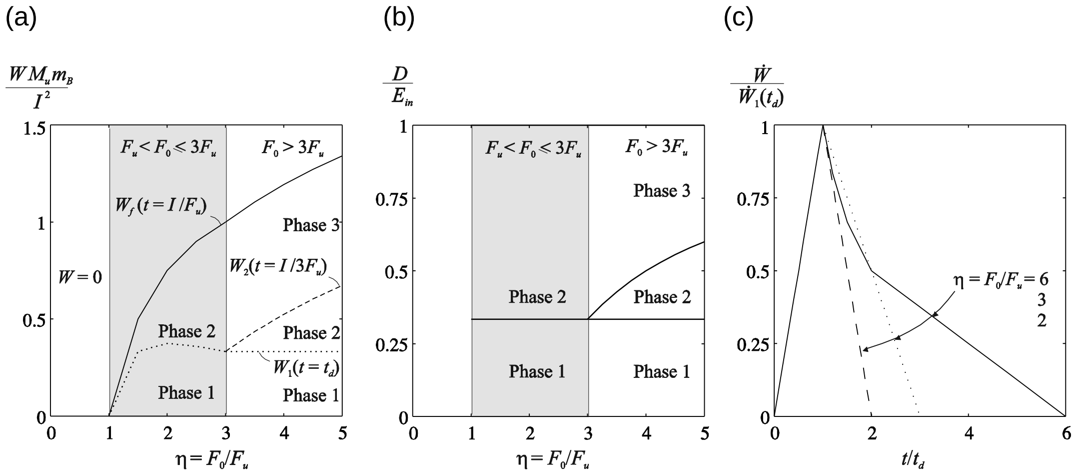


Abb. 5.14 *Analytische Lösung eines dynamisch belasteten Kragbalkens:*
(a) Durchbiegung am Kragarmende;
(b) dissipierte Energie;
(c) Variation der Geschwindigkeit am Kragarmende.

Kragbalken unter Aufprallstoss

Der Kragbalken mit starr-plastischem Materialverhalten unter Aufprallstoss ist ein klassisches Beispiel, welches von [Parkes 1955] gelöst wurde. Verfestigung und Dehnrateneffekte wurden nicht berücksichtigt. Die mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufprallende Masse m wurde als Punktmasse modelliert; Grösse, Form und Verformbarkeit des Aufprallbereichs wurden ausser Acht gelassen. Es wird angenommen, dass die aufprallende Masse und der Kragbalken mit Masse m_B pro Längeneinheit während und nach dem Aufprall aneinander haften bleiben (plastischer Stoss). Für die theoretische Untersuchung wird angenommen, dass das plastische Fliessen des Materials unter reiner Biegebeanspruchung ermittelt werden kann und daher Querkräfte und Membrankräfte vernachlässigt werden können. Typischerweise wird das dynamische Verformungsverhalten eines starr-plastischen Tragelementes infolge eines kurzen Kraftstosses in zwei Phasen unterteilt. Während der ersten Phase der Bewegung, der transienten Phase, wandert das plastische Gelenk ausgehend vom Entstehungsort zu der Einspannstelle. Die Form des Geschwindigkeitsfeldes über die Kragbalkenlänge ändert sich während der Phase 1. Sobald das Gelenk an der Einspannung angekommen ist, beginnt die zweite Phase, die Modalform-Phase, in welcher das Geschwindigkeitsfeld in eine einfachere Form übergeht. Das Geschwindigkeitsfeld konvergiert schliesslich in eine Modalform, d. h. die Form bleibt zeitlich konstant. Das plastische Gelenk bleibt während dieser Phase stationär an der Einspannstelle. Die Bewegung des Kragarmes in Phase 2 ist eine Starrkörperrotation um das Gelenk bei der Einspannstelle. Die bleibende Verformung am Ende der zweiten Phase ist erreicht, sobald die anfängliche kinetische Energie der aufprallenden Masse von dem wandernden Gelenk und dem stationären Gelenk während der ersten und zweiten Phase dissipiert wurde.

Die Geschwindigkeit des Kragbalkens und der aufprallenden Masse ist dann null. Während der Phase 1 ändert sich die Form des Geschwindigkeitsfeldes mit der Zeit; während der Phase 2 verbleibt die Verformung in einer Modalform nachdem das Geschwindigkeitsfeld in eine Modalform konvergiert ist, d. h. die Form ändert sich nicht und weist daher einen Freiheitsgrad auf (vergleiche einmassiges System mit einem Freiheitsgrad). Die Grösse der Geschwindigkeit nimmt während der stationären Phase linear mit der Zeit ab, so dass am Ende der Phase 2 zu der Zeit $t = t_f$ alle Punkte des Tragwerks zur gleichen Zeit zur Ruhe kommen. Abb. 5.15 (a) zeigt die Charakteristiken der Durchbiegung, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung entlang des Kragarmes mit starr-plastischem Materialverhalten während der transienten und stationären Phase.

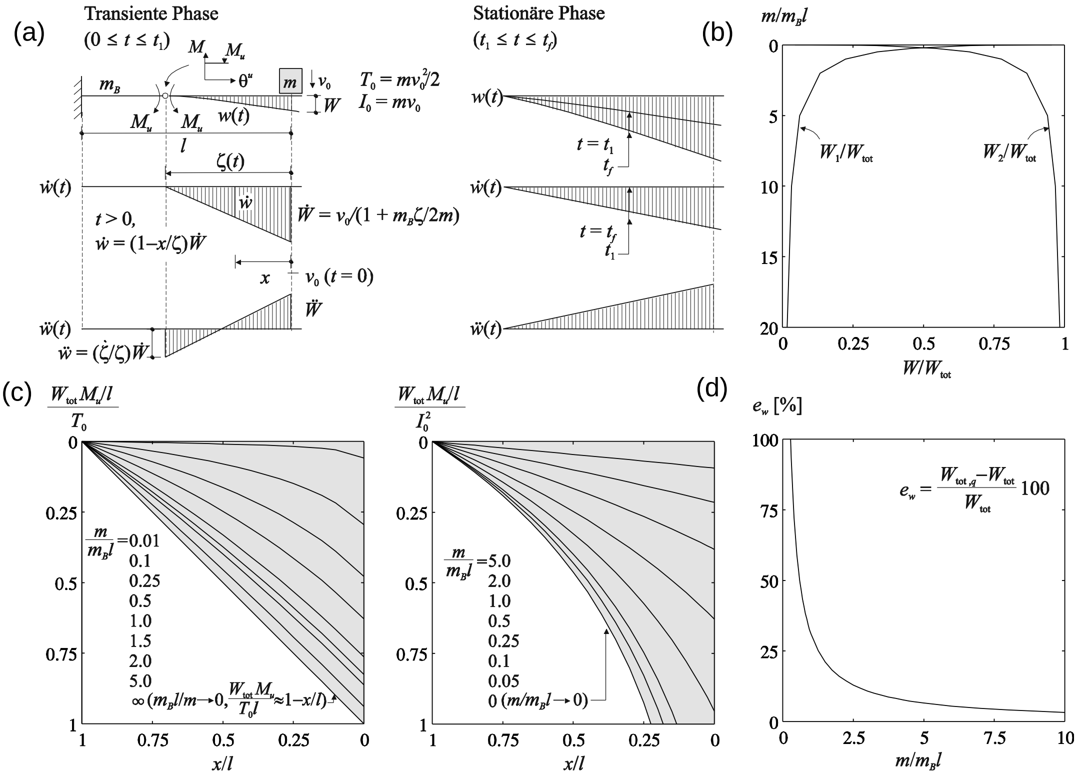


Abb. 5.15 *Einseitig eingespannter Balken mit Masse mB pro Längeneinheit infolge aufprallender Masse m mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 am Kragarmende:*
(a) System mit Durchbiegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung für transiente und stationäre Phase nach [Parkes 1955];
(b) Verhältnisse der Durchbiegungen der Phase 1 und 2 zur Gesamtdurchbiegung, W_1/W_{tot} und W_2/W_{tot};
(c) Lösungsbereich der Durchbiegung des Kragbalkens für verschiedene Massenverhältnisse m/m_Bl (dimensionsfreien Form);
(d) prozentuale Abweichung e_w zwischen analytischer Lösung und „quasi-statischer" Lösung in Funktion des Massenverhältnisses m/m_Bl.

Die Bewegungsgleichung (Gleichgewicht der vertikalen Kräfte: $\Sigma V = 0$) für den Teil zwischen dem plastischen Gelenk und dem freien Balkenende beträgt während der transienten Phase (Phase 1: $0 \le t \le t_1$)

$$m\ddot{W} + \frac{m_B\zeta}{2}\ddot{W} + \frac{m_B\dot{\zeta}}{2}\dot{W} = 0 \tag{5.111}$$

wobei ζ der Lage des plastischen Gelenkes, W der Durchbiegung am freien Kragarmende und m_B der Masse pro Längeneinheit des Kragbalkens entsprechen.

Die Integration von Gleichung (5.111) und die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\dot{W}(t = 0) = v_0$ und $\zeta(t = 0) = 0$ ergibt die Geschwindigkeit

$$\dot{W} = \frac{v_0}{1 + \frac{m_B\zeta}{2m}} \tag{5.112}$$

Die Beschleunigung während der Phase 1 weist eine Diskontinuität an der Stelle $\zeta(t)$ aufgrund des plastischen Gelenkes auf.

Aus dem Momentengleichgewicht ($\Sigma M = 0$) um das freie Balkenende unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\zeta(t = 0) = 0$ und mit Gleichung (5.112) erhält man die Lokalisationszeit t des wandernden plastischen Gelenkes:

$$t = \frac{m_B m v_0 \zeta^2}{3M_u(2m + m_B\zeta)} \tag{5.113}$$

Die Geschwindigkeit $\dot{w}$ an der Stelle x beträgt:

$$\dot{w} = \frac{\zeta - x}{\zeta}\dot{W} \tag{5.114}$$

Durch Integration von Gleichung (5.114) über die Balkenlänge l und unter Berücksichtigung von Gleichung (5.112) folgt die maximale Durchbiegung am freien Balkenende $w(\zeta = l) = W_1$ am Ende der Phase 1

$$W_1 = \frac{m^2 v_0^2}{3m_B M_u}\left[\frac{\beta(3\alpha - 2)}{(1+\beta)} - \frac{\beta\alpha}{(1+\beta\alpha)} + \frac{\beta^2(1-\alpha)}{(1+\beta)^2} + \ln\left(\frac{1+\beta}{1+\beta\alpha}\right)\right] \tag{5.115}$$

wobei $\alpha = x/l$ und $\beta = m_B l/2m$.

Die zugehörige Zeit beträgt:

$$t_1 = \frac{m_B m v_0 l^2}{3M_u(2m + m_B l)} \tag{5.116}$$

Die kinetische Energie der aufprallenden Masse und des Kragbalkens am Ende der Phase 1 beträgt:

$$T_1 = \frac{m v_0^2\left(1 + \frac{m_B l}{3m}\right)}{2\left(1 + \frac{m_B l}{2m}\right)^2} \tag{5.117}$$

Die Dissipationsenergie beträgt $D = M_u\theta^u$. Daraus ergibt sich der Rotationswinkel des plastischen Gelenkes an der Einspannstelle:

$$\theta^u = \frac{m v_0^2\left(1 + \frac{m_B l}{3m}\right)}{2M_u\left(1 + \frac{m_B l}{2m}\right)^2} \tag{5.118}$$

Die Durchbiegung während der Phase 2 beträgt $w_2 = \theta^u(l - x)$ und somit beträgt die maximale Durchbiegung am freien Balkenende ($x = 0$) am Ende der Phase 2:

$$W_2 = \frac{mv_0^2 l\left(1+\frac{m_B l}{3m}\right)}{2M_u\left(1+\frac{m_B l}{2m}\right)^2} = \frac{m^2 v_0^2 \beta(2\beta+3)}{3m_B M_u(1+\beta)^2} \tag{5.119}$$

Die totale Durchbiegung beträgt demnach:

$$W_{\text{tot}} = W_1 + W_2 = \frac{mv_0^2 l}{2M_u}\left[\frac{1}{3(1+\beta)} - \frac{\alpha}{3(1+\beta\alpha)} + \frac{2}{3\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1+\beta\alpha}\right)\right] \tag{5.120}$$

Abb. 5.15 (b) zeigt die Verhältnisse der Durchbiegungen am Ende der Phasen 1 und 2 zur Gesamtdurchbiegung, W_1/W_{tot} und W_2/W_{tot}.

Die gesamte Dauer der Bewegung beträgt

$$t_f = \frac{mv_0 l}{M_u} \tag{5.121}$$

und somit beträgt die Dauer der Bewegung der stationären Phase:

$$t_2 = t_f - t_1 = \frac{mv_0 l}{M_u}\frac{(3+2\beta)}{(3+3\beta)} \tag{5.122}$$

In Abb. 5.15 (c) wurde Gleichung (5.120) in eine dimensionsfreie Form überführt und sowohl in Funktion der kinetischen Energie $T_0 = mv_0^2/2$ als auch in Funktion des Impulses im Quadrat $I_0^2 = (mv_0)^2$ für verschiedene Massenverhältnisse $m/m_B l$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass das Massenverhältnis $m/m_B l$ einen wichtigen Einfluss auf das Deformationsverhalten des Kragbalkens hat. Die dissipierte Energie während der stationären Phase (Modalform) kann einen grossen Teil der Aufprallenergie ausmachen; dies ist der Fall, wenn die Masse des Tragwerks gegenüber der aufprallenden Masse klein ist.

Für einen schweren aufprallenden Körper ($\beta = m_B l/2m \rightarrow 0$) beträgt die Geschwindigkeit am freien Balkenende nach der Beziehung (5.112): $\dot{W} \approx v_0$. Die kinetische Energie am Ende der Phase 1 beträgt dann $T_1 \approx mv_0^2/2 = T_0$ und die Dauer der Bewegung während der transienten Phase ist gemäss (5.122) klein.

In diesem Fall ist die erste (transiente) Phase nicht wichtig und die gesamte Aufprallenergie wird schliesslich als plastische Energie dissipiert.

$$\frac{t_1}{t_f} = \frac{1}{3\left(1+\frac{2m}{m_B l}\right)} \tag{5.123}$$

Für eine Impulsbelastung ist die kinetische Energie der gemeinsamen Masse am freien Kragbalkenende $T_0 = mv_0^2/2$, d. h. die Masse des Tragwerks kann ausser Acht gelassen werden.

Die bleibende Verformung beträgt am Ende der stationären Phase

$$W_{tot} = \theta^u(l-x) \approx \frac{mv_0^2 l}{2M_u}\left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{5.124}$$

und durch Umformung erhält man die unterste Gerade in Abb. 5.15 (c)$_1$

$$\frac{W_{tot}M_u/l}{T_0} \approx \left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{5.125}$$

Die prozentuale Abweichung e_W zwischen der analytischen Lösung und der Näherungslösung für eine schwere aufprallende Masse ist in Abb. 5.15 (d) in Funktion des Massenverhältnisses $m/m_B l$ dargestellt.

Für eine am freien Kragarmende aufprallende Masse von $m \approx 3.25 m_B l$ beträgt die prozentuale Abweichung $e_W = 10\,\%$. Ein an seinem freien Ende durch eine schwere Masse beanspruchten eingespannten Kragbalken bleibt als Starrkörper gerade mit einem Drehwinkel an der Einspannstelle, welcher unabhängig von der Balkenlänge ist, d. h. er verformt sich analog zur statischen Mechanismuskonfiguration. Diese nach [Jones 1995] bezeichnete quasi-statische Methode vereinfacht die dynamische Aufgabe erheblich.

Demgegenüber beträgt die kinetische Energie der aufprallenden Masse und der Masse des Tragwerks am Ende der Phase 1: $T_1 \approx 0$ für den Fall einer leichten aufprallenden Masse ($\beta = m_B l/2m \rightarrow \infty$), da die Geschwindigkeit am freien Balkenende $\dot{W} \approx 0$. Somit gibt es keine plastische Deformation im plastischen Gelenk.

$$\frac{W_{tot}M_u\mu}{I_0^2} \approx \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{x/l}\right) \quad \text{falls} \quad \beta\alpha >> 1$$

respektive (5.126)

$$\frac{W_{tot}M_u\mu}{I_0^2} \approx \frac{2}{3}\ln(\beta) \quad \text{falls} \quad \alpha = 0$$

Der Grenzfall $\beta = m_B l/2m \rightarrow \infty$ ist in Abb. 5.15 (c)$_2$ mit der untersten Kurve dargestellt.

Der Kragbalken erfährt infolge einer leichten aufprallenden Masse eine lokale Deformation im Bereich des Kragarmendes, welche abhängig von der Länge des Kragarmes ist. Der Drehwinkel an der Einspannstelle wiederum ist umgekehrt proportional zur Länge des Balkens.

Der grösste Teil der Aufprallenergie wird in Phase 1 dissipiert, wenn das Massenverhältnis $m/m_B l$ << 1, oder in Phase 2, wenn $m/m_B l$ >> 1, dann wird die permanente Durchbiegung praktisch nur von der Phase 2 abhängig. In diesem Fall führt eine Annahme einer Modalform zu einer guten Näherungslösung für die permanente Durchbiegung.

Die theoretische Analyse vernachlässigt gravitationsbedingte Einflüsse. Im Fall einer schweren aufprallenden Masse ist diese Vernachlässigung nicht gerechtfertigt, so dass deren Einfluss in Form einer Berücksichtigung der potentiellen Energie (Lageenergie) berücksichtigt werden muss. Die maximale Durchbiegung am freien Balkenende folgt aus der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgW_f = M_u\theta^u = M_u(W_f / l) \tag{5.127}$$

und beträgt:

$$W_f = \frac{mv_0^2 l}{2(M_u - mgl)} \tag{5.128}$$

Im Fall einer leichten aufprallenden Masse können gravitatorische Effekte vernachlässigt werden.

Das Konvergenzverhalten in eine Modalform ist eine bemerkenswerte Eigenschaft von allen starr-plastischen dynamischen Tragwerksantworten und ist von grosser praktischer Bedeutung.

Abb. 5.16 (a) zeigt einen Vergleich der Geschwindigkeitsverhältnisse $\dot{W}/v_0$ zwischen der analytischen Lösung nach [Parkes 1955]

$$\frac{\dot{W}}{v_0} = \frac{1}{1+\frac{m_B l}{2m}} \quad \text{und} \quad \frac{t}{t_f} = \frac{m_B l^2}{3l(2m + m_B l)} \tag{5.129}$$

und der Modalform Näherungslösung nach [Martin & Symonds 1966]

$$\frac{\dot{W}}{v_0} = \frac{1}{1+\frac{m_B l}{3m}}\left(1-\frac{t}{t_f}\right) \tag{5.130}$$

für verschiedene Massenverhältnisse $m/m_B l$.

Abb. 5.16 (b) zeigt einen Vergleich der maximalen Durchbiegung am Kragarmende zwischen der analytischen Lösung und der Modalform-Näherungslösung, dem oberen Grenzwert nach [Martin 1964] und dem unteren Grenzwert nach [Stronge 1983] basierend auf Arbeiten von [Morales & Nevill 1970] sowie [Wierzbicki 1971].

Die maximale Durchbiegung am Balkenende mit der Modalform-Näherungslösung beträgt:

$$W_{tot}^* = \frac{1}{1+\frac{m_B l}{3m}} \frac{mv_0^2 l}{2M_u} \tag{5.131}$$

Die maximalen Durchbiegungen anhand des oberen und unteren Grenzwerts betragen:

$$W_{tot} = \frac{mv_0^2 l}{2M_u} \quad \text{und} \quad W_{tot} = \frac{mv_0^2 l}{2M_u\left(1+\frac{m_B l}{2m}\right)} \tag{5.132}$$

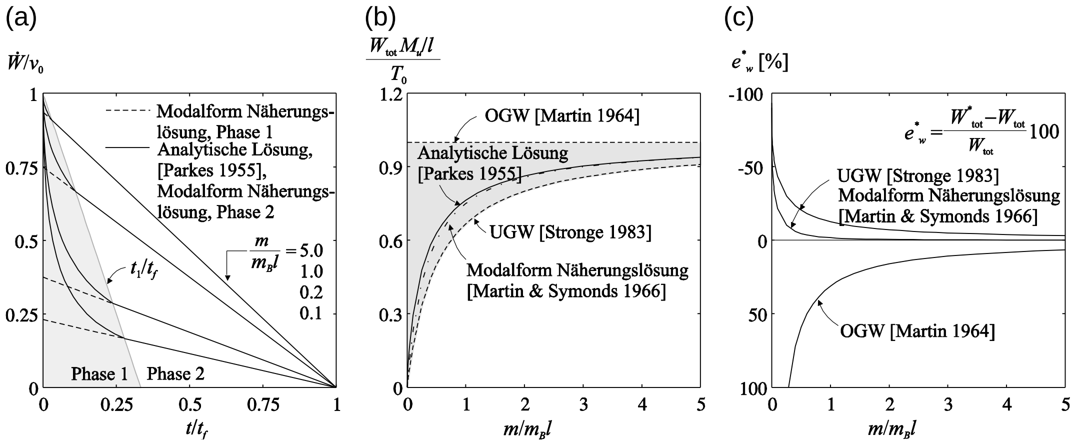


Abb. 5.16 *Einseitig eingespannter Balken mit Masse m_B pro Längeneinheit infolge aufprallender Masse m mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 am Kragarmende:*
(a) Vergleich der Geschwindigkeitsverhältnisse $\dot{W}/v_0$ zwischen analytischer Lösung und Modalform Näherungslösung nach [Martin & Symonds 1966];
(b) Vergleich der maximalen Durchbiegung am Kragarmende zwischen analytischer Lösung, Modalform Näherungslösung, oberem (OGW) und unterem Grenzwert (UGW);
(c) prozentuale Abweichung e^*_w zwischen analytischer Lösung und Modalform Näherungslösung, OGW und UGW in Funktion des Massenverhältnisses $m/m_B l$.

Die Modalform-Lösung ist näher an der analytischen Lösung als die beiden Grenzwerte nach (5.132). Abb. 5.16 (c) zeigt die prozentuale Abweichung e^*_w zwischen der analytischen Lösung nach (5.120) und der Modalform-Näherungslösung (5.131), den oberen und unteren Grenzwerten nach (5.132) in Funktion des Massenverhältnisses $m/m_B l$. Für den Grenzfall $\beta = m_B l/2m \rightarrow 0$ konvergieren die beiden Grenzwerte mit der analytischen Lösung nach Parkes.

Allseitig aufgelegte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter, rechteckförmiger Belastung

Die vollständige dynamische Lösung einer gelenkig gelagerten Quadratplatte mit der Seitenlänge l unter gleichmässig verteilter, rechteckförmiger Belastung $q(t) = q_0$ für $0 \le t \le t_d$ wurde von [Cox & Morland 1959] hergeleitet. Aufgrund der Diskontinuität in der Belastung bei $t = t_d$ dauert die Phase 1 wiederum von $0 \le t \le t_d$. Beim Übergang von Phase 1 in Phase 2 müssen die Durchbiegungen $w(x,y,t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{w}(x,y,t)$ wiederum kontinuierlich verlaufen.

Die Mechanismuskonfiguration in Abb. 5.17 (a) führt zur vollständigen Lösung nach [Prager 1952]:

$$q_k = q_u = 24\frac{m_u}{l^2} \tag{5.133}$$

Ausgehend von einem angenommenen Geschwindigkeitsfeld

$$\dot{w}(x,y,t) = \dot{W}(t)(1-Z) \tag{5.134}$$

wobei $0 \le Z = \sqrt{2}(x + y)/l \le 1$ für den in Abb. 5.17 (a) dargestellten Mechanismus, lässt sich durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen in kartesischen Koordinaten nach Beziehung (4.12) und der Fliessbedingung von Johansen zeigen, dass die Fliessbedingung für eine Lastintensität $q_u \leq q_0 \leq 2q_u$ nirgends verletzt wird und die Durchbiegung am Ende der Phase 1

$$w(x,y,t_d) = (q_0 - q_u)(1-Z)\frac{t_d^2}{\mu} \tag{5.135}$$

beträgt.

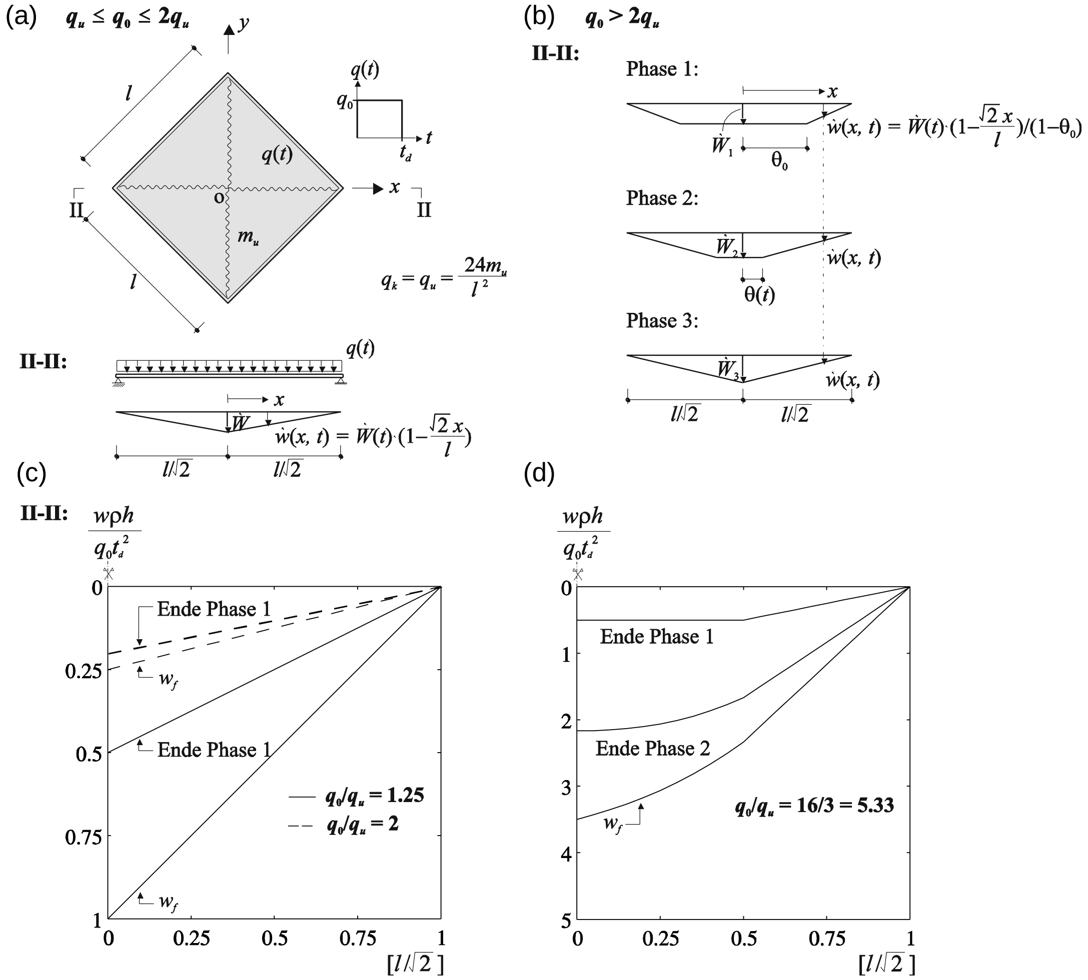


Abb. 5.17 *Allseitig aufgelegte Quadratplatte mit der Seitenlänge l unter gleichmässig verteilter, rechteckförmiger Belastung q(t):*
(a), (b) System mit gleichmässig verteilter Belastung q(t) und Geschwindigkeitsfelder in Abhängigkeit von der Lastintensität.
Analytische Lösung von [Cox & Morland 1959]:
(c) $q_0/q_u \leq 2$;
(d) $q_0/q_u = 16/3$.

Die maximale Durchbiegung bei O beträgt $W = w(x = 0, y = 0, t_d) = (q_0 - q_u)t_d^2/\mu$, wobei $\mu = \rho h$ die Masse pro Flächeneinheit bezeichnet.

Am Ende der Phase 2 ($t = T = q_0 t_d / q_u$) beträgt die Geschwindigkeit null und die Durchbiegung

$$w_f = w(x,y,T) = \frac{q_0^2 t_d^2}{q_u \rho h}(1 - q_u / q_0)(1-Z) \tag{5.136}$$

wobei die maximale Durchbiegung bei O $W_f = w_f(x = 0, y = 0, T) = \frac{q_0^2 t_d^2}{q_u \rho h}(1 - q_u/q_0)$ beträgt.

In Abb. 5.17 (c) ist die Durchbiegung am Ende der Phasen 1 und 2 für Lastintensitäten q_0/q_u = 1.25 respektive 2 dargestellt.

Für eine Lastintensität $q_0 > 2q_u$ ist es erforderlich, ein Geschwindigkeitsfeld gemäss Abb. 5.17 (b) anzunehmen, da sonst die Fliessbedingung verletzt wird.

Die Durchbiegung am Ende der Phase 1 ist

$$w(x,y,t_d) = \frac{1}{2} q_0 \frac{t_d^2}{\rho h} \qquad 0 \le Z \le \theta_0$$

und (5.137)

$$w(x,y,t_d) = \frac{1}{2} q_0 \frac{t_d^2}{\rho h}(1-Z)/(1-\theta_0) \qquad \theta_0 \le Z \le 1$$

Die Durchbiegung am Ende der Phase 2 respektive Phase 3 beträgt

$$w(x,y,T_1) = \frac{q_0^2 t_d^2}{4 q_u \rho h}\left(1 + 2\theta_0 + 2\theta_0^2\right)(1-Z) \qquad \theta_0 \le Z \le 1$$

und (5.138)

$$w(x,y,T_1) = -\frac{1}{2} q_0 \frac{t_d^2}{\rho h} + \frac{q_0^2 t_d^2}{4 q_u \rho h}\left(2 - Z^2 - Z^3\right) \qquad 0 \le Z \le \theta_0$$

respektive

$$w_f = w(x,y,T_2) = \frac{q_0^2 t_d^2}{2 q_u \rho h}\left(1 + \theta_0 + \theta_0^2\right)(1-Z) \qquad \theta_0 \le Z \le 1$$

und (5.139)

$$w_f = w(x,y,T_2) = -\frac{1}{2} q_0 \frac{t_d^2}{\rho h} + \frac{q_0^2 t_d^2}{4 q_u \rho h}\left(3 - Z - Z^2 - Z^3\right) \qquad 0 \le Z \le \theta_0$$

In Abb. 5.17 (d) ist die Durchbiegung der Quadratplatte am Ende der Phasen 1, 2 und 3 für eine Lastintensität q_0/q_u = 16/3 dargestellt.

Für eine Impulsbelastung, $q_0/q_u \rightarrow \infty$ und $t_d \rightarrow 0$, liefert der Impulssatz gemäss der Beziehung (3.25)

$$\int_A q_0 t_d \mathrm{d}A = \int_A \rho h v_0 \mathrm{d}A \tag{5.140}$$

Mit Gleichung (5.140) erhält man die gleichmässig verteilte (konstante) Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = I/\rho h$, wobei $I = q_0 t_d$ den Impuls bezeichnet. Die Phase 1 gemäss Lastintensität $q_d > 2q_u$ existiert nicht mehr, da $t_d \to 0$. Die Geschwindigkeitsfelder für die beiden Phasen ergeben sich gemäss Abb. 5.17 (b) (Phasen 2 und 3) mit der Bedingung, dass sich bei $t = 0$ die plastischen Gelenke bei den Auflagern bilden und somit $\theta_0 = 1$ ist. Somit beträgt die Durchbiegung am Ende der Phase 1 respektive Phase 2 für eine Impulsbelastung gemäss $(5.138)_2$ und $(5.139)_2$,

$$w(x,y,T_{I,1}) = \frac{I^2}{4q_u \rho h}\left(2 - Z^2 - Z^3\right) \qquad 0 \le Z \le 1 \tag{5.141}$$

respektive

$$w_f = w(x,y,T_{I,2}) = \frac{I^2}{4q_u \rho h}\left(3 - Z - Z^2 - Z^3\right) \qquad 0 \le Z \le 1$$

Die maximale Durchbiegung bei O beträgt somit am Ende der Bewegung $W_f = w_f(x = 0, y = 0, T_{I,2}) = \frac{3I^2}{4q_u \rho h}$. In Abb. 5.18 ist die Durchbiegung am Ende der Phasen 1 und 2 für eine Impulsbelastung dargestellt.

Diskussion des starr-plastischen Verhaltens

Bei einer starr-plastischen Idealisierung des Materialverhaltens, d. h. Vernachlässigung elastischer Deformationen ($E \to \infty$), stellt sich die Frage des Gültigkeitsbereiches. Wenn grosse dynamische Belastungen auf ein Tragwerk wirken und zu grossen plastischen Verformungen/Deformationen führen, spielt das elastische Materialverhalten eine weniger wichtige Rolle hinsichtlich der globalen Tragwerksantwort. Der Gültigkeitsbereich starr-plastischer Modelle für einmassige Systeme mit einem Freiheitsgrad ist vom Energieverhältnis R, der Lastanstiegszeit und dem Verhältnis der Stossdauer zur Eigenschwingdauer t_d/T abhängig (Kapitel 5.4). Für kurze Stossverläufe, was beispielsweise für den Grenzfall einer Impulsbelastung zutrifft, führt ein starr-plastisches Modell zu guten Ergebnissen.

[Parkes 1955] verifizierte seine theoretischen Untersuchungen mit Versuchen an eingespannten Balken aus Baustahl unter sowohl leichten als auch schweren aufprallenden Massen. Diese ergaben folgende Erkenntnisse: Gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie konnte für Bereiche weit weg vom Aufprallort gefunden werden und die Vorhersage von lokalen Schäden ist stark abhängig von der genauen Definition der Randbedingungen der aufprallenden Masse. Bei einer kleinen aufprallenden Masse im Vergleich mit der Balkenmasse konnte qualitativ in der Nähe des Aufprallortes das Auftreten eines wandernden Gelenkes aufgezeigt werden. Allerdings ist die quantitative Ermittlung der Deformationen in der Nähe des Aufprallortes für grössere Fallgeschwindigkeiten ungenau. Als mögliche Gründe für die Abweichungen sind Dehnrateneffekte des verwendeten Stahls sowie die nicht identischen Randbedingungen zwischen Versuch und Analysemodell zu erwähnen. Es scheint, dass eine zutreffende Berechnungsprognose der lokalen Schädigung infolge einer aufprallenden Masse nur bei Berücksichtigung der richtigen Randbedingungen möglich ist.

Generell ist die Änderung der Form der endgültigen Durchbiegung in Funktion der Massenverhältnisse $\beta = m_B l/2m$ eine eindrückliche Erkenntnis, welche viele darauf aufbauende

Arbeiten beeinflusste. Parkes' Theorie zeigte, dass das komplexe Verhalten mit einem starr-plastischen Materialverhalten repräsentiert werden kann.

[Bodner & Symonds 1962] untersuchten experimentell die Gültigkeit einer starr-plastischen Modellbildung für einen Kragbalken aus Stahl und Aluminium. Dabei wurde eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie erzielt.

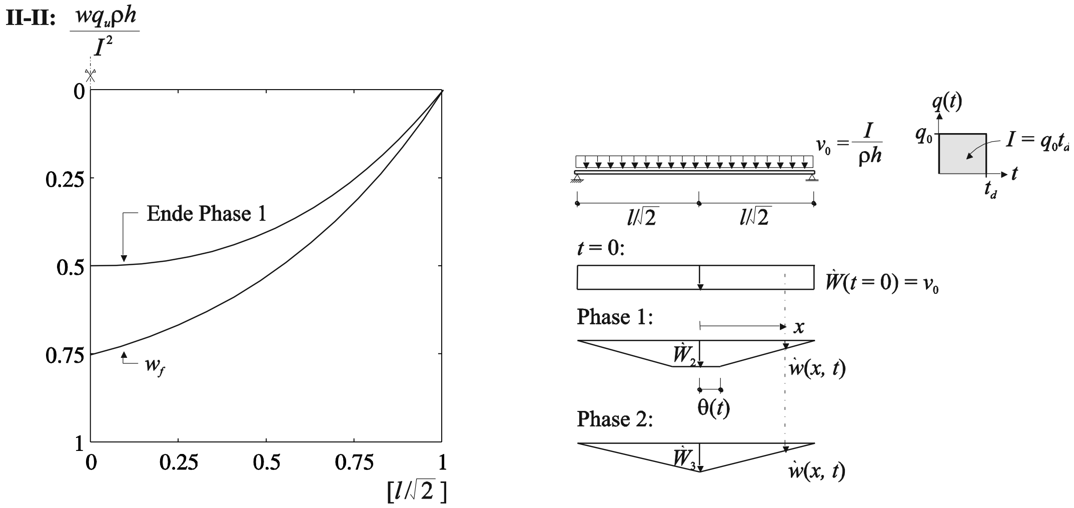


Abb. 5.18 *Allseitig aufgelegte Quadratplatte mit der Seitenlänge l unter gleichmässig verteilter Impulsbelastung. Schnitt II-II siehe Abb. 5.17 (a).*

Allgemeine analytische Methoden für das elastisch-plastische Tragwerksverhalten von Balken, Platten und Scheiben infolge eines Kraft- oder Aufprallstosses sind nicht vorhanden. Aufgrund der Komplexität aus der Interaktion zwischen elastischem und plastischem Tragwerksverhalten sind Näherungslösungen nur anhand numerischer Methoden wie der Finite-Elemente-Methode (z. B. [Symonds & Fleming 1984]) oder der Finite-Differenzen-Methode (z. B. [Stronge & Yu 1993]) ermittelbar. Numerische Näherungsverfahren zeigen oftmals einen grossen Detaillierungsgrad auf, allerdings tragen sie wenig zum Verständnis der zugrundeliegenden Verhaltensweise und der Gesetzmässigkeiten des plastischen Verhaltens bei. Anhand von Näherungslösungen mit Idealisierungen des Materialverhaltens, wie z. B. starr-plastischen Verhaltens, können wertvolle Erkenntnisse gewonnen und ein breiteres Verständnis erzielt werden.

[Stronge & Yu 1993] zeigen für das Beispiel eines Kragbalkens unter Aufprallstoss durch Vergleiche mit Finite-Differenzen- und Finite-Elemente-Methoden sowie einem vereinfachten elastisch-plastischen Modell, dass das Energieverhältnis R, das Massenverhältnis $\beta = m_B l / 2m$ und das Aufprallenergieverhältnis $e_0 = T_0 / M_u$ mit $T_0 = m v_0^2 / 2$ eine signifikante Rolle hinsichtlich Gültigkeit der starr-plastischen Theorie spielen. Das Massenverhältnis $\beta = m_B l / 2m$ hat einen massgebenden Einfluss auf das Durchbiegungsverhalten des Kragbalkens.

5.5.5 Näherungsverfahren

Dem Näherungsverfahren für dynamisch beanspruchte Tragwerke kommt aus baupraktischer Sicht eine wichtige Rolle zu, da analytische Lösungen bereits bei Stabtragwerken zu komplizierten Berechnungen führen. Eine wesentliche Vereinfachung lässt sich aus der Vernachlässigung der Lageänderung der plastischen Fliessgelenke und -bereiche gewinnen, indem ein kinematisch zulässiger, stationärer Fliessmechanismus betrachtet wird. Die Grundlagen der nachfolgend beschriebenen Näherungsverfahren wurden mit den in Kapitel 5.5.2 dargestellten Grenzwertsätzen und der in Kapitel 5.5.3 vorgestellten Modalform-Näherungslösung für Impulsbelastungen geschaffen.

Kraftstoss

Das Näherungsverfahren eines durch einen Kraftstoss beanspruchten Tragwerks nach [Kaliszky 1970], [Kaliszky 1981] geht von der Annahme eines kinematisch zulässigen (stationären) Fliessmechanismus aus. Das kinematisch zulässige Verschiebungsfeld des Tragwerks wird dabei gemäss dem Produktansatz

$$w_i^k(x_j,t)=w^k(t)\phi_i^k(x_j) \tag{5.142}$$

beschrieben, wobei $\phi_i^k(x_j)$ eine zeitunabhängige Formfunktion und $w^k(t)$ eine zeitabhängige Amplitude bezeichnen. Das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld erhält man durch einfache respektive zweifache Ableitung der Verschiebungsfunktion (5.142),

$$\begin{aligned}\dot{w}_i^k(x_j,t)&=\dot{w}^k(t)\phi_i^k(x_j)\\ \ddot{w}_i^k(x_j,t)&=\ddot{w}^k(t)\phi_i^k(x_j)\end{aligned} \tag{5.143}$$

Die zu den Geschwindigkeiten $\dot{w}_i^k$ gehörenden Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ können mithilfe der Kompatibilitätsbedingungen (geometrischen Beziehungen) bestimmt werden. Die Dissipationsleistung beträgt für den gewählten kinematisch zulässigen Fliessmechanismus:

$$\dot{D}^k(\dot{\varepsilon}_{ij}^k)=\int_V \sigma_{ij}^k\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V \tag{5.144}$$

Das Prinzip der virtuellen Leistungen liefert für das System mit dem gewählten kinematisch zulässigen Verschiebungsfeld w_i^k:

$$\int_S F_i\dot{w}_i^k\mathrm{d}S+\int_V\left(-\rho\ddot{w}_i^k\right)\dot{w}_i^k\mathrm{d}V-\int_V\sigma_{ij}^k\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V=0 \tag{5.145}$$

wobei $\dot{w}_i^k$ das virtuelle Geschwindigkeitsfeld und ρ die Dichte bezeichnen. Gleichung (5.145) besagt, dass sich die äussere Belastung, die Trägheitskräfte und die inneren Kräfte während der gesamten Bewegung des Tragwerks im dynamischen Gleichgewicht befinden. Die äussere, einparametrige, zeitabhängige Belastung beträgt

$$F_i(x_j,t)=q(t)F_i^0(x_j) \tag{5.146}$$

Setzt man die Gleichungen $(5.143)_2$ und (5.146) in (5.145) ein, erhält man die zeitabhängige Beschleunigungsamplitude:

$$\ddot{w}^k(t)=\frac{\int_S F_i^0\dot{w}_i^k\mathrm{d}S}{\int_V\rho\phi_i^k(x_j)\dot{w}_i^k\mathrm{d}V}\left[q(t)-\frac{\int_V\sigma_{ij}^k\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V}{\int_S F_i^0\dot{w}_i^k\mathrm{d}S}\right] \tag{5.147}$$

Der Term vor der Klammer rechterhand von (5.147) ist zeitunabhängig und wird nachfolgend als K bezeichnet:

$$K=\frac{\int_S F_i^0\dot{w}_i^k\,\mathrm{d}S}{\int_V \rho\phi_i^k(x_j)\dot{w}_i^k\,\mathrm{d}V}=\frac{\int_S F_i^0\phi_i^k\,\mathrm{d}S}{\int_V \rho\phi_i^k\phi_i^k\,\mathrm{d}V} \tag{5.148}$$

Die Konstante K kann mithilfe der gewählten Mechanismuskonfiguration ϕ_i^k bestimmt werden.

Um den zweiten Klammerterm auf der rechten Seite von (5.147) zu bestimmen, wird angenommen, dass die Belastung F_i quasi-statisch wirkt, d. h. $F_i(x_j) = q_k F_i^0(x_j)$, und infolge dieser äusseren Belastung wiederum eine Verschiebung w_i^k des Tragwerks resultiert. Die Verwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen führt auf die Lastintensität

$$q_k=\frac{\int_V \sigma_{ij}^k\dot{\varepsilon}_{ij}^k\,\mathrm{d}V}{\int_S F_i^0\dot{w}_i^k\,\mathrm{d}S} \tag{5.149}$$

wobei wiederum $\dot{w}_i^k$ das virtuelle Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Gleichung (5.147) lässt sich somit gemäss

$$\ddot{w}^k(t)=K\left[q(t)-q_k\right] \tag{5.150}$$

beschreiben. Die zeitliche Integration von (5.150) führt mit der Anfangsbedingung $\dot{w}^k(t = 0) = 0$ auf das Geschwindigkeitsfeld

$$\dot{w}^k(t)=K\left[\int_0^t q(t)\mathrm{d}t-q_k t\right] \tag{5.151}$$

dabei wird der Zeitpunkt der Lastaufbringung mit $t = 0$ bezeichnet. Die Dauer t_f der Tragwerksantwort erhält man aus der Bedingung $\dot{w}^k(t = t_f) = 0$, d. h. die Geschwindigkeit ist null, da das Tragwerk zum Stillstand kommt:

$$t_f=I(t_f)/q_k \tag{5.152}$$

wobei $I(t_f) = \int_0^t q(t)\mathrm{d}t$ den Impuls bezeichnet. Kaliszky zeigte, dass die Dauer t_f nach der Beziehung (5.152) einen unteren Grenzwert für die tatsächliche Dauer der Tragwerksantwort darstellt. Aus (5.152) ist ersichtlich, dass der beste untere Grenzwert für t_f erreicht werden kann, wenn die Lastintensität q_k minimal ist und der (quasi-)statischen Traglast q_u entspricht.

Für einfache Stossfunktionen wie rechteckförmige, dreieckförmige und exponentiell abnehmende Last-Zeitfunktionen ohne Lastanstieg lassen sich geschlossene Lösungen herleiten. Beispielsweise erhält man für eine rechteckförmige Stossfunktion mit q_0 als Maximalwert der Kraft (Kraftamplitude) und t_d als Stossdauer aus der zeitlichen Integration von (5.151)

$$w^k(t=t_f)=W_f=\frac{1}{2}Kq_0t_d^2\left(\frac{q_0}{q_k}-1\right) \tag{5.153}$$

wobei die Anfangsbedingung $w^k(t = 0) = 0$ und die Konstante $K = 2/(\rho h)$ betragen.

In Abb. 5.19 wird für eine Quadratplatte unter gleichförmiger, rechteckförmiger Stossbelastung die Näherungslösung

$$\frac{W_f}{q_0 t_d^2 / (\rho h)} = \left(\frac{q_0}{q_u} - 1 \right) = \zeta \tag{5.154}$$

nach Kaliszky mit der analytischen Lösung von [Cox & Morland 1959] verglichen.

Cox und Morland verwendeten die Fliessbedingung von Johansen für die analytische Lösung einer Quadratplatte unter rechteckförmiger Stossbeanspruchung.

Die Abb. 5.19 (b-d) zeigen einen Vergleich der analytischen Lösung der Durchbiegung $w\rho h/q_0 t_d^2$ nach [Cox & Morland 1959] mit der kinematischen Näherungslösung nach [Kaliszky 1970] entlang der halben Plattendiagonale (Symmetrie) für verschiedene Verhältnisse q_0/q_u. In Abb. 5.19 (e) wird ein Vergleich der analytischen Lösung und der Näherungslösung der maximalen Durchbiegung $\zeta = W_f \rho h/q_0 t_d^2$ in Plattenmitte O am Ende der Bewegung und in Abb. 5.19 (f) der Fehler $e_w = (\zeta_{appr} - \zeta_f)\zeta_f$ dargestellt.

Durch diese Vereinfachungen wird die näherungsweise Untersuchung des Tragverhaltens unter dynamischer Belastung auf eine quasi-statische Analyse des Tragwerks und eines äquivalenten Systems mit einem Freiheitsgrad zurückgeführt (Kapitel 5.4.2).

Die Genauigkeit der Näherungslösung ist abhängig von der Wahl des kinematisch zulässigen Verschiebungsfeldes. Ob die Lösung von (5.153) einen oberen oder unteren Grenzwert für die Durchbiegung darstellt, ist nicht bekannt. Kaliszky stellt fest, dass mit dem Fliessmechanismus unter quasi-statischen Lasten die beste Näherung resultiert.

Im Fall einer Impulsbelastung kann bewiesen werden, dass die Näherungslösung zur gleichen Lösung führt wie die in Kapitel 5.5.3 vorgestellte Modalform-Näherungslösung nach [Martin & Symonds 1966], falls für beide Näherungen das gleiche kinematisch zulässige Verschiebungsfeld gewählt wird. Die Modalform-Näherungslösung für Impulsbelastungen stellt somit einen Spezialfall des Näherungsverfahrens nach Kaliszky dar.

[Krajcinovic 1972] erweiterte das Näherungsverfahren nach Kaliszky für beliebige, dynamische Last-Zeitfunktionen unter Verwendung der Korrelationsparameter von Youngdahl (vergleiche Kapitel 5.4.2: starr-plastisches Modell). Eine Voraussetzung dieser Methode nach Youngdahl ist, dass die Bewegung des starr-plastischen Systems zur Zeit $t = 0$ beginnt und die Belastung somit das erste Mal die (quasi-statische) Belastungsintensität q_k erreicht. Die Stossdauer beträgt t_d und der Impuls beträgt:

$$I(t_d) = \int_0^{t_d} q(t)\mathrm{d}t \geq q_k t_d \tag{5.155}$$

Die physikalische Bedeutung von Gleichung (5.155) ist aus (5.152) ersichtlich und weist darauf hin, dass die Zeit, die das Tragwerk insgesamt benötigt, grösser ist als die Stossdauer ($t_f \geq t_d$).

[Jones 1971] erweiterte das Prinzip der virtuellen Leistungen für Platten infolge statischer Lasten auf dynamische Lasten $q(t)$, wobei auch Normalkräfte mitberücksichtigt wurden.

[Nurrick & Martin 1989] zeigen einen Überblick über theoretische Methoden zur Berechnung der Verformungen von dünnen Platten infolge Impulsbelastungen.

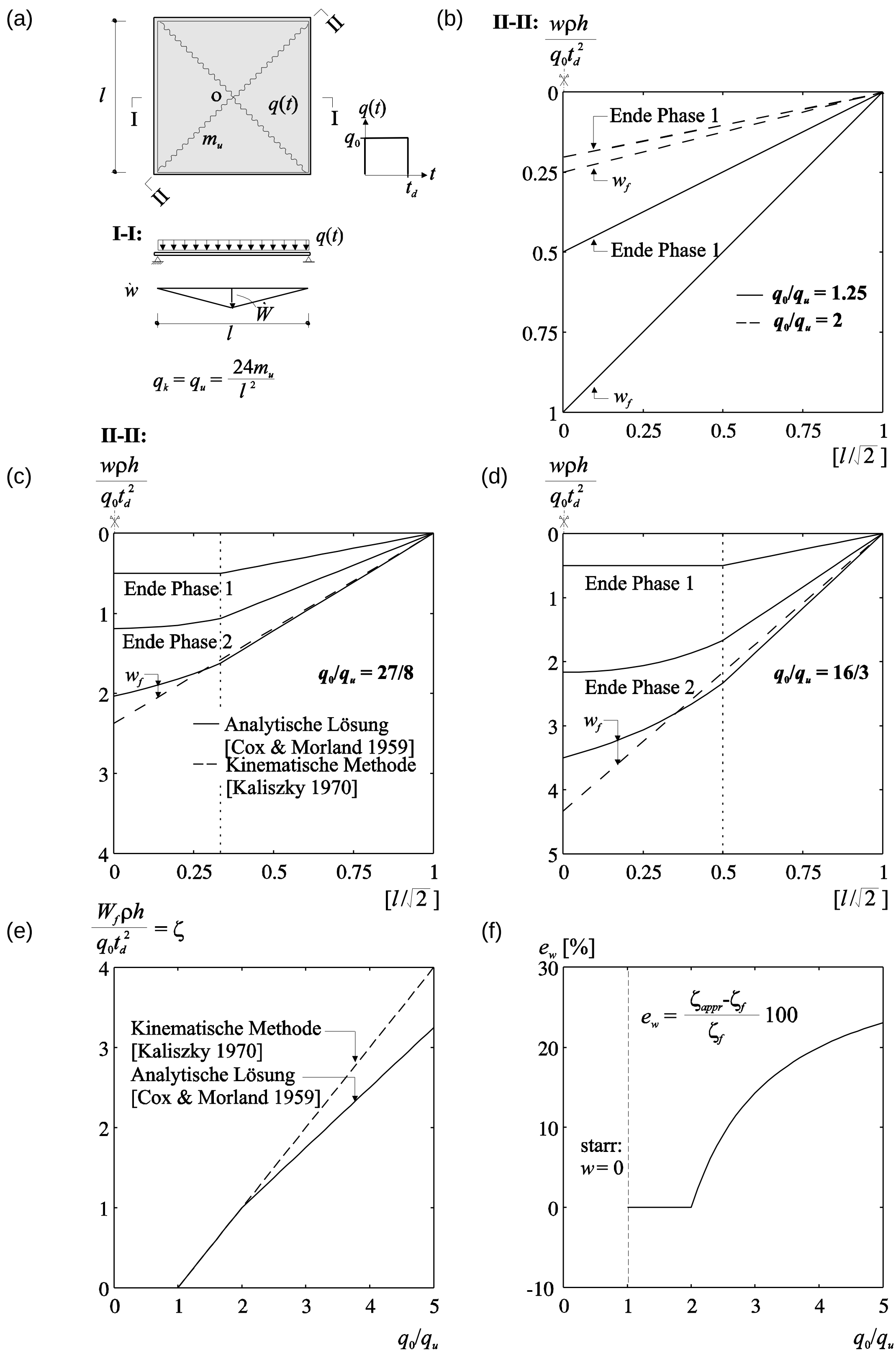


Abb. 5.19 *Allseitig aufgelegte Quadratplatte mit der Seitenlänge l unter gleichmässig verteilter, rechteckförmiger Belastung q(t):*
(a) System mit Belastung, Mechanismus und Geschwindigkeitsfeld; Vergleich analytische Lösung von [Cox & Morland 1959] und Näherungslösung von [Kaliszky 1970] entlang Plattendiagonale für:
(b) analytische Lösung: $q_0/q_u \le 2$ (Lösungen identisch);
(c) $q_0/q_u = 27/8$; *(d) $q_0/q_u = 16/3$;*
(e) maximale Durchbiegung W_f in Plattenmitte *(f) Fehler e_w.*

Aufprallstoss

In neueren Arbeiten ([Jones et al. 1997], [Jones 2003], [Jones 2012]) wurde der Aufprallstoss von rechteck- und kreisförmigen Platten für endliche Verformungen (Berücksichtigung der Normalkräfte) anhand des Prinzips der virtuellen Leistungen studiert. Vergleiche mit zahlreichen Versuchen an Stahlplatten ergaben eine gute Übereinstimmung, wobei bestätigt wurde, dass endliche Verformungen einzubeziehen sind. Der Einbezug von Normalkräften führt dazu, dass eine Differentialgleichung gelöst werden muss. Das Prinzip der virtuellen Leistungen unter Betrachtung kleiner Verformungen führt auf Gleichung (6.4), wobei der Rechenaufwand reduziert wird. Der Aufprallstoss wird anhand des Impulserhaltungssatzes modelliert.

5.6 Diskussion

Lageänderung der Fliessgelenke und plastischen Gelenkbereiche

Wandernde plastische Gelenke sind ein wichtiges Konzept in der starr-plastischen Tragwerksdynamik. Dieses Konzept wurde erstmals von [Lee & Symonds 1952] am Beispiel eines durch einen Kraftstoss in der Mitte belasteten, nicht gelagerten Balkens eingeführt.

[Parkes 1955] zeigte die Fortbewegung der plastischen Gelenke anhand eines eingespannten Kragbalkens mit starr-plastischem Materialverhalten, welcher am Balkenende durch eine aufprallende Masse belastet ist, bis sich schlussendlich eine stationäre Verschiebungsfigur, auch als Modalform (engl.: mode form) bezeichnet, einstellt.

[Symonds & Fleming 1984] untersuchten das Tragverhalten eines Kragbalkens mit einer zusätzlichen Masse am Kragarmende mit einem elastisch-ideal plastischen Materialverhalten infolge eines Kraftstosses mit kurzer Stossdauer, d. h. infolge einer Impulsbelastung, mit dem Finite-Elemente-Programm ABAQUS und verglichen die „exakte“ numerische Lösung mit der analytischen Lösung von [Parkes 1955]. Für eine angenommene Impulsbelastung wird die Belastung als Anfangsgeschwindigkeit v_0 definiert, welche am freien Kragarmende angreift. Symonds und Fleming stellten fest, dass die Charakteristik des Tragwerksverhaltens des elastisch-plastischen Balkens während der transienten, ersten Phase der Bewegung nicht mit derjenigen der starr-plastischen Lösung übereinstimmt. Das wandernde Gelenk während der Phase 1 konnte in der numerischen Untersuchung des elastisch-starr plastischen Balkens nicht beobachtet werden und wird von den Autoren als Fiktion bezeichnet. Die anschliessende Modalform-Phase zeigte sich aber deutlich in den Untersuchungen anhand des elastisch-starr plastischen Balkens und wird daher als eine massgebliche Eigenschaft von elastisch-starr plastischen sowie starr-plastischen Lösungen betrachtet.

[Florence & Firth 1965] konnten demgegenüber anhand von Bildern von Hochgeschwindigkeitskameras das Wandern der plastischen Gelenke während der Tragwerksantwort eines impulsbelasteten eingespannten Balkens beobachten.

[Reid & Gui 1987] verwendeten ebenfalls das Finite-Elemente-Programm ABAQUS und untersuchten das elastisch-starr plastische Verhalten eines Kragbalkens infolge einer Impulsbelastung. Sie studierten detailliert den Einfluss des elastischen Materialverhaltens auf die Biegemomente und die plastische Dissipationsenergie. Sie beobachteten, dass sich das maximale Biegemoment an der Stelle der Diskontinuität vom Kragarmende eher ähnlich wie das plastische Gelenk in der klassischen starr-plastischen Lösung ausbreitet. Eine elastische Biegewelle wird allerdings bei der Einspannstelle reflektiert und bremst das fortschreitende plastische Gelenk, welches ausgehend vom Kragarmende zur Einspannstelle wandert. Dies führt zu einer komplexen Tragwerksantwort, welche das Eintreten der stationären modalen Antwort (Rotation des Kragbalkens um die Einspannstelle) verzögern kann. Verschiedene Versuchsergebnisse von [Hall et al. 1971], [Reid et al. 1981] und [Woodward & Baxter 1986] zeigten ebenfalls ähnlich wie die numerischen Untersuchungen von Reid und Gui, dass das elastische Materialverhalten einen Einfluss auf das Vorhandensein lokaler plastischer Gelenke oder Knicke hat.

Konvergenz zu dynamisch plastischer Modalform

Bei einer dynamischen Belastung eines starr-plastischen Tragwerks, welche zu einer Überschreitung der (quasi-)statischen Traglast führt, werden Beschleunigungen erzeugt. Die daraus resultierenden Trägheitskräfte stehen zu jeder Zeit mit den inneren und äusseren Kräften im Gleichgewicht. Das Tragwerk muss demnach bereits in einen Mechanismus übergegangen sein, damit unter dynamischen Lasten Verformungen auftreten können.

Der gelenkig gelagerte, statisch bestimmte Balkenträger in Abb. 5.20 (a) wird durch zwei Einzellasten $Q_\alpha(\alpha = 1, 2)$ bei $x = l$ und $x = 3l$ belastet. Anhand dieses dynamischen Modells werden grundlegende Eigenschaften der Strukturdynamik diskutiert. Die gleichmässig verteilte Masse des Systems wird durch zwei konzentrierte (äquivalente) Massen m^* an den Stellen der Lasteinleitung ersetzt; die restlichen Bereiche werden als starr und masselos angenommen. Der untersuchte Balken wird dadurch zu einem Starrkörpersystem. Der plastische Widerstand (für die inneren Kräfte) des Trägers und die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an den Stellen $\alpha = 1, 2$ werden mit R_α, $\dot{u}_\alpha$, $\ddot{u}_\alpha$ bezeichnet.

Untersuchungen an diesem mathematisch einfachen System wurden von [Nayfeh & Prager 1969] basierend auf Arbeiten von [Rawlings 1964], [Rawlings 1965] durchgeführt. Zahlreiche Autoren ([Martin 1972], [Symonds & Chon 1978], [Kaliszky 1989]) verwendeten dieses System für weitere Untersuchung zur Lageänderung der Fliessgelenke respektive von plastischen Bereichen und zum Studium des Konvergenzverhaltens des Tragwerks in eine Modalform unter dynamischer Belastung.

Das System mit zwei Freiheitsgraden veranschaulicht im Weiteren das Bindeglied zwischen der Systemantwort eines dynamisch belasteten Tragwerks und einer statischen Traglastanalyse bei starr-ideal plastischem Materialverhalten. Das Grundsystem des betrachteten Trägers, das Schnittkörperdiagramm, die Momenten-Krümmungsgeschwindigkeitsbeziehung $M_u(\dot{\theta})$ und ein allgemeiner Grundmechanismus sind ebenfalls in Abb. 5.20 (a) dargestellt.

Die dynamische Gleichung der beiden Massen m^* lässt sich in Vektorform mit der Beziehung

$$Q_\alpha - R_\alpha = m^* \ddot{u}_\alpha \tag{5.156}$$

beschreiben, wobei $\alpha = 1, 2$ die Stellen der Lasteinleitung und der konzentrierten Massen bezeichnen.

Die Geschwindigkeiten und die Rotationsgeschwindigkeiten an den Stellen $\alpha = 1, 2$ betragen

$$\dot{u}_\alpha = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{l}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \tag{5.157}$$

und

$$\dot{\theta}_\alpha = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2l}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

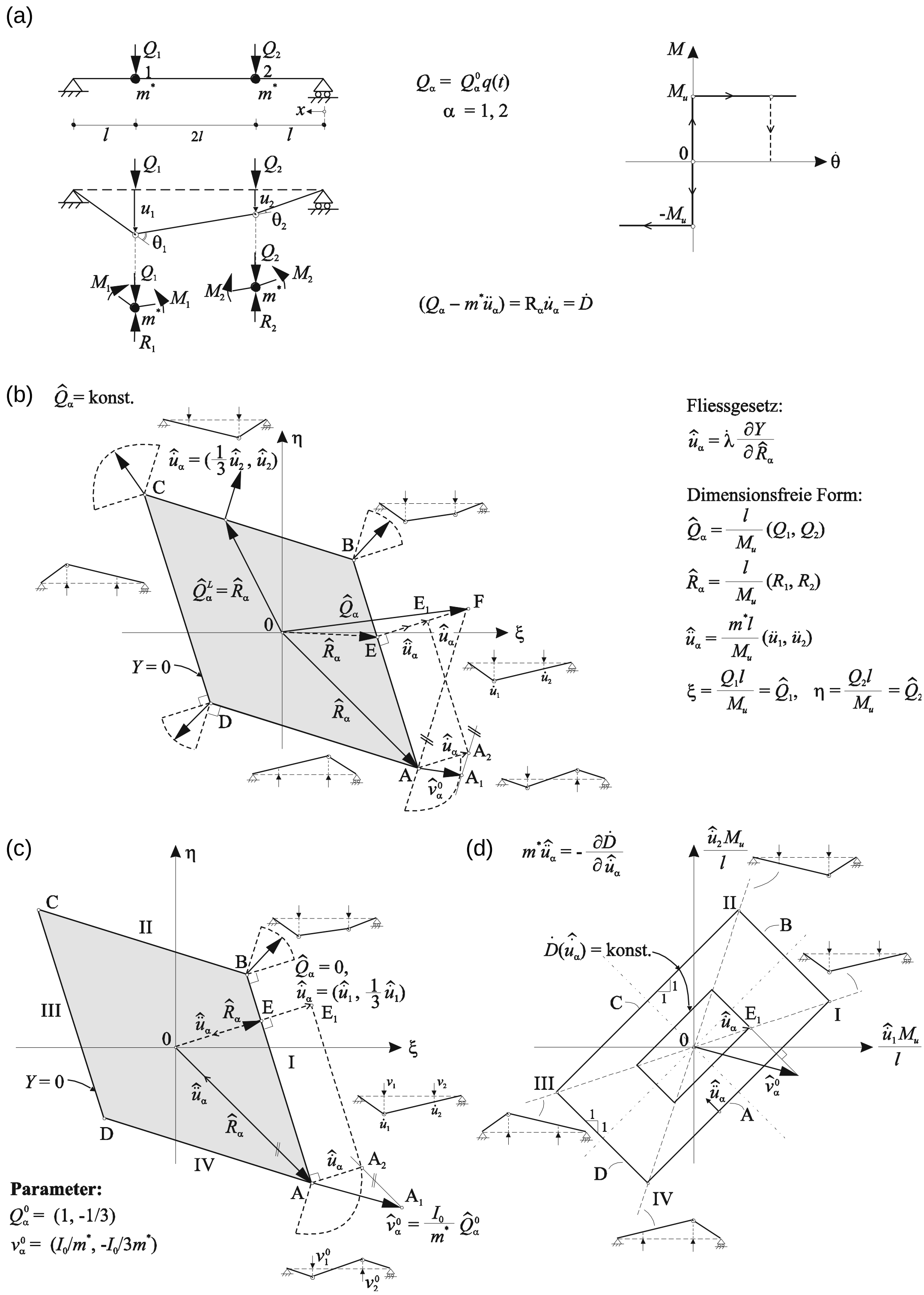


Abb. 5.20 *Modell mit zwei Freiheitsgraden:*

(a) System mit allgemeinem Grundmechanismus und Schnittkörperdiagramm;

(b) plastisches Potential, Einwirkung: statische Belastung Q_α = konstant und Anfangsgeschwindigkeit v_α^0;

(c) plastisches Potential, Einwirkung: Impulsbelastung mit Anfangsgeschwindigkeit $v_\alpha^0 = (I_0/m^*)Q_\alpha^0$;

(d) Dissipationsenergie.

Das Fliessgesetz nach Beziehung (3.61) nimmt für das plastische Potential die Form

$$\dot{u}_\alpha = \dot{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial R_\alpha} \tag{5.158}$$

an, wobei $\dot{\lambda} \geq 0$ ist.

Für den allgemeinen Grundmechanismus in Abb. 5.20 (a) lässt sich die Energiedissipation mit der Beziehung

$$\dot{D} = M_u\left(\left|\dot{\theta}_1\right| + \left|\dot{\theta}_2\right|\right) = \frac{M_u}{2l}\left(\left|3\dot{u}_1 - \dot{u}_2\right| + \left|-\dot{u}_1 + 3\dot{u}_2\right|\right) \tag{5.159}$$

beschreiben.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen lautet

$$\left(Q_\alpha - m^*\ddot{u}_\alpha\right)\dot{u}_\alpha = R_\alpha\dot{u}_\alpha = \dot{D} \tag{5.160}$$

wobei $\dot{u}_\alpha$ die virtuelle Geschwindigkeit bezeichnet.

Das plastische Potential ist in Abb. 5.20 (b, c) dargestellt. Die Fliessbedingung wird für eine quasi-statische Belastung durch $Y(M_u,R_\alpha) = 0$ beschrieben. In den Ecken A, B, C und D resultieren Kollapsmechanismen mit zwei Fliessgelenken, während sich bei den Geraden AB, BC, CD und DA Kollapsmechanismen mit einem Fliessgelenk ergeben.

Die Fliessfunktion lässt sich für den gelenkig gelagerten Balkenträger mit zwei konzentrierten Massen an den Stellen $\alpha = 1, 2$ mit der Beziehung

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{N}R_\alpha - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \tag{5.161}$$

mit

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \\ -1 & -1/3 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \frac{4M_u}{3l}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.162}$$

bezeichnen.

In Abb. 5.20 (b) wird das dynamische Systemverhalten während eines Zeitpunktes t betrachtet, wobei für das dargestellte Beispiel als Einwirkung eine Belastung Q_α = konstant und eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}_\alpha^0 = \dot{u}_\alpha(t = 0)$ in A mit $\alpha = 1, 2$ betrachtet wird. Die Anfangsgeschwindigkeit genügt dabei dem Fliessgesetz nach der Beziehung (5.158). Für die Geschwindigkeitsinkremente gilt $d\dot{u}_\alpha = \ddot{u}_\alpha dt$, d. h. während des Bewegungsvorgangs haben die Vektoren des Geschwindigkeitsinkrements und der Beschleunigung immer die gleiche Richtung. Zu Beginn der Bewegung rotiert der Geschwindigkeitsvektor $\dot{u}_\alpha$ um A, bis AA_2 erreicht ist. Zustände, die den Punkten AE auf der Fliessfläche entsprechen, sind nicht möglich, da sowohl die Vektoren der Geschwindigkeiten und ihrer Inkremente an jeder Stelle auf AE in die gleiche Richtung zeigen. Sobald der Geschwindigkeitsvektor AA_2 erreicht, springt er zu Punkt E auf der Fliessfläche. Der plastische Widerstand R_α und die Beschleunigungen $\ddot{u}_\alpha$ weisen eine zeitliche Diskontinuität auf. Eine Modalform in Form einer Mechanismuskonfiguration mit einem Fliessgelenk stellt sich ein, sobald der Geschwindigkeitsvektor $\dot{u}_\alpha(t)$ und der Beschleunigungsvektor $\ddot{u}_\alpha(t)$ die gleiche Richtung haben (Punkt E). Die Beschleunigungen bleiben dann konstant, da die Trägheitskräfte konstant bleiben. Daher ist der Geschwindigkeitsvektor eine lineare Funktion der Zeit.

Wenn die äussere Einwirkung einer Impulsbelastung entspricht, kann die dynamische Last $Q_\alpha = Q_\alpha^0 \cdot q(t)$ durch eine Anfangsgeschwindigkeit $v_\alpha^0 = \left(I_0/m^*\right)Q_\alpha^0$ ersetzt werden. Das Beispiel in Abb. 5.20 (c) zeigt die dynamische Lösung des impulsartig belasteten Systems, wobei die Anfangsgeschwindigkeit dem Zustand in A zum Zeitpunkt $t = 0$ entspricht. Der Geschwindigkeitsvektor rotiert wiederum um A, bis AA_2 erreicht ist. Dann springt der Vektor zum Punkt E auf der Fliessfläche, wo der Beschleunigungs- und der Geschwindigkeitsvektor die gleiche Richtung aufweisen. Im weiteren Bewegungsvorgang wird sich daher nur noch die Grösse des Geschwindigkeitsvektors, nicht aber dessen Richtung ändern. Somit konnte auch für eine Impulsbelastung eine Modalform gefunden werden. In Abb. 5.20 (d) ist die Dissipationsenergie $\dot{D}$ = konst. dargestellt. Die Geschwindigkeitsinkremente sind senkrecht zu den Linien mit konstanter Dissipationsenergie.

[Martin & Symonds 1966] führten das Konzept der Modalform ein, nach welchem die Näherungslösung eines impulsiv belasteten Tragsystems zu einer Modalform konvergiert, wobei sich zeitunabhängige Beschleunigungen des Systems einstellen (Kapitel 5.5.3, Modalform-Näherungslösung). Die Voraussetzung ist, dass das Tragwerk nur kleine Verformungen erfährt und daher keine Geometrieeffekte resultieren.

[Martin 1972] leitete zwei Extremalprinzipien anhand diesem Zweimassenmodell ab und bewies die daraus erhaltenen Ergebnisse: Die Konvergenz des Geschwindigkeitsfeldes zu einer Modalform für starr-plastisches Materialverhalten, welche durch zeitunabhängige Lasten, mit oder ohne impulsive Belastung, für den allgemeinen Fall einer Struktur resultiert. Des Weiteren erarbeitete Martin globale und lokale Prinzipien, anhand welcher das Beschleunigungsfeld für ein bestimmtes System unter impulsiver Belastung ermittelt werden kann.

Ist bei einem System mit ideal (starr-)plastischem Materialverhalten lediglich die (quasi-) statische Traglast und der mit ihr verträgliche instabile Verschiebungszustand von Interesse, so bilden die Grenzwertsätze der Traglastverfahren (Kapitel 3.6.3) das geeignete Werkzeug. Eine nichtlineare Berechnung basierend auf einer sukzessiven Belastungssteigerung erweist sich in der Regel als zu aufwendig.

Aus der Sicht einer praktischen Anwendung kommt daher den Näherungslösungen eine bedeutende Rolle zu. Einerseits werden mit Näherungslösungen die Berechnungen vereinfacht und andererseits sind sie unerlässlich für die Kontrolle numerischer Berechnungen wie der Finite-Elemente-Methode.

Die theoretischen Lösungen anhand starr-plastischen Modellen zeigen allesamt charakteristische Ähnlichkeiten zwischen Balken-, Platten- und Schalentragwerken unter Stossbeanspruchung auf [Jones 2012], nämlich das Ausbilden plastischer Gelenke respektive Gelenkbereiche in Funktion des Ortes und der Zeit sowie die Konvergenz zu einer dynamisch plastischen Modalform (stationäre Phase). Erwartungsgemäss sind diese dynamisch plastischen Eigenschaften daher für allgemeine, stossbeanspruchte Tragwerke gültig.

Eine wesentliche Vereinfachung der dynamischen Berechnung ergibt sich, wenn die stossartige Belastung durch ihren Impuls ersetzt werden kann. Dadurch lässt sich die äussere Einwirkung durch eine Anfangsgeschwindigkeit (kinematische Anfangsbedingung) ersetzen und die Bewegung des Tragwerks mit einer homogenen Differentialgleichung beschreiben. Die Schwierigkeiten, welche mit der Lageänderung der plastischen Fliessgelenke respektive mit den plastischen Fliessbereichen einhergehen, bleiben aber bestehen. Grundsätzlich besteht die Antwort eines starr-plastischen Tragwerks infolge einer

Stossbelastung aus mindestens zwei Phasen. Zahlreiche Näherungslösungen wurden mithilfe von energetischen Überlegungen entwickelt, um Schranken respektive Näherungslösungen für die bleibenden Verschiebungen von dynamisch belasteten, plastischen Tragwerken zu bestimmen. Eine weitere wesentliche Vereinfachung wurde vorgenommen, indem nur die stationäre Phase berücksichtigt und somit die transiente Phase, in welcher die Fliessgelenke und plastischen Fliessbereiche ihre Lage während der Bewegung ändern, vernachlässigt wurde. Weitere Schwierigkeiten kommen hinzu, wenn auch die Auswirkungen von Geometrieänderungen (grosse Verschiebungen) und viskose Vorgänge berücksichtigt werden müssen.

Viskoplastizität

Bis anhin wurde das dynamische Tragwerksverhalten unter Einbezug der Trägheitseffekte und unter Ausschluss von viskosen Vorgängen untersucht, d. h., es wurde die Gültigkeit ratenunabhängiger Modelle vorausgesetzt.

Bereits [von Karman & Duwez 1950] weisen darauf hin, dass bei einem Stossvorgang von grosser Intensität die Dehnrate der beteiligten Baustoffe als Funktion der Zeit und des Ortes variiert. Daher entspricht eine zur Lösung der dynamischen Aufgabe angenommene Spannungs-Dehnungsbeziehung $\sigma = f(\varepsilon)$ nicht zwingend derjenigen aus (quasi-)statischen Versuchen. Wie in Kapitel 2 dargelegt, sind die Eigenschaften der Baustoffe Betonstahl und Beton in einem gewissen Beanspruchungsbereich dehnratenabhängig. Daher liefert die ratenunabhängige Plastizitätstheorie, wie bis anhin angenommen, eine Näherungslösung für genügend langsam ablaufende Vorgänge.

In verschiedenen Arbeiten von [Taylor 1946, 1958], [Karman & Duwez 1950], [Rakhmatulin 1945] und Weiteren wurde zur Beschreibung der eindimensionalen plastischen Wellenausbreitung ein ratenunabhängiger Ansatz basierend auf der Annahme einer „dynamischen“ Spannungs-Dehnungs-Beziehung, welche nicht zwingend der „statischen“ Beziehung entspricht, vorgeschlagen [Lubliner 2005]. In der Literatur ist diese Theorie als Karman-Taylor-Rakhmatulin(KTR-)Theorie bekannt.

In Parkes’ Arbeit [Parkes 1955] konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie erreicht werden, indem ein „dynamischer“ Wert für den Biegewiderstand basierend auf den Versuchsdaten von [Manjoine 1944] für die ratenabhängige Fliessfestigkeit des Stahls verwendet wurde.

[Perrone 1965] zeigte an einem Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad, dass mit dem Ersetzen der statischen Reaktionskraft durch einen konstanten „dynamischen“ Wert eine zufriedenstellende Näherungslösung erzielt werden kann, womit impliziert wird, dass das Verschiebungsfeld des ratenabhängigen Modells demjenigen des starr-plastischen Modells entspricht.

Die Anwendbarkeit einer ratenunabhängigen Theorie zur Beschreibung des dynamischen Tragwerksverhaltens mithilfe einer dynamischen Spannungs-Dehnungsbeziehung anstelle einer viskoplastischen Theorie wurde bis anhin oftmals angezweifelt und infrage gestellt. [Bodmer & Symonds 1962] führten beispielsweise Versuche an einem einseitig eingespannten Kragbalken aus Stahl durch, wobei sich zeigte, dass Geometrie- sowie Dehnrateneffekte im theoretischen Modell zu berücksichtigen sind.

Ausgehend von der dynamischen Plastizitätstheorie (Kapitel 5.5) entwickelte sich die dynamische Viskoplastizitätstheorie. Ein starr-viskoplastisches Materialverhalten ist durch eine Fliessspannung charakterisiert, unterhalb derer die Dehnrate null beträgt und oberhalb derer die Spannung eine Funktion der Dehnrate ist. Die Idealisierung eines Baustoffs als starr-viskoplastisch führt zu komplizierten nichtlinearen und inhomogenen Beziehungen zwischen den Spannungen und den plastischen Dehnraten. Dadurch ist eine Erweiterung der in Kapitel 5.5 beschriebenen Methoden der dynamischen Plastizitätstheorie mit entsprechenden Schwierigkeiten verbunden. Insbesondere lässt sich die Modalform-Näherungslösung (engl.: mode approximation technique; Kapitel 5.5.3) nach [Martin & Symonds 1966] für starr-plastische Tragwerke unter impulsartiger Beanspruchung nicht direkt auf starr-viskoplastische Tragwerke übertragen, da Modalformen bei starr-viskoplastischen Vorgängen im Allgemeinen nicht existieren [Lee & Martin 1970]. Lee & Martin entwickelten einen alternativen Lösungsweg, bei dem für die Lösung „stückweise" stationäre Modal formen entsprechend den kinetischen Energie-Levels bestimmt werden. Obwohl diese Methode grundsätzlich zufriedenstellende Resultate liefert, wurde von [Symonds 1973] aufgrund ihrer aufwendigen Berechnungsschritte zur Lösung des Variationsproblems ein Näherungsverfahren entwickelt, welches auf einer viskosen anstatt auf einer starr-viskoplastischen Idealisierung beruht. Zur Beschreibung von viskosen Vorgängen lassen sich homogene Beziehungen herleiten, die gegenüber viskoplastischen Theorien wie beispielsweise denjenigen von [Malvern 1951] und [Perzyna 1963] wesentliche Vereinfachungen ermöglichen. Symonds konnte mit der (nichtlinearen, homogenen) viskosen Theorie eine Verbindung zur Modalform-Näherungslösung aufzeigen.

[Wierzbicki & Florence 1970] erarbeiteten ein linearisiertes viskoplastisches Stoffgesetz, welches mit Experimenten verifiziert wurde.

[Kaliszky 1973] erweiterte das von ihm erarbeitete und in Kapitel 5.5.5 beschriebene Näherungsverfahren (kinematische Methode) für grosse Durchbiegungen (Geometrieänderungen) und viskoplastische Baustoffe.

Zusammenfassend sind ratenabhängige Modelle zur Beschreibung von viskosen Vorgängen bei Tragwerken unter Stossbeanspruchung von grosser Intensität insbesondere dann erforderlich, wenn sich entsprechend grosse plastische Deformationen ergeben und dadurch eine starr-ideal plastische Idealisierung zur Beschreibung des Tragverhaltens nicht mehr geeignet ist.

[Stronge & Yu 1993] bezeichnen Dehnrateneffekte nebst weiteren Einflussgrössen wie Querkraft, Elastizität, Geometrieänderungen aufgrund grosser Verformungen etc., als Effekte zweiter Ordnung im Hinblick auf die dynamische Tragwerksantwort, da diese allesamt das Verschiebungsfeld bei entsprechender Stossintensität beeinflussen können.

Letztendlich führt die Berücksichtigung von Dehnrateneffekten stets zu einer Erhöhung der Materialfestigkeit und -steifigkeit des Tragwerks respektive zu einer Reduktion der bleibenden Verschiebungen und zu wirtschaftlicheren Lösungen.

6 Stahlbetonplatten unter Aufprallstoss

6.1 Einleitung

Eine granulare Eindeckung, meist bestehend aus einem gut abgestuften und kompakt gelagerten Kies, ist ein zentrales Element einer Steinschlagschutzgalerie. Eine Kies-eindeckung ist ein dauerhaftes und witterungsbeständiges Material und findet weite Anwendung auf Deckenplatten von Steinschlagschutzgalerien [IABSE 1986].

Im Hinblick auf den Ausbau der Axenstrasse mit Schutzvorrichtungen gegen Steinschlag führte die EMPA Dübendorf/ZH im Jahre 1966 Fallversuche an Stahlbetonplatten mit sogenannten „Dämpfungsschichten“, als Elemente von Steinschlagschutzgalerien durch [EMPA 1966]. Die Versuche wurden mit Fallhöhen bis zu H = 45 m und Fallmassen bis zu m = 57 kp (Kilopond kp als ursprüngliche Einheit der Kraft, 1 kp ≈ 9.8 N) durchgeführt, wobei verschiedene Stahlbetonplatten und Rippenblechplatten sowie die Wirkungsweise der Dämpfungsschichten Kies, Teerbeton, Holz, Stroh u.a. untersucht wurden. Die umfangreiche Versuchsreihe lieferte die folgenden wertvollen Erkenntnisse:

- Platten mit grosser Masse und Duktilität eignen sich am besten zur Aufnahme grosser Stossenergien.
- Dünne Dämpfungsschichten (unter 20 cm) haben eine unbedeutende Verminderung der Stosskräfte zur Folge; die Eindeckung ist aber zum Schutz der Betonoberfläche unerlässlich.
- Das Tragvermögen eines Tragwerks unter impulsartiger Beanspruchung liegt aufgrund der wirkenden Trägheitskräfte weit über demjenigen infolge statischer Beanspruchung.
- Bei schlagartigen Belastungen können beträchtliche Abhebekräfte auftreten und daher müssen die Platten auf den Haupttträgern gut verankert werden.

Die Kieseindeckung erwies sich dabei als das am besten geeignete Dämpfungssystem. Die bedeutende Aussage des ersten Punktes konnte mit den Feder-Masse-Systemen mit einem Freiheitsgrad für stossartige Beanspruchungen in Kapitel 5.4 veranschaulicht und bestätigt werden. Die Anwendung einer plastischen Berechnungsmethode für Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung führt zudem im Vergleich mit einer elastischen Methode zu einer wirtschaftlicheren Lösung. Indem die vorhandene Duktilität ausgenutzt wird, kann der Tragwiderstand reduziert werden. Elastische oder elastisch-plastische dynamische Lösungen für Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung sind schwierig zu finden, da die Steifigkeit des Stahlbetons aufgrund der Rissbildung schwierig zu ermitteln ist und zudem die Dämpfung eine wichtige Rolle spielen kann.

Die zweite Beobachtung erweist sich im Hinblick auf lokale Versagensarten von Stahlbetonplatten von grosser Wichtigkeit. Diese Thematik wird insbesondere hinsichtlich eines lokalen Versagens infolge Durchstanzen am Aufprallort in Kapitel 6.2 für die granularen Eindeckungen Sand und Kies diskutiert und mit Versuchen untermauert. Dabei hat sich herausgestellt, dass eine Kies- gegenüber einer Sandeindeckung zu favorisieren ist.

In Kapitel 6.2 wird die Wirkungsweise der Eindeckung, der Einfluss der Eindeckung auf den Versagensmechanismus von Stahlbetonplatten sowie die Modellierung der Eindeckung aufgrund Beobachtungen aus eigenen und in der Literatur dokumentierten Experimenten diskutiert.

In Kapitel 5.5 wurde gezeigt, dass eine analytische Lösung bereits von einfachen Tragelementen wie Balken und Platten bei stossartigen Belastungen und starr-plastischem Tragverhalten zu komplizierten Berechnungen führen kann. Für praktische Anwendungen spielen daher Näherungslösungen eine wichtige Rolle. Auch in Hinsicht auf Kontrollen von Berechnungen mit der Finite-Elemente-Methode sind Näherungslösungen wichtig.

Ein Lösungsverfahren zur Berechnung des Biegeverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten, welches anhand von Experimenten verifiziert und diskutiert wird, ist in Kapitel 6.3 beschrieben. Das Lösungsverfahren beruht auf einer starr-plastischen Modellvorstellung für die Berechnung der dynamischen Plattendurchbiegung von duktilen Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung am Aufprallort. Es werden kleine Verformungen vorausgesetzt. Eine weitere wesentliche Vereinfachung kann erzielt werden, wenn die Berechnung der stossartigen Belastung infolge eines Aufprallstosses mit dem Impulserhaltungssatz umgangen wird. Die von der Lageänderung der Fliessgelenke respektive der plastischen Gelenkbereiche während der Bewegung verursachten Schwierigkeiten bleiben jedoch bestehen, da diese nicht davon abhängig sind. Wird allerdings ein stationärer, kinematisch verträglicher Fliessmechanismus während der gesamten Bewegung betrachtet, lässt sich eine weitere Vereinfachung erzielen. Das Prinzip der virtuellen Leistungen und der Impulserhaltungssatz werden dabei ins Zentrum gestellt, wobei die Fliessgelenklinientheorie als Ausgangssituation dient. In Kapitel 6.4 werden schliesslich praxisrelevante Überlegungen angestellt.

Der in diesem Kapitel behandelte Stoss eines starren Körpers auf eine Stahlbetonplatte mit granularer Eindeckung wird gemäss Kapitel 3.5.4 als plastischer Stoss klassifiziert. Der Aufprallkörper bleibt nach dem Stoss in der Eindeckung liegen und kommt nach einer Weile mit der Platte gemeinsam zum Stillstand.

6.2 Granulare Eindeckung

6.2.1 Wirkungsweise der Eindeckung

Ein Stoss zwischen zwei starren Körpern findet während einer sehr kurzen Dauer im Bereich von Millisekunden statt (Kapitel 3.5.4). Für die Anwendung der Starrkörperstosstheorie, bei welcher die einzelnen Körper die Geschwindigkeit während des Stosses sehr schnell ändern, wird eine kurze Stossdauer vorausgesetzt. Es resultieren vernachlässigbar kleine Verschiebungen während des Stosses als eine Konsequenz aus der sehr kurzen Stossdauer.

Liegt zwischen zwei starren Körpern eine sogenannte Dämpfungsschicht bestehend aus einer granularen Eindeckung, so führt dies generell zu einer Verlängerung der Stossdauer, einer Abminderung des Stosskraftmaximums und zu einer veränderten Form der Stosskraft-Zeitfunktion. Die jeweiligen Grössen sind von den Eigenschaften der Eindeckung (Schichtstärke, Korngrössenverteilung, Lagerungsdichte etc.) und der Stossintensität (Masse, Fallhöhe, Belastungskonfiguration) abhängig.

Nachfolgende Untersuchungen betrachten einerseits steife (aufgrund der Anordnung der Lagerung) und andererseits duktile Stahlbetonplatten (Lagerung an Plattenränder angeordnet) mit einer granularen Eindeckung bestehend aus Sand oder Kies, welche durch einen starren, aufprallenden Körper belastet werden.

Einfluss der Eigenschaften der Eindeckung

Eine umfangreiche Reihe von Stossversuchen wurde in Japan in den Jahren 2012 und 2013 an einer (steifen) Stahl-Beton-Verbundplatte (5 m × 5 m × 0.5 m) mit Kies- und Sandeindeckung durchgeführt. Eine detaillierte Beschreibung der Versuche und der Resultate befindet sich in [Röthlin et al. 2015]. Abb. 6.1 zeigt den Versuchskörper mit der Bewehrung und den Stahlprofilen, die Versuchseinrichtung sowie die Korngrössenverteilung und die wesentlichen Parameter der granularen Eindeckungen.

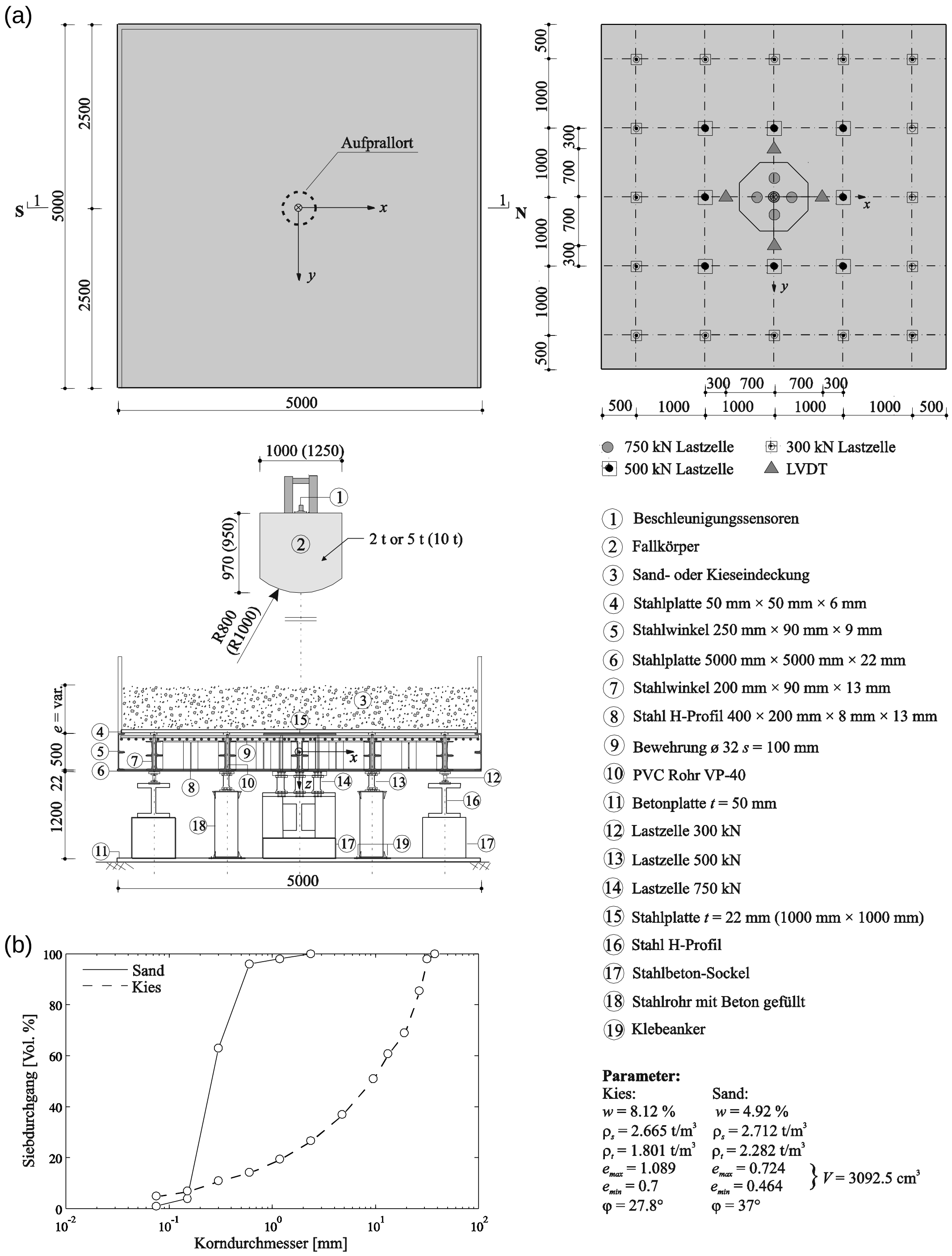


Abb. 6.1 *Stahlbetonverbundplatte mit Kies- und Sandeindeckung [Röthlin et al. 2015]:*
(a) Versuchskörper mit Bewehrung und Stahlprofilen, Versuchseinrichtung. Abmessungen in mm;
(b) Korngrössenverteilung der granularen Eindeckungen.

Bei allen Fallversuchen wurde das Fallgewicht jeweils mit einem Kran auf die gewünschte Höhe angehoben und mit einer speziellen Auslösevorrichtung fallen gelassen. Die im Grundriss in Abb. 6.1 (a) dargestellten Wegaufnehmer, sogenannte „Linear Variable Displacement Transducers“ (LVDTs), wurden verwendet, um die vertikalen Verschiebungen der Verbundplatte an der Unterseite zu messen. Die gemessenen Verschiebungen waren vernachlässigbar klein, d. h. die Verbundplatte kann aufgrund der Lagerung als steif betrachtet werden.

Ziel der Versuche war die Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Sand- und Kieseindeckungen unter Stossbeanspruchung mit unterschiedlichen Belastungskonfigurationen durch Variation der Masse (m = 2 t, 5 t, 10 t) und Fallhöhe (H = 2÷31.25 m). Die Parameter der Eindeckung waren der Verdichtungsgrad, die Eindeckungsstärke und die Korngrössenverteilung, wobei die Form der Kiespartikel generell vieleckig war und eine gute Abstufung vorlag, während die Sandeindeckung schlecht abgestuft war. Ungefähr 96 % der Sandpartikel weisen einen Durchmesser ≤ 0.6 mm auf.

Durch Variation der Belastungskonfiguration und der Parameter der Eindeckung konnte deren Einfluss auf die maximale Aufprallkraft und die Charakteristik des Zeitverlaufs der Aufprallkraft, der transmittierten Aufprallkraft und der Eindringtiefe des aufprallenden Körpers in die Eindeckung analysiert werden. Die Aufprallkraft wurde anhand von Beschleunigungssensoren ermittelt. Der Zusammenhang zwischen der Aufprallkraft F und der beschleunigten aufprallenden Masse m ist durch das zweite Newton'sche Axiom $F = ma$ gegeben. Die gemessene Aufprallkraft ist daher stark von der verwendeten Kapazität der Beschleunigungssensoren abhängig. Die transmittierte Kraft ergab sich aus der Reaktionskraft, welche anhand der zwischen der Unterseite der Platte und den Auflagern angeordneten Lastzellen ermittelt wurde. Die Eindringtiefe wurde mit einer Hochgeschwindigkeitskamera ermittelt.

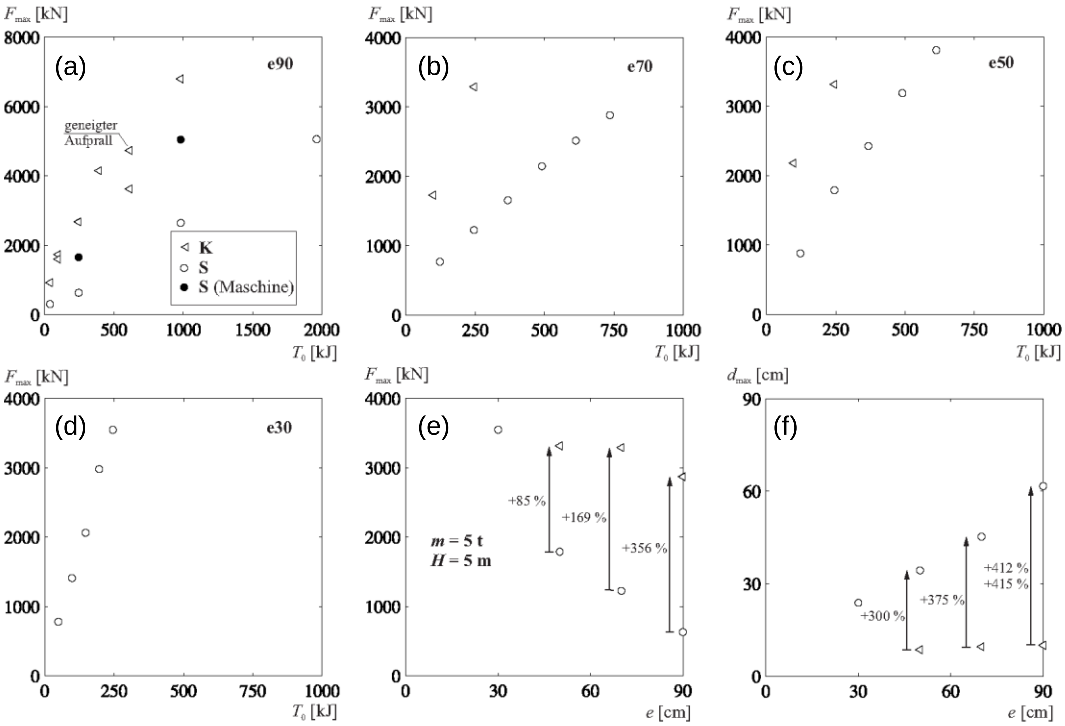


Abb. 6.2 *Versuchsresultate [Röthlin et al. 2015]: Vergleich der maximalen Aufprallkraft F_{max} als Funktion der kinetischen Energie T_0 des Aufprallkörpers für verschiedene Eindeckungsstärken:*
(a) e = 90 cm; (b) e = 70 cm;
(c) e = 50 cm; (d) e = 30 cm;
e), (f) Vergleich der maximalen Aufprallkraft F_{max} und Eindringtiefe d_{max} als Funktion der Eindeckungsstärke e für die Sand- und Kieseindeckung mit der Belastungskonfiguration m = 5 t und H = 5 m.

Die Versuche zeigen, dass die Art der granularen Eindeckung (Sand respektive Kies, Korngrössenverteilung, Form der Partikel), der Kompaktionsgrad und die Eindeckungsstärke einen massgebenden Einfluss auf die oben genannten Stosscharakteristiken haben. Der Vergleich zwischen einer Kies- und einer Sandeindeckung zeigt, dass bei Verwendung von Kies gegenüber Sand aufgrund der Korngrössenverteilung (gut abgestuft), der Form der Partikel (vieleckig) und des Kompaktionsgrads (hoch) grössere Aufprallkräfte, kleinere

Stossdauern und kleinere Eindringtiefen bei gleichbleibender Stossintensität, Belastungskonfiguration und Eindeckungsstärke resultieren. Mit einer zunehmenden Eindeckungsstärke wird bei gleichbleibender Aufprallmasse und -geschwindigkeit die Stossdauer länger und die maximale Aufprallkraft kleiner. Bei gleichbleibender Eindeckungsstärke und Aufprallmasse ergibt sich bei einer Erhöhung der Fallhöhe (Aufprallgeschwindigkeit) eine kürzere Stossdauer. Eine maschinelle Verdichtung der Eindeckung (Erhöhung Kompaktionsgrad) führt ebenfalls zu grösseren Aufprallkräften respektive kleineren Eindringtiefen. In Abb. 6.2 (a-d) ist ein Vergleich der maximalen Aufprallkraft F_{max} als Funktion der kinetischen Energie T_0 des Aufprallkörpers für verschiedene Eindeckungsstärken dargestellt.

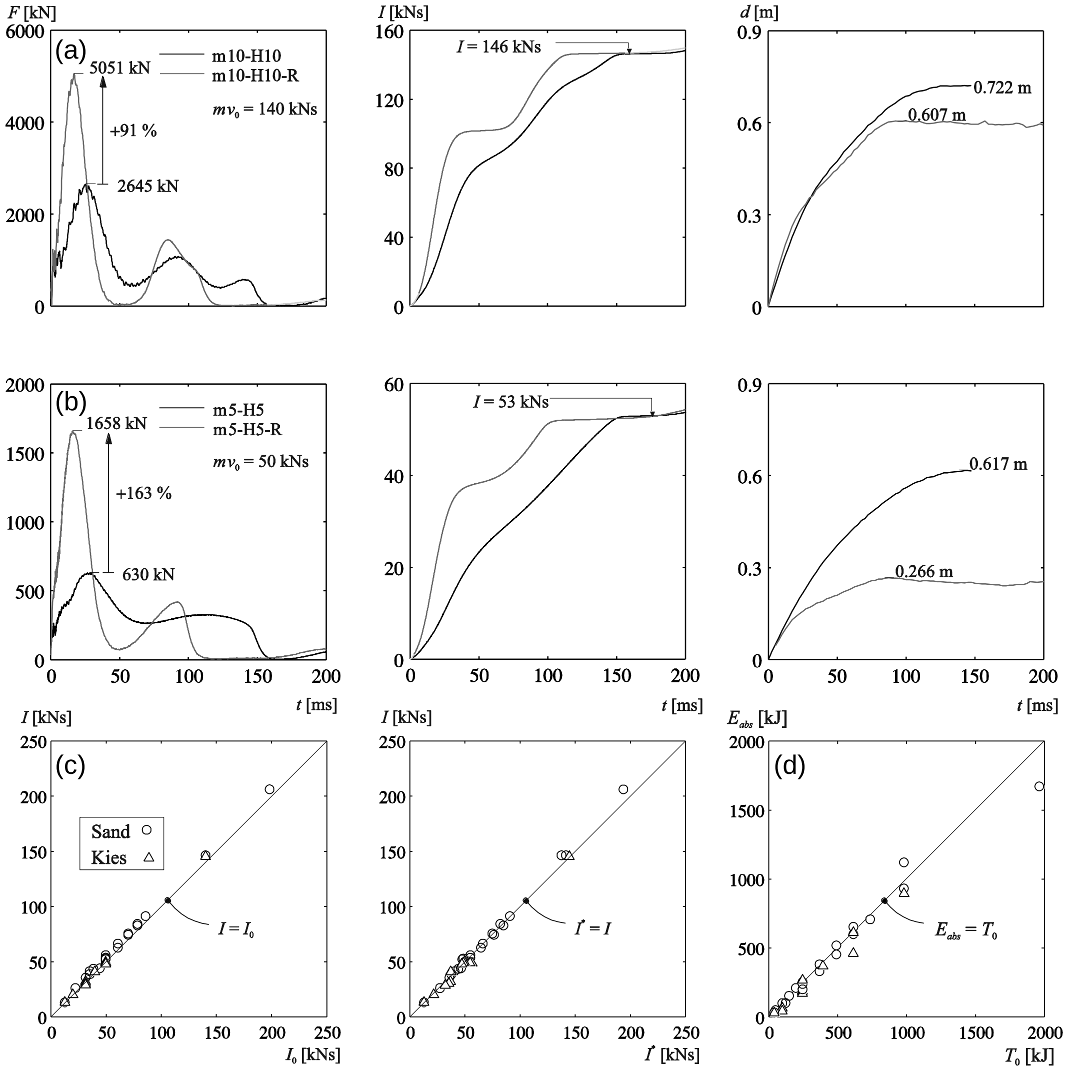


Abb. 6.3 *Versuchsresultate [Röthlin et al. 2015]: Vergleich der Zeitverläufe der Aufprallkraft F(t), des Impulses I(t) und der Eindringtiefe d(t) für unterschiedliche Verdichtungsmethoden*): Sandeindeckung*

(a) m10-H10 und m10-H10-R;

(b) m5-H5 und m5-H5-R;

(c) Gegenüberstellung Impuls des Aufprallkörpers $I_0 = mv_0$, Impuls der Aufprallkraft I und der transmittierten Aufprallkraft I^*;

(d) kinetische Energie T_0 des Aufprallkörpers und absorbierte Energie E_{abs} während Eindringvorgang des Fallkörpers.

**) Verdichtungsmethode: Kennzeichnung „R“ bedeutet maschinell verdichtet; ohne „R“ bedeutet Verdichtung mittels Fussstampfen.*

Je grösser die Stossintensität (aufprallende Masse und Fallhöhe) wird respektive je geringer die Eindeckungsstärke bei gleichbleibender Stossintensität, desto kleiner werden die

Abweichungen zwischen Kies und Sand hinsichtlich der Einwirkungen (Aufprallkraft, transmittierte Aufprallkraft und Eindringtiefe), vergleiche Versuche mit gleichbleibender Stossintensität m = 5 t, H = 5 m in Abb. 6.2 (e, f). Mit anderen Worten: Es lässt sich eine Reduktion der dämpfenden Wirkung der granularen Eindeckung erkennen.

Die dämpfende Wirkung der granularen Eindeckung ergibt sich hauptsächlich aus der Umverteilung der einzelnen Partikel. Mithilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera konnte die Umverteilung während des Eindringvorgangs in die Eindeckung aufgezeichnet werden. Dabei zeigte sich, dass die Sandpartikel aufgrund der kleinen Grösse und schlechter Abstufung in grossem Masse umverteilt wurden, während die eher eckig geformten und gut abgestuften Kiespartikel weniger umverteilt und somit unterhalb des aufprallenden Körpers zusammengedrückt wurden.

Die Beobachtungen in dieser Versuchsreihe zeigen, dass eine Sandeindeckung bessere Dämpfungseigenschaften aufweist als eine Kieseindeckung in dem Sinne, als dass sich kleinere Aufprallkräfte, transmittierte Aufprallkräfte und Eindringtiefen ergeben. Demgegenüber kann eine grosse Eindringtiefe, wie dies bei grosser Stossintensität und einer Sandeindeckung auftreten kann, zu einem lokalen Versagen (beispielsweise Durchstanzen am Aufprallort) der darunterliegenden Platte führen, vergleiche Kapitel 6.2.2. Bei Verwendung einer Sandeindeckung wurde weiter beobachtet, dass die Verdichtungsmethode eine massgebende Rolle hinsichtlich der Zeitverläufe der Aufprallkraft, der transmittierten Aufprallkraft und der Eindringtiefe des Aufprallkörpers spielt. Dies gilt in Bezug auf die Form der Zeitverläufe, die maximalen Amplituden und die Zeitdauer der Belastung und die Eindringung des Aufprallkörpers in die Eindeckung, Abb. 6.3 (a, b). Einerseits wurde die Sandeindeckung maschinell verdichtet (Kennzeichnung mit „R“) und andererseits durch Fussstampfen. Durch Aufintegrierung der Last-Zeitfunktion lässt sich der Impuls $I(t)$ ermitteln, welcher bei beiden Verdichtungsmethoden übereinstimmt. Daher handelt es sich bei den grossen Unterschieden in den Versuchsresultaten der Last-Zeitfunktion aufgrund der Verdichtungsmethode nicht um ein messtechnisches Problem.

Mit dem Abb. 6.3 (c) lässt sich zeigen, dass der Impuls $I_0 = mv_0$ des aufprallenden Körpers erhalten bleibt und ungefähr dem Impuls der Aufprallkraft und der transmittierten Aufprallkraft (Integration der Last-Zeitfunktionen) entspricht. In Abb. 6.2 (d) sind die kinetische Energie des Aufprallkörpers $T_0 = 0.5\ mv_0^2$ und die absorbierte Energie E_{abs} gegeneinander aufgetragen, wobei E_{abs} mittels des Integrals der Kraft-Eindringtiefe-Funktion berechnet wurde.

Der zeitliche Verlauf der Aufprallkraft, deren Maximalwert und die Stossdauer waren in den Versuchen ähnlich wie die Werte der transmittierten Aufprallkraft (Reaktionskräfte) mit maximalen Abweichungen der Maximalwerte von $\Delta_{max}(F_{max}, F^*_{max})$ = +25 % / -7 % (Sand) und +26.5 % / -7 % (Kies) mit Ausnahme der Versuche G-m2-H31.25 und G-m2-H31.25-R mit $\Delta_{max}(F_{max}, F^*_{max})$ = +33 % und +41 %.

Lastausbreitung

Aus Durchstanzversuchen mit statischen Lasten ist bekannt, dass der Radius (Umfang) der konzentrierten Flächenlast einen massgebenden Einflussfaktor auf den Durchstanzwiderstand von Stahlbetonplatten darstellt. Demgegenüber spielt der Radius der Flächenlast bei einem globalen Biegeversagen eine untergeordnete Rolle.

Die nachfolgenden Darstellungen resultieren aus Beobachtungen von am Muroran Institute of Technology durchgeführten Stossversuchen auf Kies- [Kurihashi 2016] und Sandeindeckung ([Okada et al. 2011a], [Konno et al. 2011], [Konno et al. 2012], [Kurihashi 2016]). Die Versuchseinrichtung ist in Abb. 6.4 dargestellt. In den von [Okada et al. 2011a] und [Konno et al. 2011] durchgeführten Versuchen wurden die neun Lastzellen zur Bestimmung der Reaktionskraft (Bezeichnung Nr. 6 in Abb. 6.4) nicht verwendet.

Das Ziel der Versuche war die Untersuchung der Spannungsverteilung, welche anhand von Lastzellen (Bezeichnung Nr. 7 in Abb. 6.4) mit einem Durchmesser von 20 mm und einem Abstand von 50 mm ermittelt wurde, um eine Aussage über die Lastausbreitung innerhalb der Eindeckung machen zu können. Die maximale Kapazität der Lastzellen betrug 7 MPa (Kies: [Kurihashi 2016]; Sand: [Okada et al. 2011a], [Konno et al. 2011]) respektive 10 MPa (Sand: [Konno et al. 2012]). Dies führte dazu, dass die zugelassene maximale Aufprallenergie (Fallhöhe, Fallmasse) beschränkt war. Die Korngrössenverteilung ist in Abb. 6.1 (b) dargestellt. Die Versuche für Kieseindeckung wurden jeweils dreimal wiederholt, wobei die Ausgangssituation (Eigenschaften der Eindeckung) jeweils wiederhergestellt wurde.

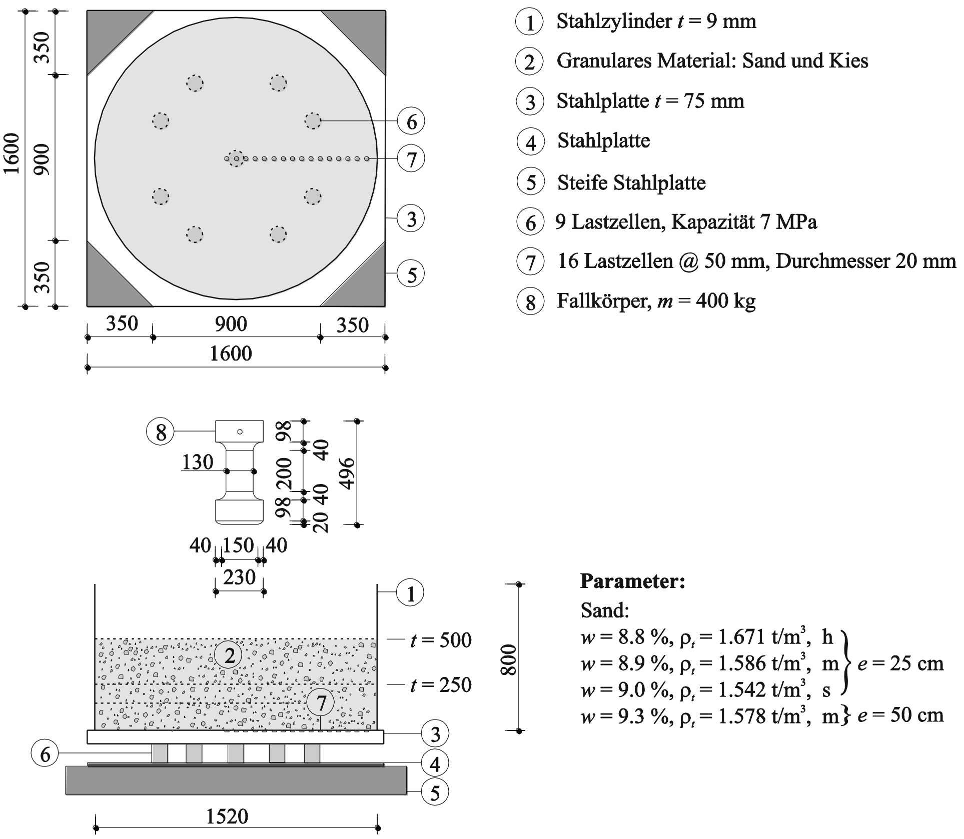


Abb. 6.4 *Versuchseinrichtung: Stossbelastung von Kies und Sand ([Konno et al. 2012], [Kurihashi 2016]). Abmessungen in mm. Kompaktionsgrad klein: s = small, mittel: m = medium, hoch: h = high.*

Ein Vergleich der Versuchsresultate in Abb. 6.5 zeigt wesentliche Unterschiede in der maximalen Spannungsverteilung zwischen einer Sand- und einer Kieseindeckung auf. Bei Verwendung einer Kieseindeckung ist aus der Spannungsverteilung ersichtlich, dass es im Vergleich zu einer Sandeindeckung zu grösseren Spannungskonzentrationen infolge der weniger homogen gelagerten Kiespartikel kommt. Allerdings wird die Belastung bei einer Kies- gegenüber einer Sandeindeckung auf eine grössere Fläche verteilt. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass die Eindringtiefe in die Sandeindeckung im Vergleich zu einer Kieseindeckung bei gleichbleibenden Ausgangsgrössen grösser ist und sich die Last daher weniger ausbreiten kann als bei Verwendung einer Kieseindeckung. Die grössere Eindringtiefe bei Sand ergibt sich in erster Linie aus der schlechten Abstufung der Partikel und der geringeren Verzahnung der Partikel im Vergleich zu Kies. Eine Erhöhung der Aufprallenergie oder eine Verkleinerung der Eindeckungsstärke mit gleichbleibender Aufprallenergie führt zu einer Konzentration der Spannungen auf einer kleineren Fläche respektive zu einer kleineren Lastausbreitung.

Die maximalen Spannungswerte bei der Verwendung einer Kieseindeckung treten zum Zeitpunkt des Erreichens der maximalen Aufprallkraft auf, welcher in etwa dem Zeitpunkt des Erreichens der maximalen Reaktionskraft entspricht. Demgegenüber konnte in den Versuchsreihen von [Okada et al. 2011a] und [Konno et al. 2012] bei Verwendung einer Sandeindeckung mit unterschiedlichem Kompaktionsgrad eine interessante Beobachtung gemacht werden (Abb. 6.6). Dabei zeigte sich, dass bei kleiner und mittlerer Kompaktion (Kennzeichnung mit „s“ für small und „m“ für medium) zum Zeitpunkt des Erreichens des zweiten Maximalwerts der Reaktionskraft grössere Spannungswerte auftreten als beim Erreichen des ersten Maximalwerts der Reaktionskraft.

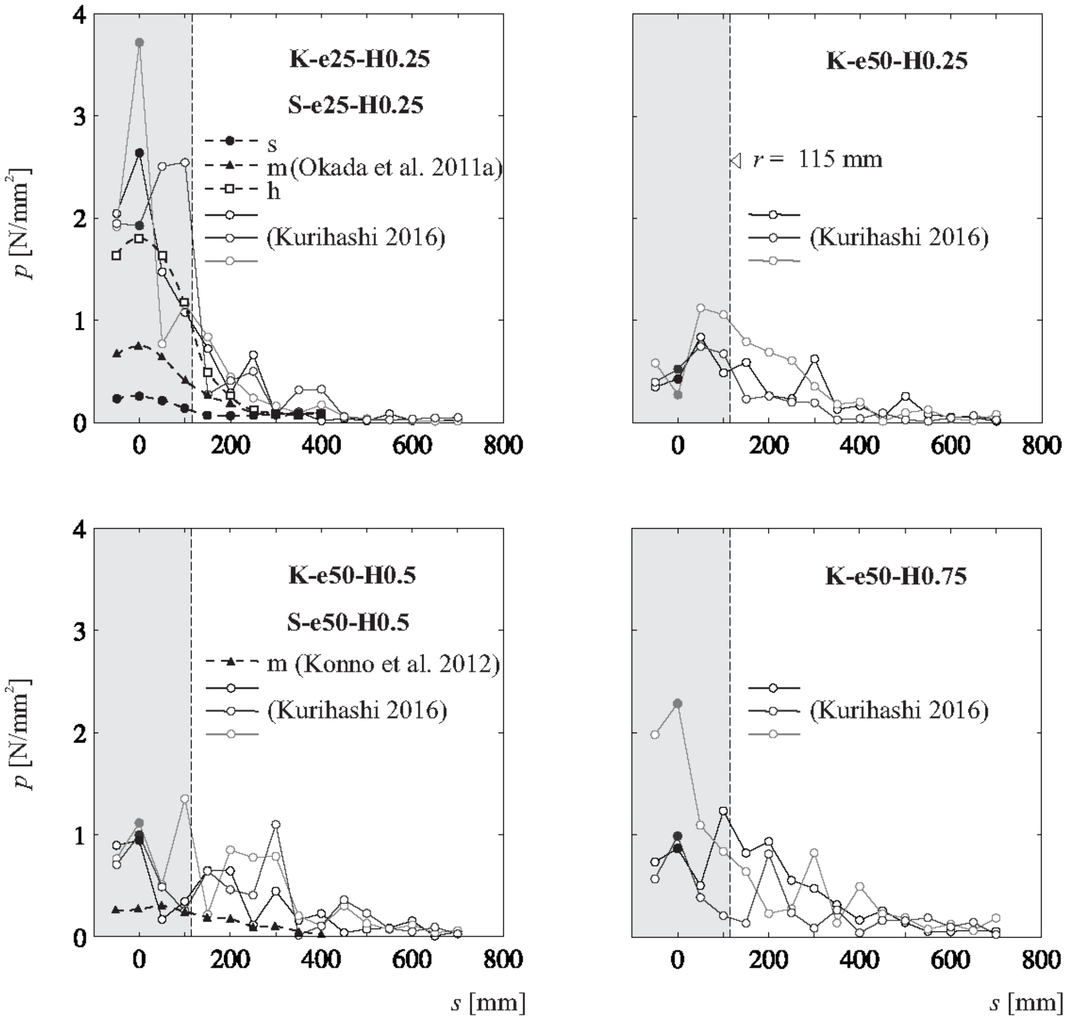


Abb. 6.5 *Versuchsresultate (Reaktionskraft) von Aufprallversuchen auf Kies (K) (aus [Kurihashi 2016], ergänzt) und Vergleich mit Versuchen auf Sand (S) (gestrichelt, Kompaktionsgrad klein: s = small, mittel: m = medium, hoch: h = high) (aus [Okada et al. 2011a], [Konno et al. 2012], ergänzt) für verschiedene Eindeckungsstärken e = 25 cm und e = 50 cm: maximale Spannungsverteilung in Abhängigkeit von der Distanz s vom Aufprallort. Die Versuche von Kurihashi wurden jeweils dreimal wiederholt (r = D/2 = Radius und m = 400 kg = Masse des Aufprallkörpers).*

Bei einer grossen Kompaktion (Kennzeichnung mit „h“ für high) sind jedoch die Spannungswerte beim Erreichen des ersten Maximalwerts der Reaktionskraft grösser als zum Zeitpunkt des zweiten Maximalwerts der Reaktionskraft. Die in Abb. 6.5 dargestellten Versuchsresultate für eine kleine Fallhöhe H = 0.25 m (S-e25-H0.25) zeigen, dass für alle drei Kompaktionsgrade (s, m, h) die maximalen Spannungswerte beim Erreichen des ersten Maximalwerts der Reaktionskraft erreicht sind. Es wird vermutet, dass diese Phänomene mit der Wellenausbreitung in Zusammenhang stehen. Bei einer stossartigen, kurzzeitig wirkenden Belastung breiten sich, je nach Intensität der Stossbelastung, im Inneren einer

Struktur elastische und plastische Wellen aus. Ebenso erfolgt eine solche Wellenausbreitung auch in einer Struktur, die aus einem granularen Material besteht. Dieses Phänomen der transienten Wellen tritt im gleichen Zeitbereich auf, den die Wellen für die Ausbreitung durch die Stärke der Struktur benötigen, und ist abhängig von der Steifigkeit des granularen Materials. In der Literatur wird dieses sogenannte lokale Verhalten auch als Kurzzeitverhalten bezeichnet, da der Zeitbereich sehr kurz ist. Bei Stahlbetonplatten wurde beobachtet, dass dieses Phänomen der Wellenausbreitung zu einer lokalen Schädigung des Betons führen kann.

Die Versuche mit Sandeindeckung zeigten, dass die maximalen Spannungen hauptsächlich innerhalb der Fläche des Fallgewichtes auftreten. Bei einer Erhöhung der Fallhöhe respektive einer Reduktion der Eindeckungsstärke bei im Übrigen konstanten Grössen kann eine Reduktion der Belastungsfläche beobachtet werden. Die Reaktionskräfte zeigen, dass der grösste Teil der Last bei der Lastzelle am Aufprallort eingeleitet wird.

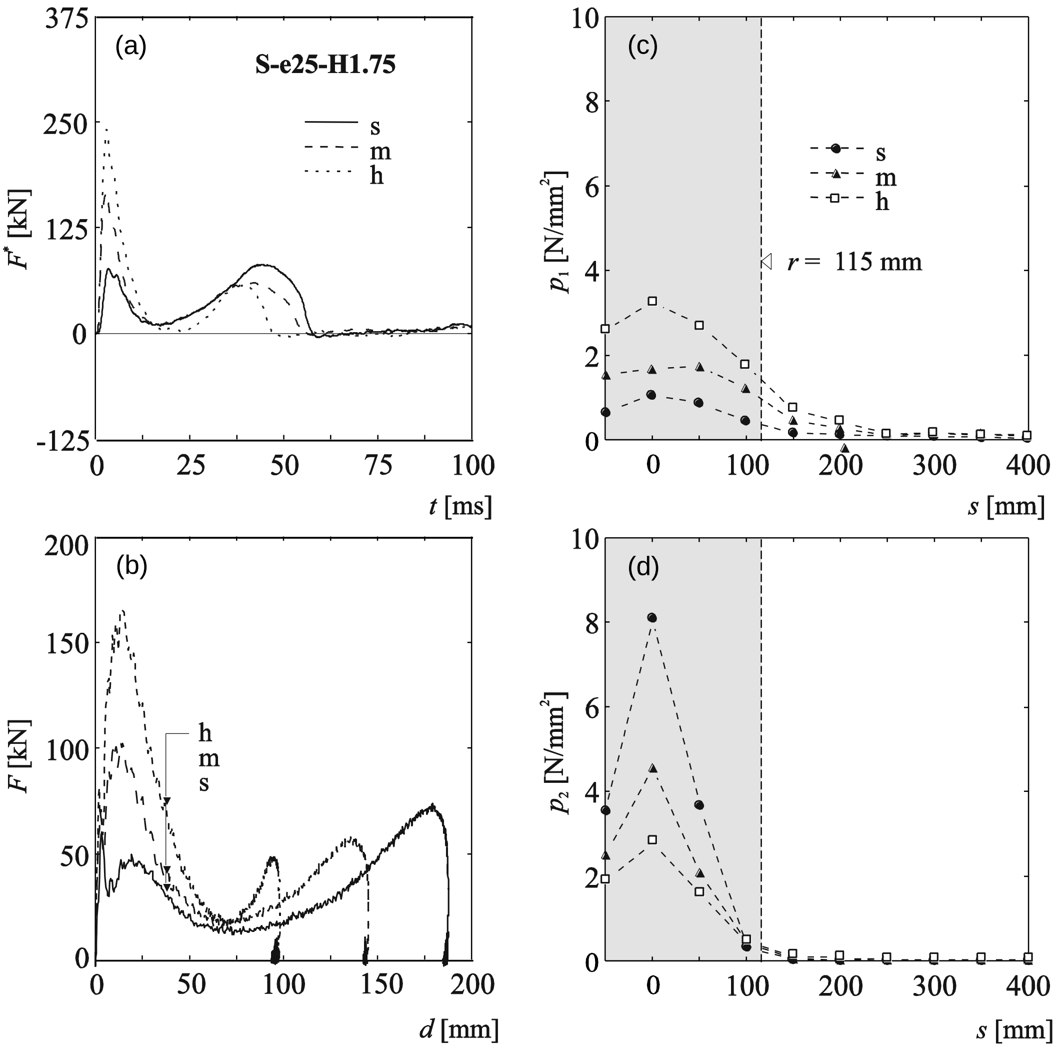


Abb. 6.6 *Versuchsresultate von Aufprallversuchen auf Sand (S): S-e25-H1.75 (gestrichelt, Kompaktionsgrad klein: s = small, mittel: m = medium, hoch: h = high) (aus [Okada et al. 2011a], ergänzt) für eine Eindeckungsstärke e = 25 cm und eine Fallhöhe H = 1.75 m:*
(a) Reaktionskraft aus dynamischen Versuchen;
(b) statische Versuche;
c), (d) maximale Spannungsverteilung beim Erreichen des ersten und zweiten Kraftmaximums der Reaktionskraft in Abhängigkeit von der Distanz s vom Aufprallort (r = D/2 = Radius und m = 400 kg = Masse des Aufprallkörpers).

Statische Versuche mit Sand und Kies [Röthlin et al. 2015] zeigten, dass bei Sand grössere örtliche Spannungsspitzen als bei Kies auftreten. Dahingegen ist die Belastungsfläche insbesondere bei grossen Eindeckungsstärken bei Kies grösser als bei Sand. Bei Verringerung der Eindeckungsstärke zeigt sich sowohl bei Sand als auch bei Kies, dass die Belastungsfläche etwa der Fläche des Fallkörpers entspricht, die maximalen Spannungswerte grösser werden und zudem die Unterschiede zwischen Sand und Kies hinsichtlich der Lastausbreitung geringer werden. Bei der Sandeindeckung war die Lastausbreitung bei den jeweiligen Eindeckungsstärken in etwa gleich. Bei Verwendung von Sand mit konstanter Eindeckungsstärke konnte bei einer Erhöhung der Fallhöhe eine deutliche Spannungskonzentration beobachtet werden.

Generell erscheint eine zu detaillierte Untersuchung der Spannungsverteilung aus praktischer Sicht fraglich, da zum einen die Form respektive Grösse des Fallkörpers einen grossen Einfluss auf die resultierende Spannungsverteilung respektive Belastungsfläche hat, welche in der Realität jedoch nicht voraussehbar ist, und die Versuche zum anderen zeigten, dass die massgebenden Spannungen innerhalb der Fläche des Fallkörpers liegen. Daher erscheint es umso wichtiger, geeignete Grenzbetrachtungen vorzunehmen. Bei grossen Aufprallenergien scheint es vernünftig zu sein, die Lastausbreitung innerhalb des Durchmessers des Fallgewichtes anzunehmen, wobei in der Praxis für die Form des Steinblocks jedoch ebenfalls Annahmen getroffen werden müssen. Zudem zeigten die Versuche, dass die Steifigkeit des granularen Materials einen grossen Einfluss auf die Spannungen hat, das Material jedoch während der Lebensdauer auch komprimiert wird und sich daher der Kompaktionsgrad erhöht.

6.2.2 Einfluss auf den Versagensmechanismus von Platten

Nachfolgend werden Beobachtungen aus Bruchversuchen an Platten mit und ohne granulare Eindeckung unter statischer Belastung sowie Stossbeanspruchung diskutiert. An den in Abb. 6.7 (a) dargestellten Versuchskörpern wurden in Japan verschiedene Versuchsserien an Platten unter statischer Belastung und Stossbeanspruchung sowohl mit als auch ohne Sandeindeckung durchgeführt ([Matasaka et al. 2011], [Okada et al. 2011b], [Kurihashi 2016]). Die drei Versuchskörper mit den Abmessungen 2 m × 2 m, der Plattenstärke h = 150 mm und unterschiedlicher Lagerungsart weisen identische Biegebewehrung auf. Die Linienlager entsprechen dabei gelenkigen Lagerungen, wobei ein Abheben der Platten durch konstruktive Massnahmen verhindert wurde.

Die Platten sind in den beiden unteren Bewehrungslagen orthogonal bewehrt (1. und 2. Lage: Ø 13 mm, s = 150 mm); auf der Biegedruckseite gibt es keine Bewehrung. Die Versuchskörper weisen keine Querkraftbewehrung auf. Die kreisförmige Krafteinleitungsstelle weist einen Durchmesser von D = 90 mm [Matasaka et al. 2011] respektive D = 230 mm [Okada et al. 2011b] auf. Die Reaktionskräfte bei den beiden gelenkigen Punktlagerungen der Platte S1 wurden mittels unterhalb der Platte angeordneten Lastzellen gemessen, Abb. 6.7 (c). In Abb. 6.7 (d) sind die Last-Verformungskurven aus [Matasaka et al. 2011] dargestellt. Die Belastung wurde monoton gesteigert bis die Traglast erreicht wurde. Die dazugehörenden Rissbilder an der Plattenunterseite für alle drei Versuchskörper sind in Abb. 6.7 (b) dargestellt. Alle drei Versuchskörper versagten schlagartig infolge eines spröden Versagens des Betons und der Bildung von Biegerissen; ein typisches Durchstanzversagen. Die Durchstanzlasten betragen für die jeweiligen Platten $V_{ohne\ Sand}$ = 195.2 kN (S4), 186 kN (S2) und 177.3 kN (S1).

Die Last-Verformungsdiagramme sowie die oberen Grenzwerte der statischen Traglasten (rechnerische Biegetraglasten) der jeweiligen Platte mit den dazugehörenden Mechanismen nach der Fliessgelenklinientheorie sind in Abb. 6.8 (a, b) dargestellt.

Der mechanische Bewehrungsgehalt ω bezogen auf eine Einheitsbreite b = 1 m und der mittlere Biegewiderstand betragen $\omega = a_s f_{sy}/(bdf_c) = 0.117$ und $m_u = a_s f_{sy} d_v$ = 38.1 kNm/m, wobei mit der effektiven Betondruckfestigkeit f_c nach Gleichung (2.5) und vereinfachend mit einer über alle drei Platten gemittelten Zylinderdruckfestigkeit

f_{cc} = 28.9 MPa gerechnet wurde. Zudem wurde die vereinfachte rechteckförmige Betondruckspannungsverteilung angenommen; die Höhe der Druckzone beträgt z_c = 16.1 mm. Die Berechnung der oberen Grenzwerte der Biegetraglast nach der Fliessgelenklinientheorie ergab für die jeweiligen Platten die Werte: Q_k = 305 kN (S4), 294 kN (S2) und 233 kN (S1). Das Eigengewicht der Betonplatte wurde bei der Berechnung vernachlässigt.

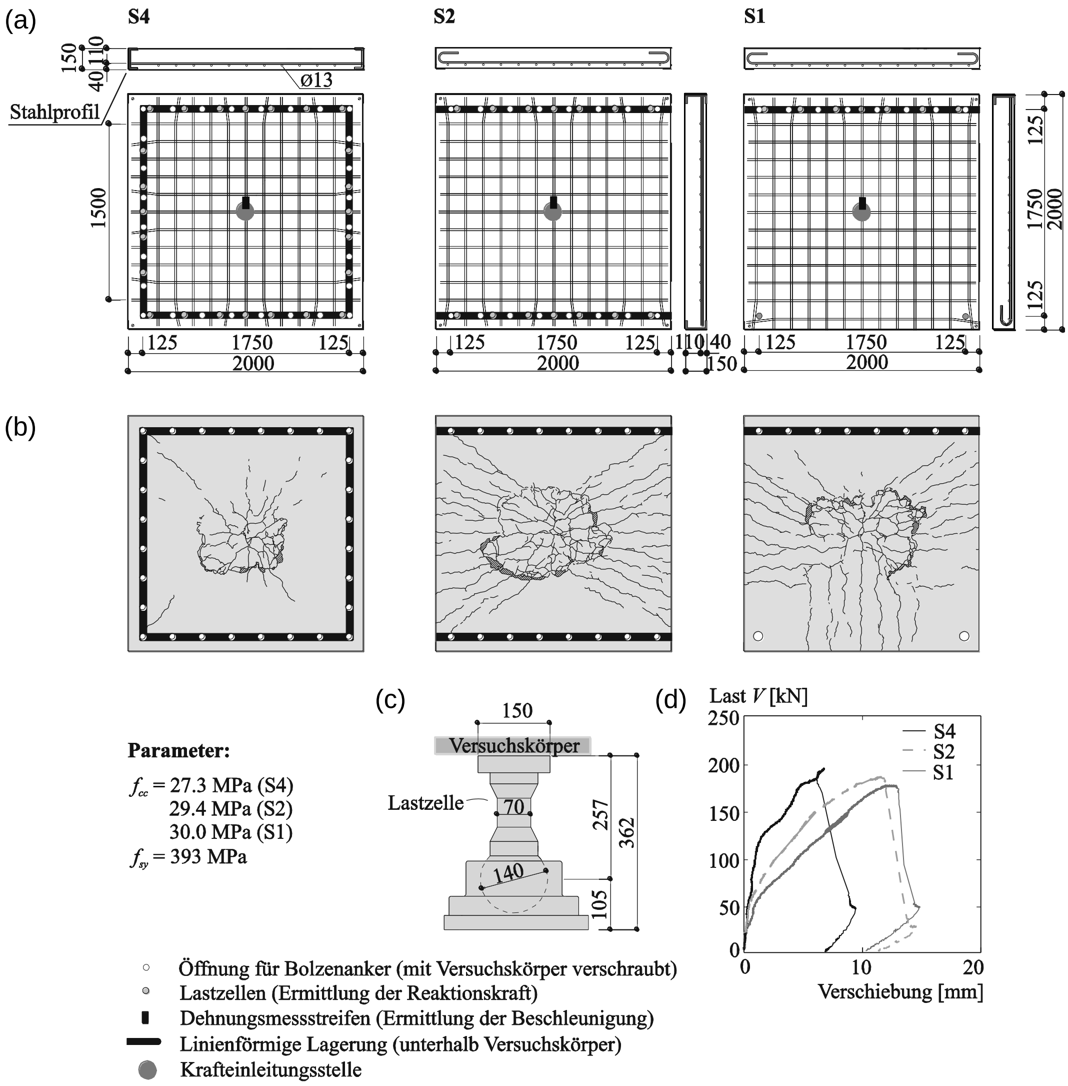


Abb. 6.7 *Stahlbetonplatten ohne granulare Eindeckung mit verschiedenen Lagerungsbedingungen; statische Belastung ([Matasaka et al. 2011], [Kurihashi 2016]). Abmessungen in mm:*
(a) Versuchskörper mit Abmessungen und Bewehrung;
(b) Rissbilder an der Plattenunterseite;
(c) Lastzelle;
(d) Last-Verformungsdiagramme. Kreisrunde Krafteinleitungsfläche mit Durchmesser D = 90 mm.

Ebenfalls in Abb. 6.8 (b) dargestellt sind die Durchstanzlasten aus den Plattenversuchen mit einer Sandeindeckung der Stärke e = 125 mm unter monotoner Laststeigerung [Okada et al. 2011b]. Wegen der bei den Versuchen mit Sandeindeckung gewählten grösseren kreisförmigen Belastungsfläche mit Durchmesser D = 230 mm (ohne Eindeckung: D = 90 mm) ergaben sich kleinere konzentrierte Flächenlasten. Somit werden in diesen Versuchen gegenüber den Plattenversuchen ohne Eindeckung etwas grössere Durchstanzlasten von $V_{mit\ Sand}$ = 277.1 kN (S4), 211.7 kN (S2) und 200.6 kN (S1) für die jeweiligen Platten erreicht. Die statischen Versuche veranschaulichen, dass die Durchstanzlasten bei allen drei Platten ohne Eindeckung etwa gleich gross sind, d. h. unabhängig von der Lagerungsart respektive vom Biegeverhalten der Platten, während bei den Platten mit Sandeindeckung und einer grösseren Belastungsfläche mit Durchmesser D = 230 mm grössere Verformungen der Platten auftreten und dadurch eine moderate Erhöhung der jeweiligen Durchstanzlasten resultiert.

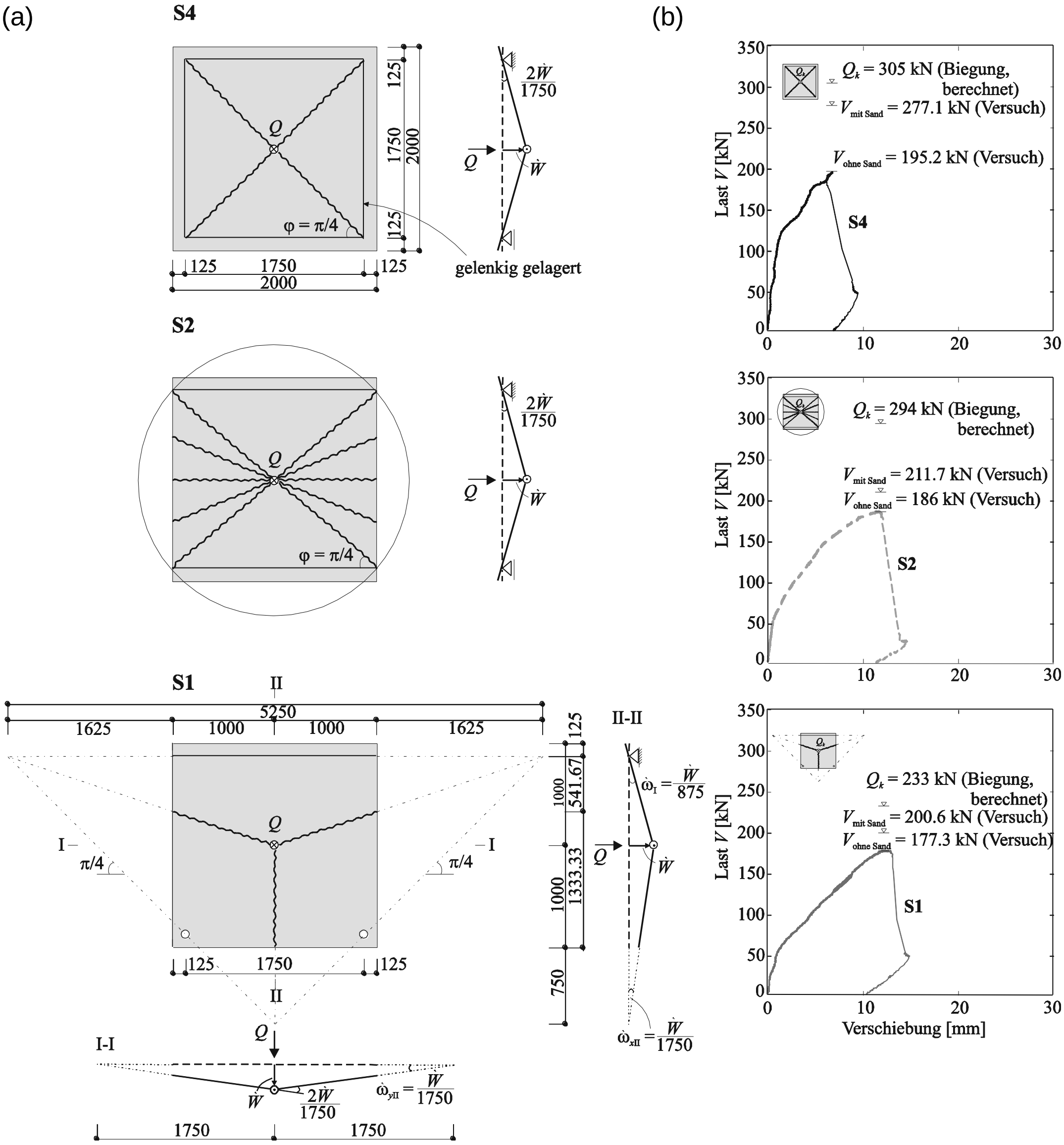


Abb. 6.8 *Stahlbetonplatten mit verschiedenen Lagerungsbedingungen; statische Belastung. Abmessungen in mm:*
(a) Fliessgelenklinienmechanismus für die Platten S4, S2, S1;
(b) Vergleich der oberen Grenzwerte der statischen Biegetraglast nach der Fliessgelenklinientheorie mit dem Last-Verformungsdiagramm der Versuche ohne Eindeckung, D = 90 mm [Matasaka et al. 2011] und den Durchstanzlasten für die Platten mit Sandeindeckung, Stärke e = 125 mm, D = 230 mm [Okada et al. 2011b].

[Kishi et al. 2010] führten eine Versuchsreihe (statische Belastung und Stossbeanspruchung) an Platten mit einer Plattenstärke h = 180 mm und orthogonaler Bewehrung in der 1. und 2. Lage: Ø 16 mm, s = 150 mm mit ansonsten identischen Abmessungen wie die in Abb. 6.8 dargestellten Platten ohne Eindeckung durch. Die kreisförmige Belastungsfläche weist einen Durchmesser von D = 90 mm auf. Bei allen drei Versuchskörpern konnte sowohl bei den statischen als auch den dynamischen Versuchen wiederum kein duktiles Verhalten erreicht werden und die Platten versagten spröde infolge eines Durchstanzen am Lasteinleitungsort, wobei die Durchstanzlasten in den statischen Versuchen der jeweiligen Platten $V_{ohne\ Sand}$ = 296.3 kN (S4), 292.2 kN (S2) und 278.8 kN (S1) gegenüber der anderen Versuchsreihe mit der Plattenstärke h = 150 mm etwas höher waren.

Plattenversuche unter Stossbeanspruchung (Aufprallversuche) an identischen Stahlbetonplatten, wie in Abb. 6.7 (a) dargestellt, wurden sowohl ohne [Matasaka et al. 2011] als auch mit Sandeindeckung, Stärke e = 125 mm [Okada et al. 2011b] durchgeführt. Die Masse des aufprallenden Körpers und dessen Durchmesser betragen m = 300 kg und D = 90 mm [Matasaka et al. 2011] respektive m = 500 kg und D = 230 mm [Okada et al. 2011b]. Jede Platte wurde jeweils einmal belastet. Bei Verwendung der Platten mit Sandeindeckung gegenüber denjenigen ohne Eindeckung konnte unter Stossbeanspruchung ebenfalls eine Steigerung der Schubtragkapazität der Platten beobachtet werden.

Die dämpfende Wirkung der Sandeindeckung auf den Platten unter Stossbelastung zeigte sich in einer erheblichen Reduktion der maximalen Stosskraft, einer Verlängerung der Stossdauer und einer veränderten Form der Stossfunktion (Last-Zeitfunktion).

Die Platten mit Sandeindeckung von [Okada et al. 2011b] verhielten sich bis zu einer Aufprallgeschwindigkeit von v_0 = 9.5 m/s (S4), 8.5 m/s (S2), 8.5 m/s (S1) duktil; bei Aufprallgeschwindigkeiten von v_0 = 10 m/s (S4), 9 m/s (S2), 9 m/s (S1) versagten die Platten letztendlich wiederum spröde infolge Durchstanzens am Aufprallort. Die dazugehörenden Rissbilder sind in Abb. 6.9 dargestellt. Die Biegerisse infolge der Stossbeanspruchung der Platten stimmen mit der Fliessgelenklinientheorie überein. Bei den Platten ohne Sandeindeckung unter Stossbeanspruchung erfolgte das spröde Versagen bei kleineren Stossintensitäten (Aufprallmasse m und -geschwindigkeit v_0).

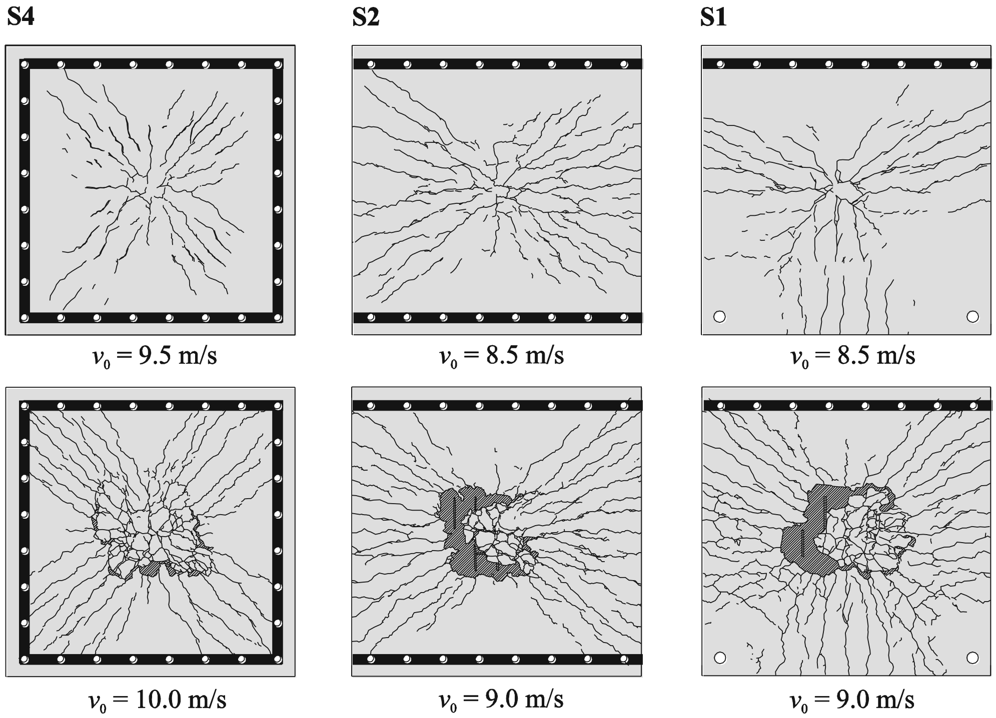


Abb. 6.9 *Stahlbetonplatte mit Sandeindeckung der Stärke e = 125 mm unter Aufprallstoss [Okada et al. 2011b]: Rissbilder an der Plattenunterseite (v_0 = 10 m/s entspricht einer Fallhöhe von H ≈ 5 m).*

Die Aufprallstösse weisen allesamt einen impulsartigen Charakter auf. Sowohl die maximalen Stosskräfte als auch die Stossdauern weisen unter gleicher Stossintensität bei allen drei Platten ungefähr die gleichen Werte auf. Aufgrund der Trägheitskräfte und der sehr kurzzeitig wirkenden Stosskräfte hat die Verformung der Platten einen geringen Einfluss auf die maximalen Stosskräfte und die Stossdauern. Daher sind die Aufprallkräfte beim Erreichen des Durchstanzwiderstandes bei allen drei Platten in etwa gleich gross. Im Rahmen dieser Versuchsreihe wird ersichtlich, dass der Einfluss der Biegung demnach einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Durchstanzlast (zum Durchstanzversagen gehörende Aufprallkraft) hat.

Mit den vorliegenden umfangreichen Versuchsreihen kann die Wirkungsweise einer granularen Eindeckung gut veranschaulicht werden. Die Verwendung der Sandeindeckung führt zu einer Erhöhung des Durchstanzwiderstandes der Platten unter Aufprallstoss und somit zu einer Annäherung an ein duktiles Tragverhalten der Platten bis nahe eines Biegebruches.

Die oben beschriebenen Beobachtungen aus statischen und dynamischen Versuchen an identischen Stahlbetonplatten mit und ohne Eindeckung veranschaulichen wichtige Aspekte, die nachfolgend nochmals rekapituliert und mit weiteren Versuchen verglichen werden.

Die Stahlbetonplatten unter statischen Einzellasten versagten aufgrund eines spröden Durchstanzversagens. Ein duktiles Verhalten entsprechende den Lösungen der Plastizitätstheorie kann in der Regel auch bei ausreichender Querkraftbewehrung nicht erreicht werden [Heinzmann et al. 2012].

Die durch einen Aufprallstoss beanspruchten Stahlbetonplatten ohne Eindeckung ([Kishi et al. 2010], [Matasaka et al. 2011]) zeigen ebenfalls bereits bei geringen Aufprallenergien ein sprödes Versagen. Zahlreiche weitere Versuche ([Kon-No et al. 2010a], [Kon-No et al. 2010b], [Kon-No et al. 2010], [Hummeltenberg et al. 2011], [Hrynyc 2013]) bestätigen das spröde Verhalten von Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung bei bereits kleinen Stossintensitäten (Fallhöhe, Masse des Aufprallkörpers).

In einer Vielzahl von Versuchen an Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung ([Yamaguchi 2011], [Röthlin et al. 2015]) konnte die Tendenz in Richtung eines duktilen Verhaltens von Stahlbetonplatten unter Aufprallstoss beobachtet werden. Bei grossen Aufprallenergien hat man bei Verwendung einer Sandeindeckung wiederum ein sprödes Durchstanzen beobachtet ([Okada et al. 2011b], [Kon-No et al. 2010], [Kon-No et al. 2010b]). Die Versuchsresultate der Spannungsverteilung (siehe Abschnitt Lastausbreitung) zeigen, dass ein lokales Versagen infolge Durchstanzen am Aufprallort infolge eines Aufprallstosses mit grosser Intensität bei einer Sandeindeckung eher eintreten wird als bei einer Kieseindeckung, da aufgrund der grossen Eindringtiefen konzentrierte Spannungen (kleinere Belastungsfläche) resultieren können.

Versuche an Stahlbetonplatten mit Kieseindeckung ([Yamaguchi et al. 2011], [Röthlin et al. 2015]) wiederum führten zu einem duktilen Verhalten der Stahlbetonplatte unter Stossbelastung. Positive Eigenschaften von Kies scheinen die Verzahnung der unregelmässig geformten Kiespartikel zu sein, wodurch die Eindringtiefe um einiges geringer ist als bei einer Sandeindeckung und sich damit verbunden eine Lastausbreitung auf eine grössere Fläche ergibt. Aufprallversuche an Stahlbetonplatten mit Kieseindeckung, bei welchen ein sprödes Durchstanzversagen erfolgte, sind keine bekannt. Demgegenüber konnte mit zahlreichen Versuchen an Stahlbetonplatten mit Sandeindeckung beobachtet werden, dass die Platten trotz einer gewissen Eindeckungsstärke infolge eines Durchstanzen spröde versagten.

Im nachfolgenden Kapitel soll für die Modellierung der Eindeckung ein Weg aufgezeigt werden, welcher eine aufwendige Ermittlung der Stosskraft in Abhängigkeit von den Charakteristiken der Eindeckung umgeht, indem wiederum nur der Grenztragzustand beachtet wird. Die vorangegangenen umfangreichen numerischen Untersuchungen des dynamischen Tragverhaltens einer granularen Eindeckung mit der „Diskrete-Elemente-Methode“ (Kapitel 6.2.3) sowie die analytischen Untersuchungen an Masse-Feder-Systemen mit einem Freiheitsgrad (Kapitel 5.4) gaben Anlass zu einer stark vereinfachten Modellierung der Eindeckung basierend auf dem Impulserhaltungssatz, angewendet auf die Starrkörpertheorie.

6.2.3 Modellbildung

Um das Tragverhalten einer Stahlbetonplatte mit Eindeckung unter Aufprallstoss zu untersuchen, ist es erforderlich, sowohl das dynamische Tragverhalten der Eindeckung und der Stahlbetonplatte als auch eine allfällige Interaktion zu verstehen.

Schellenberg entwickelte ein Masse-Feder-Modell mit drei Freiheitsgraden – das sogenannte System of Multiple Degrees of Freedom – zur Beschreibung der dynamischen Tragfähigkeit von Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung bei Steinschlag [Schellenberg & Vogel 2009]. Das Modell weist Ähnlichkeit zu dem von [Schlüter 1987] vorgeschlagenen Masse-Feder-Modell mit zwei Freiheitsgraden für Flugzeuganprall auf, welches das globale Biege- und das lokale Schubverhalten (Federeigenschaften für Biegebruch und Durchstanzen) berücksichtigt. Dieses Modell wurde von Schellenberg um einen zusätzlichen Freiheitsgrad zur Beschreibung der Interaktion zwischen aufprallendem Körper, granularer Eindeckung und Stahlbetonplatte erweitert.

In einem ersten Schritt gilt es, die zu Beginn der vorliegenden Arbeit formulierte Fragestellung zu klären, ob eine allfällige Interaktion zwischen der Eindeckung und der Stahlbetonplatte während des Aufpralls stattfindet respektive zu berücksichtigen ist. Wichtige Erkenntnisse konnten anhand einer analytischen Untersuchung mit einem Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad (Kapitel 5.4) gewonnen werden. Dabei zeigte sich, dass bei einer sogenannten Impulsbelastung keine (zu berücksichtigende) Interaktion zwischen Tragwerk, Eindeckung und Aufprallkörper vorherrscht, da während der Stossdauer nur geringfügige Tragwerksverschiebungen eintreten. Diese Erkenntnis kann anhand des Verhältnisses der Stossdauer zur Eigenschwingdauer t_d/T (etwa im Bereich $t_d/T < 0.5$, je nach Duktilität) indirekt auf stossartig belastete Stahlbetonplatten mit Eindeckung übertragen werden. Stahlbetonplatten typischer Steinschlagschutzgalerien in der Schweiz wurden für die Berechnung der Eigenschwingdauer herangezogen. Der Vergleich der Eigenschwingdauer mit typischen Stossdauern eines aufprallenden Körpers auf eine granulare Eindeckung zeigte, dass man sich bei Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien mit Eindeckung im „Impulsbereich“ befindet.

Die aus den numerischen Beobachtungen gewonnenen Erkenntnisse konnten auch experimentell bestätigt werden. Zum einen wurde anhand eines Grossversuches an einer Steinschlagschutzgalerie [Röthlin et al. 2015] der Einfluss der Deckenplattensteifigkeit bei geringen Aufprallenergien und verschiedenen Belastungsorten untersucht. Dabei zeigte sich, dass der Verdichtungsgrad (Steifigkeit) des Eindeckungsmaterials der massgebende Parameter hinsichtlich der vorhandenen Aufprallkräfte, Eindringtiefen, Verschiebungen und Stahldehnungen darstellt. Der Einfluss der Bauwerkssteifigkeit war nicht klar fassbar; diesbezüglich konnten keine Tendenzen beobachtet werden. Des Weiteren zeigte ein Vergleich in Bezug auf die Steifigkeit der Platten zwischen den beiden Versuchsserien A und B in [Röthlin et al. 2015] für die Aufprallversuche mit m = 2 t, H = 2 m und m = 5 t, H = 5 m ebenfalls den massgebenden Einfluss des Parameters Verdichtungsgrad des Eindeckungsmaterials. Insbesondere bei der Eindeckung Sand hat der Verdichtungsgrad einen grossen Einfluss auf die Aufprallkräfte und die Eindringtiefen des Fallkörpers.

Diese experimentellen Beobachtungen bestätigen, dass der Maximalwert der Stosskraft aufgrund des kurzzeitigen Aufpralls sowie der Steifigkeit der Stahlbetonplatte nur geringfügig von allfälligen Plattenverschiebungen während der Stossdauer beeinflusst wird. Insbesondere sind die Verschiebungen während der Lastanstiegszeit vernachlässigbar klein. Somit ist grundsätzlich eine Entkoppelung der Eindeckung und des Tragwerks erlaubt, was wesentliche Vereinfachungen mit sich bringt.

In dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Ansätze zur Modellierung der Eindeckung in Betracht gezogen: Einerseits wurde ein numerisches Modell basierend auf der Diskrete-Elemente-Methode mit der Annahme einer starren Platte und andererseits ein Modellansatz basierend auf dem Impulserhaltungssatz (plastischer Stoss) für ein starr-plastisches Tragverhalten der Stahlbetonplatte im Grenztragzustand (Ausgangslage stellt die

Mechanismuskonfiguration der Stahlbetonplatte zur Zeit $t = 0$ dar) betrachtet. Die beiden nachfolgenden Kapitel geben einen Überblick über diese beiden Modellansätze.

Aus baupraktischer Sicht erweist sich der Ansatz, der auf dem Impulserhaltungssatz zur Untersuchung des Stossverhaltens einer Stahlbetonplatte mit Eindeckung als eines abgeschlossenen Systems im Grenztragzustand basiert, aufgrund seiner Einfachheit als vielversprechend. In Kapitel 6.3 wird dieser Ansatz zur Untersuchung des Biegeverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung weiterverfolgt.

Diskrete-Elemente-Methode

Die numerische Berechnungsmethode „Diskrete-Elemente-Methode" (DEM) wurde von [Cundall & Strack 1979] für granulare Medien entwickelt und in zahlreichen nachfolgenden Arbeiten diskutiert und erweitert. Diese netzfreie, diskontinuumsmechanische Methode erlaubt die Betrachtung der Wechselwirkung mehrerer einzelner Körper, während bei der klassischen Kontinuumsmechanik, wie beispielsweise bei der netzbehafteten Finite-Elemente-Methode, der Zusammenhalt des Körpers (Kontinuum) erhalten bleibt.

Die einzelnen Körper des granularen Mediums werden im Folgenden als Partikel bezeichnet. Die dreidimensionale (3D) Diskrete-Elemente-Methode erlaubt die numerische Lösung der Bewegungsgleichung – Kräfte- und Momentengleichgewicht – der mit sechs Freiheitsgraden sich translatorisch und rotatorisch bewegenden Partikel. Die Partikel sind starr und können eine beliebige Form aufweisen, wobei sich die Kugelform aus numerischen Gründen als am effizientesten erweist.

Während die einzelnen Partikel nicht deformierbar sind, werden ihre Kontaktstellen als weich modelliert, d. h., es tritt eine Überlappung an den Kontaktstellen ein, welche jedoch im Vergleich zur Grösse der Partikel klein ist. Die Interaktion erfolgt an den Kontaktstellen der Partikel untereinander sowie zwischen den Partikeln und sogenannten Wandelementen (z. B. Modellrand). Die an den Berührungspunkten der Partikel auftretenden Wechselwirkungskräfte sind vom gewählten Kontaktgesetz abhängig. Die mikroskopischen Partikel-Partikel- respektive Partikel-Wand-Wechselwirkungen an den Kontaktstellen werden berücksichtigt und darauf basierend das makroskopische Verhalten des granularen Mediums berechnet. Die Methode basiert auf den Newton'schen Bewegungsgesetzen. Aus allen an einem Partikel angreifenden Kontaktkräften wird eine Resultierende berechnet, mit deren Verwendung sich die Newton'sche Bewegungsgleichung aufstellen lässt. Die Bewegungsgleichung wird auf jedes Partikel angewendet, um die neue Lage und Geschwindigkeit der Partikel über einen kurzen Zeitschritt mittels eines expliziten Finite-Differenzen-Schemas zu berechnen. Dabei können die Kontakte zwischen den Partikeln während der Bewegung auch verschwinden oder es können neue Kontakte entstehen. Die Lage und Geschwindigkeit im Anfangszustand werden als bekannt vorausgesetzt.

In Zusammenarbeit mit Professor F. Calvetti vom Politecnico di Milano, Italien, wurden mit dem dreidimensionalen „Particle Flow Code" (PFC^{3D}) von der [Itasca 2003], numerische Untersuchungen basierend auf der Diskrete-Elemente-Methode vorgenommen [Röthlin et al. 2013]. Eine Versuchsreihe von in Japan durchgeführten Aufprallversuchen, Abb. 6.1, bildet die Grundlage für die numerische Untersuchung und wurde von [Kon-No & Yamaguchi 2012] (Sandeindeckung) bereitgestellt. Eine detaillierte Dokumentation der Versuche von 2012 und 2013 (Sand- und Kieseindeckung) findet man im Versuchsbericht [Röthlin et al. 2015]. Das Ziel der numerischen Untersuchung war die Modellierung des makroskopischen Verhaltens der granularen Eindeckung unter Aufprallstoss.

Die Interaktion zwischen den kugelförmigen Partikeln folgt einem elastisch-plastischen Kontaktgesetz (Abb. 6.10). Dabei werden den Kontakten die mikromechanischen Parameter innerer Reibungswinkel ϕ_μ sowie Normal- und Schubsteifigkeiten, k_n und k_s, zugewiesen.

Die Normalkontaktkraft ist gemäss

$$F_n = k_n \cdot U_n \tag{6.1}$$

das Produkt aus der Normalsteifigkeit k_n und der Überlappung U_n in n-Richtung. Die Zunahme der Schubkontaktkraft berechnet sich pro Zeitschritt mit:

$$\Delta F_s = k_s \cdot \Delta U_s \tag{6.2}$$

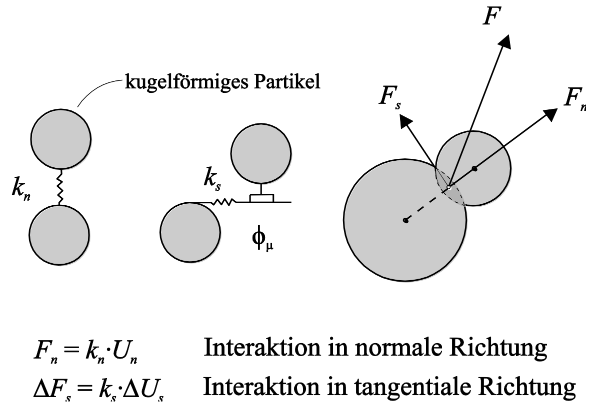


Abb. 6.10 *Diskrete-Elemente-Methode: mikro-makromechanische Parameter, Kontaktgesetz in PFC^{3D}.*

Wandelemente dienen als Begrenzungselemente, innerhalb jener die Generierung der Partikel erfolgen kann (Abb. 6.11 (a)). Des Weiteren werden die erforderlichen Randbedingungen den Wandelementen zugeordnet. Diese erfüllen die Bewegungsdifferentialgleichung nicht. Sie interagieren nur mit den Partikeln. Die einzelnen Partikel werden hinsichtlich Ort und Grösse (Durchmesser) zufällig innerhalb der begrenzenden Wandelemente generiert. Ihre Erzeugung erfolgt basierend auf der vorhandenen Korngrössenverteilung, welche in einem Bereich zwischen dem maximalen und dem minimalen Durchmesser der Partikel linearisiert wird. Mit einem konstanten Skalierungsfaktor werden die Partikel expandiert (Vergrösserung der Durchmesser), bis die gewünschte Porosität erreicht wird. Dadurch wird ihre Anzahl reduziert und die numerische Effizienz gesteigert [Gabrieli et al. 2009]. Die untere Wand („Boden“) wird in ein Raster unterteilt, damit die Spannungsverteilung ermittelt werden kann (Abb. 6.11 (b). Die Höhe e der umgrenzenden Wandelemente entspricht dabei der granularen Eindeckungsstärke.

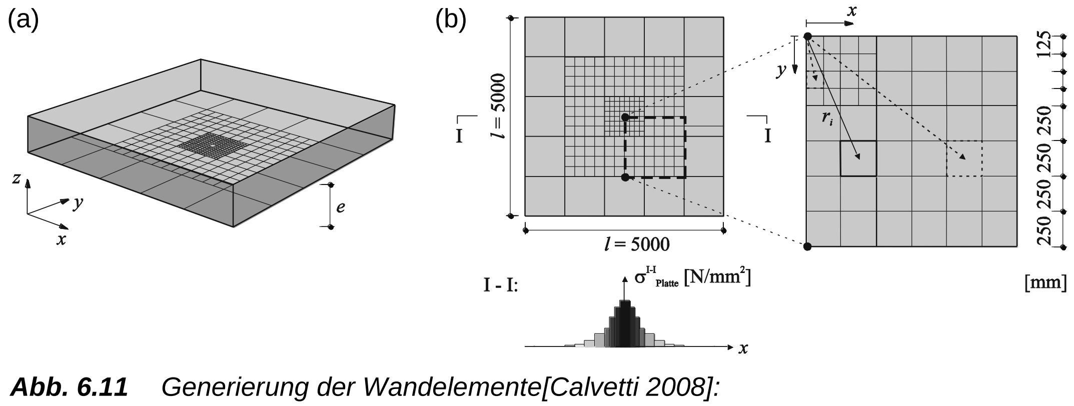


Abb. 6.11 *Generierung der Wandelemente[Calvetti 2008]:*
(a) Wandelemente zur Begrenzung der Partikel;
(b) Rastereinteilung in unterer Wand („Boden“) für die Bestimmung der Spannungsverteilung.

Die Annahme kugelförmiger Partikel stellt gegenüber der wirklichen Partikelform eine starke Vereinfachung dar. Die Form der Partikel hat daher einen massgebenden Einfluss auf den Kontaktreibungswinkel und erfordert eine Anpassung. [Suiker & Fleck 2004] untersuchten numerisch das Verhalten von kugelförmigen Partikeln mit einem Diskrete-Elemente-Modell, wobei sie beobachteten, dass sich der makroskopische Reibungswinkel ϕ einem Grenzwert annähert, welcher unabhängig von der Grösse des Kontaktreibungswinkels ϕ_μ ist. Der sich einstellende Grenzwert ist dabei von der Korngrössenverteilung abhängig und erreicht im Allgemeinen Werte von $\phi < 30°$, d. h., der sich einstellende Grenzwert des Reibungswinkels ist kleiner als derjenige, der in realen granularen Materialien beobachtet wird. Aufgrund dieser Beobachtungen wurde keine Partikelrotation zugelassen. Die aus dieser Beschränkung resultierenden Effekte sind ähnlich denjenigen bei dem Einführen einer unendlich grossen Rotationskontaktsteifigkeit der Partikel; dadurch wird der Einfluss der tatsächlichen Form der Partikel negiert.

Der Ansatz für die diskrete Modellierung des granularen Materials wurde von [Calvetti 2008] entwickelt. Das mechanische Verhalten des granularen Materials wird dabei durch dessen Porosität, eine vereinfachte Korngrössenverteilung, die vereinfachte Annahme kugelförmiger, nicht rotierender Partikel sowie durch eine geeignete Wahl der mikro-makromechanischen Parameter charakterisiert.

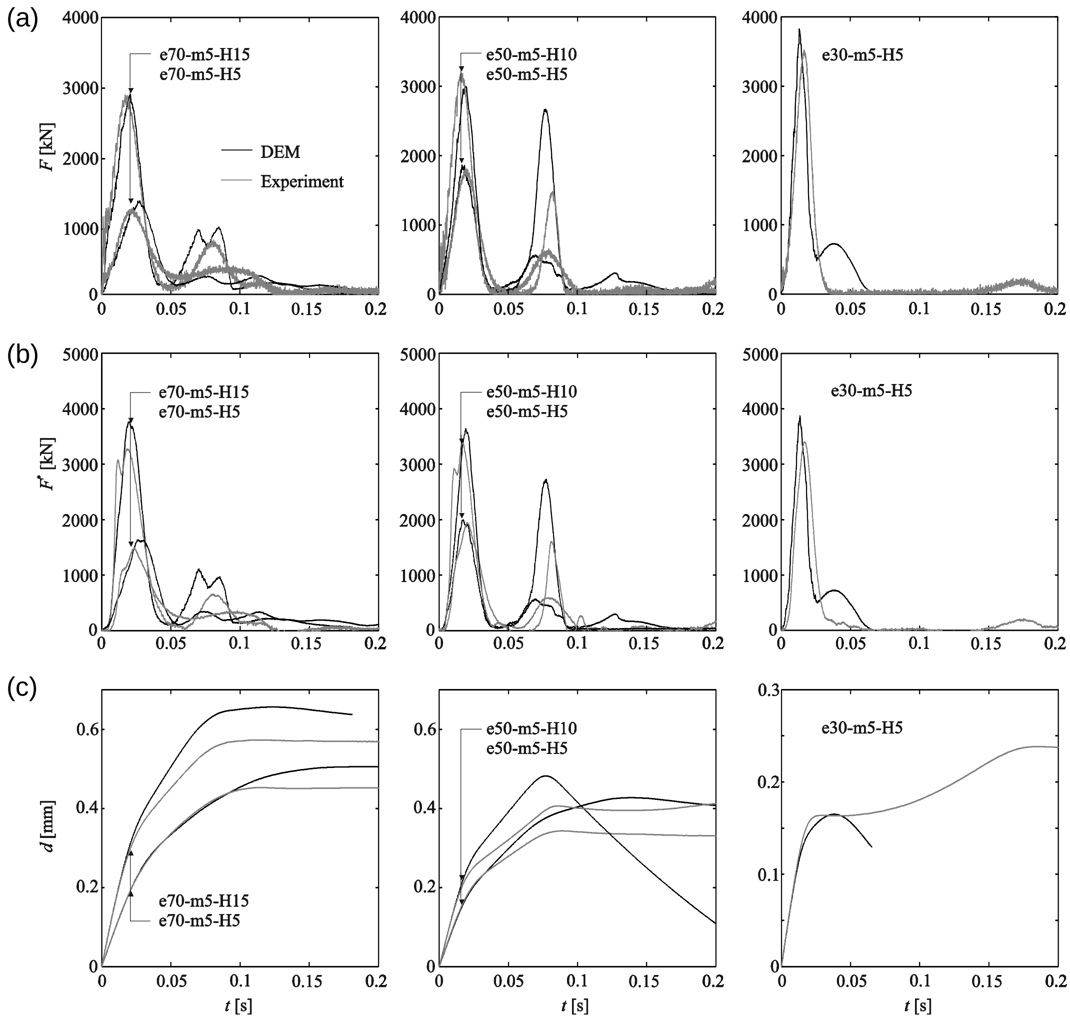


Abb. 6.12 *Vergleich der Resultate der Versuchsnachrechnung und der Aufprallversuche an der Stahlbetonverbundplatte mit Sandeindeckung [Röthlin et al. 2013]: Zeitverläufe von*
(a) Aufprallkraft;
(b) transmittierten Kraft;
(c) Eindringtiefe. Parameter Sand: $e_{max} = 1.256$, $e_{min} = 0.723$, $D_{min} = 0.15$ mm, $D_{max} = 0.55$ mm, $\mu = 0.325$ ($\phi_\mu \approx 18°$, $\phi \approx 35°$), $k_n/D = 330$ N/mm^2, $k_s = 0.25\ k_n$ (Skalierungsfaktor 200).

Die Bestimmung der mikromechanischen Parameter basiert auf einem empirischen Ansatz. In vorausgegangenen Untersuchungen hatte Calvetti für verschiedene Typen von Sand (Fluss Ticino, Hostun und Fluss Adige) beobachtet, dass die Kontaktsteifigkeiten einen geringen Einfluss auf den inneren Reibungswinkel haben und dass zwischen den mikro- und makromechanischen Reibungswinkeln, ϕ_μ und ϕ, eine lineare Beziehung besteht. Der Kontaktreibungswinkel für das untersuchte Sandmedium (Porosität: $0.4 < n < 0.5$) konnte in einen Bereich von $0.3 < \mu = \tan\phi_\mu < 0.35$ respektive $16.7° < \phi_\mu < 19.3°$ eingegrenzt werden.

Dem Modell wurde eine vereinfachte Korngrössenverteilung zugrunde gelegt, indem die Kurve zwischen dem minimalen Korngrössendurchmesser D_{min} und dem maximalen Korngrössendurchmesser D_{max} linearisiert wurde.

Die normalisierte Kontaktsteifigkeit k_n/D ist eine die Steifigkeit E des granularen Mediums bestimmende Grösse, wobei D den Durchmesser eines Partikels bezeichnet. Für ein Verhältnis $k_s/k_n = 0.25$ konnte die empirische Beziehung $k_n/D = (2…2.5)\cdot E$ zwischen der normalisierten Kontaktsteifigkeit und der Steifigkeit des granularen Mediums gefunden werden. Dabei bewegte sich die normalisierte Kontaktsteifigkeit in einem Bereich von 250 MPa < k_n/D < 420 MPa. Die normalisierte Kontaktsteifigkeit k_n/D beeinflusst den makroskopischen Reibungswinkel ϕ nicht; der Kontaktreibungswinkel ϕ_μ wiederum nicht die makroskopische Steifigkeit E des granularen Mediums.

In einer Voruntersuchung wurde ein geeigneter Skalierungsfaktor ermittelt, mit welchem die Partikeldurchmesser vergrössert wurden, um die Berechnungszeit zu reduzieren. Ein Skalierungsfaktor von 200 erwies sich als geeignet und wurde für die Berechnungen gewählt. In Abb. 6.12 ist ein Vergleich der Resultate zwischen der Analyse mit der Diskrete-Elemente-Methode und dem Experiment für ausgewählte Aufprallversuche mit Sandeindeckung dargestellt. Die lokale Dämpfung wurde dabei vernachlässigt. Die vorgängige blinde Nachrechnung wurde mit den gleichen Materialparametern für Sand vorgenommen, mit Ausnahme einer lokalen Dämpfung von *damp* = 5 %. Dabei wurde angenommen, dass die Partikel und die Wandelemente die gleichen Kontaktsteifigkeiten aufweisen.

Der Vergleich der Resultate mit dem Diskrete-Elemente-Modell mit den Resultaten des Experiments zeigt, dass sich mit dem numerischen Diskrete-Elemente-Modell die relevanten Aspekte des Stossphänomens beschreiben lassen. Die grössten Abweichungen zeigten sich bei den Versuchen mit einer Eindeckungsstärke von e = 30 cm, deren Gründe wahrscheinlich in der limitierten Anzahl Partikel aufgrund der Skalierung lagen. Des Weiteren ist auch die numerische Ermittlung des Zeitverlaufs der Eindringtiefe des Aufprallkörpers in die Eindeckung mit Schwierigkeiten verbunden.

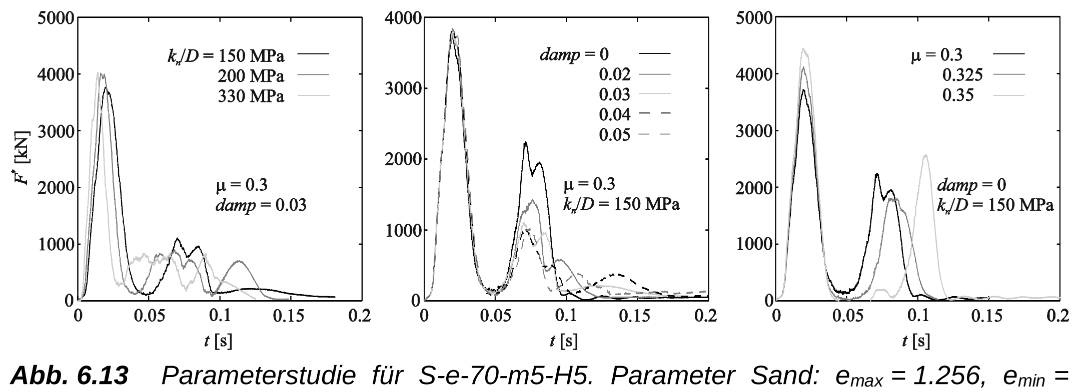


Abb. 6.13 *Parameterstudie für S-e-70-m5-H5. Parameter Sand: $e_{max} = 1.256$, $e_{min} = 0.723$, $D_{min} = 0.15$ mm, $D_{max} = 0.55$ mm, $k_s = 0.25\ k_n$ (Skalierungsfaktor 200).*

In einem weiteren Schritt wurde der Skalierungsfaktor auf 120 reduziert, so dass eine grössere Anzahl von Partikeln generiert wurde; dies ebenso im Hinblick auf die nachfolgende Untersuchung der Spannungsverteilung am Aufprallort. Im Rahmen einer Parameterstudie wurden die Einflüsse der normalisierten Kontaktsteifigkeit k_n/D, der lokalen Dämpfung *damp* sowie des Kontaktreibungswinkels μ untersucht. Abb. 6.13 zeigt die Resultate für den Stossversuch S-e70-m5-H5 im Hinblick auf die transmittierte Kraft F^*. Die Resultate zeigen, dass das Modell weiter verbessert werden kann, jedoch ergibt sich damit keine signifikante Verbesserung des numerischen Modells. Die normalisierte Kontaktsteifigkeit k_n/D, beeinflusst hauptsächlich die erste Phase des Zeitverlaufs der Aufprallkraft (zeitliche Verschiebung).

Die lokale Dämpfung beeinflusst hauptsächlich die Charakteristik der zweiten Phase der Last-Zeitfunktion (Verschiebung in der Kraftamplitude) und ist umgekehrt proportional zur Kraftamplitude des zweiten Kraftpeaks. Der Kontaktreibungswinkel beeinflusst hauptsächlich die Zeitdauer und die Kraftamplitude der beiden Peakkräfte, wobei sein Einfluss direkt proportional zur Kraftamplitude des ersten Kraftpeaks und umgekehrt proportional zur Zeitdauer der jeweiligen Peaks ist. Die Reduktion des Kontaktreibungswinkels ist mit einer Vergrösserung der Zeit zwischen den beiden Peakkräften verbunden.

Zur Untersuchung der Spannungsverteilung wurde die untere Wand, d. h. der Boden, in ein Netz aus quadratischen Maschen eingeteilt, welches in der unmittelbaren Nähe des Aufpralls verfeinert ist (Abb. 6.11 (b). Das verfeinerte Netz ermöglicht die Berechnung einer kontinuierlichen Verteilung der maximalen Spannungswerte, welche vom jeweiligen Abstand r_i zum Aufprallort $(x,y) = (0,0)$ abhängig ist. In Abb. 6.14 sind die numerischen Resultate der maximalen Spannungsverteilung zweier Fallversuche mit einer Eindeckungsstärke $e = 70$ cm für ein Viertel der quadratischen Fläche der Platte dargestellt.

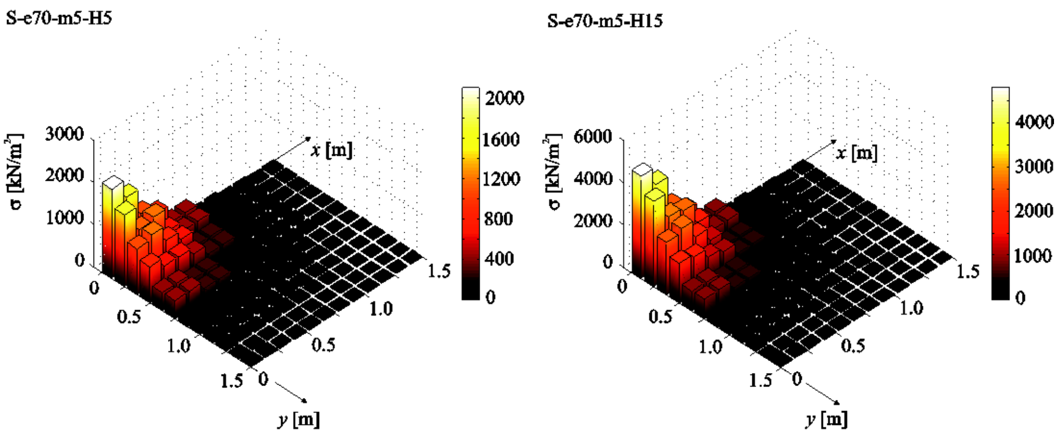


Abb. 6.14 *Numerische Resultate der maximalen Spannungsverteilung [Röthlin et al. 2013]. Parameter Sand: $e_{max} = 1.256$, $e_{min} = 0.723$, $D_{min} = 0.15$ mm, $D_{max} = 0.55$ mm, $\mu = 0.3$, $k_n/D = 150$ N/mm², $k_s = 0.25\ k_n$, damp = 0.03 (Skalierungsfaktor 120).*

In sämtlichen numerischen Untersuchungen wurde beobachtet, dass die Spannungsverteilung hauptsächlich direkt unterhalb der Abmessungen des Aufprallkörpers (Radius $r = 0.5$ m) konzentriert ist und mit zunehmendem Abstand r_i rasch abnimmt. Allerdings kann kein Vergleich mit den Versuchen angestellt werden, da keine Lastzellen zur Bestimmung der Spannungsverteilung verwendet wurden.

Die mikromechanischen Parameter Kontaktsteifigkeit und -reibungswinkel basieren auf einer Kalibrierung anhand von Versuchen. Mit der Verhinderung der Partikelrotation und der vereinfachten Annahme kugelförmiger Partikel wird das numerische Modell wesentlich vereinfacht, jedoch nicht das wirkliche physikalische Verhalten des granularen Materials unter Stossbeanspruchung wiedergegeben. Die numerischen Untersuchungen zeigten, dass sich insbesondere bei der Berechnung des Zeitverlaufs der Eindringtiefe gewisse Abweichungen ergeben können, welche möglicherweise mit den vereinfachten Modellannahmen im Zusammenhang stehen.

Die Eigenschaften der granularen Eindeckung sowie deren Einfluss auf das Stossverhalten von Stahlbetonplatten zeigen aufgrund der mit den zahlreichen Einflussparametern verbundenen Komplexität, dass Grenzbetrachtungen für baupraktische Aufgaben von grosser Wichtigkeit sind.

Die Form und Grösse des Aufprallkörpers spielen für die Modellbildung eines lokalen Versagens einer Stahlbetonplatte infolge Durchstanzens am Aufprallort eine wichtige Rolle. Auch hierfür bieten sich geeignete Grenzbetrachtungen an, da die Form und Grösse eines herunterfallenden Steins in Wirklichkeit nicht bekannt sind. Die numerischen Untersuchungen zeigten weiter, dass die Form des Steinblocks einen wesentlichen Einfluss auf das Kraftmaximum und die Stossdauer hat.

In der vorliegenden Arbeit wird für duktile Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss eine Grenzbetrachtung mittels des Impulserhaltungssatzes vorgeschlagen. Dabei wird das (globale) Biegetragverhalten im Grenzzustand (Bruchzustand) betrachtet.

Impulserhaltung

Es wird vorgeschlagen, die Modellierung der Einwirkungsseite über den Impulserhaltungssatz nach Gleichung (3.35) für den Grenztragfähigkeitszustand (globales Biegeversagen) anstelle einer Kräfteberechnung vorzunehmen. Dabei werden die Annahmen eines starr-plastischen Verhaltens der Stahlbetonplatte sowie eines ideal plastischen Aufprallstosses gemacht.

Aufgrund der Annahme eines ideal plastischen Stosses bleibt der aufprallende Körper in der Eindeckung stecken. Während des Eindringens des Aufprallkörpers in die Eindeckung (plastisches Material) geht mechanische Energie infolge der Reibung der granularen Partikel verloren, d. h., der Energiesatz der Mechanik nach Gleichung (3.26) ist ungültig. Dafür gilt der Impulserhaltungssatz während des Stossvorgangs für abgeschlossene Systeme. Sobald der Aufprallkörper relativ zur Stahlbetonplatte mit Eindeckung „ruht“ (unelastischer Stoss; gemeinsame Geschwindigkeit), lässt sich eine „neue“ Ausgangssituation formulieren. Dabei überträgt der Aufprallkörper seinen Impuls auf die Stahlbetonplatte.

Die Ausgangssituation bildet dabei das Geschwindigkeitsfeld $\dot{w}$ der gewählten Mechanismuskonfiguration nach der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie aufgrund der Annahme eines starr-plastischen Verhaltens der Stahlbetonplatte. Mithilfe des Impulserhaltungssatzes lässt sich anhand der gewählten Mechanismuskonfiguration die „gemeinsame“ Anfangsgeschwindigkeit $\dot{W}$ der Stahlbetonplatte mit granularer Eindeckung und des Aufprallkörpers berechnen. Der Zeitpunkt entspricht dem Ende der Kompressionsphase der vereinigten Massen. Zu diesem Zeitpunkt $t = 0$ wird der ausgebildete Mechanismus der Platte im Traglastzustand erreicht sein.

Diese Anfangsgeschwindigkeit wird sprungartig erreicht und setzt genau betrachtet eine (wenn auch eine noch so geringe) Verschiebung der Stahlbetonplatte voraus. Diese Verschiebung wird jedoch als sehr klein betrachtet und daher vernachlässigt.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen unter Einbezug der d’Alembert’schen Trägheitskräfte kann dann auf die Mechanismuskonfiguration angewendet werden.

Im strengen Sinn entspricht eine Impulsbelastung einer Belastung, die mit einer Deltafunktion beschrieben werden kann, d. h., die Belastung wird augenblicklich in Form einer Geschwindigkeit auf ein Tragwerk aufgebracht (vergleiche Kapitel 3.5: Kinetik). In den nachfolgenden Ausführungen wird eine Impulsbelastung in einer etwas erweiterten Definition betrachtet, nämlich als eine Belastung mit einer genügend kurzen Stossdauer, so dass die Tragwerksantwort nur eine Funktion des Integrals der Last-Zeitfunktion ist, ohne dass detallierte Informationen zur Form der Stossfunktion erforderlich sind (vergleiche Kapitel 5.4.1: Grenzbetrachtungen).

In Kapitel 6.3 wird das Lösungsverfahren detailliert beschrieben.

6.3 Biegeverhalten

Das Überschreiten des Rissmomentes einer Stahlbetonplatte – Zustand gerissen, elastisch – führt am jeweiligen Ort zu einer lokalen Steifigkeitsabminderung. Aufgrund der statischen Unbestimmtheit von Platten ergeben sich elastische Schnittkraftumlagerungen und bei weiterer Laststeigerung bis zum Erreichen des Traglastzustands plastische Umlagerungen. Die Duktilität von Stahlbetonplatten, d. h., deren Eigenschaft, ausgeprägte plastische Verformungen im Versagenszustand zu erreichen, bestimmt daher massgeblich die Umlagerungen der Schnittkräfte im plastischen Zustand. Dieses komplexe Tragverhalten von Stahlbetonplatten unter monotoner Laststeigerung respektive unter dynamischer Beanspruchung durch Berücksichtigung der d’Alembert’schen Trägheitskräfte kann mit aufwendigen nichtlinearen Methoden erfasst werden. Diese inkrementellen Methoden liefern gesamte Last-Verformungsdiagramme respektive bei dynamischen Beanspruchungen entsprechende Zeitverläufe. Sowohl für statische als auch für dynamische Einwirkungen ist eine zuverlässige Bestimmung der (quasi-)statischen Traglast respektive der maximalen dynamischen Durchbiegung im Grenztragzustand von Stahlbetonplatten aus baupraktischer Sicht von zentraler Bedeutung. Die Methoden der Plastizitätstheorie stellen hierbei eine mögliche Lösung dar, um eine schnelle und zuverlässige Abschätzung der Traglast zu erhalten. Durch energetische Überlegungen können die Grundlagen der Plastizitätstheorie auf dynamische Stosseinwirkungen erweitert respektive übertragen werden.

In diesem Kapitel wird ein Lösungsverfahren zur näherungsweisen Modellierung des Tragverhaltens und Verformungsvermögens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss auf der Basis der Plastizitätstheorie vorgestellt. Die dynamische, starr-plastische Modellbildung zur Beschreibung des Tragverhaltens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss im Versagenszustand wird anhand des Prinzips der virtuellen Leistungen (Kapitel 3.4) und des Impulserhaltungssatzes (Kapitel 3.5) auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie (Kapitel 4.5) vorgeschlagen. Den Ausgangspunkt stellt dabei die stationäre Modalform entsprechend der Mechanismuskonfiguration nach der Fliessgelenklinientheorie dar. Die Fliessgelenklinien in Stahlbetonplatten dienen als Idealisierung der plastischen Krümmungskonzentrationen und beschreiben so eine Mechanismuskonfiguration im Traglastzustand. Die maximale dynamische, plastische Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort (Verformungsbedarf) wird durch das Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche (Verformungsvermögen) beschränkt. Das vorgeschlagene Näherungsverfahren wird mit Versuchen verglichen und seine baupraktische Anwendbarkeit diskutiert.

6.3.1 Annahmen und Voraussetzungen

Die Verwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen unter Einbezug der d’Alembert’schen Trägheitskräfte führt auf den Energiesatz in globaler Form. Das Lösungsverfahren beruht auf der Annahme eines starr-plastischen Tragwerksverhaltens der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss. Die Voraussetzungen einer starr-plastischen Modellierung von stossartig belasteten Platten sind im Vergleich zu den elastischen Verformungen ausgeprägte plastische Verformungen und ein kleines Verhältnis der Stossdauer zur Eigenschwingdauer des Tragwerks (impulsartige Beanspruchung). Die Fliessgelenklinientheorie für statische Lasten wird durch den Einbezug der d’Alembert’schen Trägheitskräfte in der Berechnung der Leistung der äusseren Belastungen auf dynamische Belastungen erweitert. Die Lösung des Energiesatzes führt zu einer Näherungslösung für die maximale dynamische Durchbiegung einer Stahlbetonplatte am Aufprallort. Mit dem Lösungsverfahren kann die Grenztragfähigkeit von Platten untersucht werden. Die beiden Vereinfachungen – starr-plastisches Modell und Anwendung des Impulserhaltungssatzes – führen zu Abweichungen mit entgegengesetzten Vorzeichen und ähnlichen Werten. Wie in Kapitel 5.4.3 aufgezeigt, führen die Anwendung des Impulserhaltungssatzes zu einer Überschätzung (konservativ) und die Vernachlässigung elastischer Verformungen zu einer Unterschätzung (nicht konservativ) der maximalen dynamischen, plastischen Durchbiegungen. Die maximale Durchbiegung der Stahlbetonplatte wird durch das Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche (Verformungsvermögen) beschränkt (Kapitel 6.3.3).

Vereinfachend wird nur die stationäre Phase gemäss den Ausführungen in Kapitel 5.5 berücksichtigt und die transiente Phase vernachlässigt. Die stationäre Modalform, die entsprechend der Mechanismuskonfiguration nach der Fliessgelenklinientheorie gewählt wird, stellt somit der Ausgangspunkt der dynamischen Berechnungen dar.

Platten von Schutzgalerien gegen Steinschlag sind Tragwerke, für welche das Konzept der Kapazitätsbemessung eine nützliche Anwendung findet. Ein solches Tragwerk kann seine Schutzaufgabe auf zweckmässige und wirtschaftliche Weise nur durch plastische Verformungen, d. h. durch ein duktiles Tragverhalten, erfüllen. Mit der Kapazitätsbemessung soll ein duktiles Biegetragverhalten erreicht werden, indem mithilfe der Fliessgelenklinientheorie ein Mechanismus für die Platte gewählt und durch eine Kapazitätsbemessung sichergestellt wird, dass die Querkrafttragfähigkeit grösser als die Biegetragfähigkeit ist. Dadurch wird die Energiedissipation über die ganze Platte verteilt. Ein vorzeitiges lokales Versagen infolge Durchstanzens der Stahlbetonplatte am Aufprallort kann durch eine Kieseindeckung, eine Querkraftbewehrung sowie durch ein geeignetes Bewehrungslayout vermieden respektive „hinausgezögert“ werden. Ein Vergleich des Näherungsverfahrens mit Versuchen wird in den Kapiteln 6.3.4 und 6.3.5 erbracht. In Kapitel 6.4 werden abschliessend praxisrelevante Überlegungen bezüglich der Bemessung und der rechnerischen Überprüfung sowie weitere Überlegungen zu den Thematiken Gebrauchstauglichkeit und Durchstanzen angestellt.

Eine Kieseindeckung mit genügender Stärke ist Voraussetzung dafür, dass ein duktiles Versagen der Stahlbetonplatte und somit kein sprödes Durchstanzen am Aufprallort eintreten kann.

6.3.2 Lösungsverfahren

Biegeverhalten

Das Lösungsverfahren beruht auf der Annahme eines starr-plastischen Tragverhaltens der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss. Daher beginnt die Plattenbewegung zum Zeitpunkt $t = 0$, wenn die (statische) Traglast Q_k erreicht ist, da das Tragwerk vorher starr bleibt. Die stationäre Modalform wird entsprechend der Mechanismuskonfiguration nach der Fliessgelenklinientheorie gewählt.

Durch die Anwendung der dynamischen Plastizitätstheorie können gegenüber elastischen Theorien wesentliche Materialersparnisse erzielt werden. Resonanzphänomene werden bei ausgeprägten plastischen Verformungen im Versagenszustand schnell gedämpft. Des Weiteren können Aussagen im Grenztragzustand einer Stahlbetonplatte unter dynamischer Beanspruchung gemacht werden.

Das Vorgehen beruht auf einer vorgängigen Ermittlung der Mechanismuskonfiguration auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie. Die statische Traglast der Stahlbetonplatte (Einzellast am massgebenden Ort) wird anhand des Fliessgelenklinienverfahrens bestimmt. Dabei wird anhand der Mechanismuskonfiguration der dazugehörende obere Grenzwert der Traglast nach der Plastizitätstheorie minimiert.

Die so bestimmte Mechanismuskonfiguration respektive das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld stellt die Ausgangslage für die Beurteilung des Stossverhaltens einer Stahlbetonplatte mit granularer Eindeckung im Grenztragzustand dar.

Mit der Anwendung des Impulserhaltungssatzes nach Gleichung (3.35) respektive (5.21) ergibt sich die Beziehung

$$m\dot{W} = \int_A \mu \dot{w} dA = mv_0 \tag{6.3}$$

Das Geschwindigkeitsfeld der Stahlbetonplatte ergibt sich aus der angenommenen Mechanismuskonfiguration. Durch Umformung von Gleichung (6.3) lässt sich die „gemeinsame“ Anfangsgeschwindigkeit $\dot{W} = \dot{W}(t = 0)$ des aufprallenden Körpers und der Platte inklusive allfälliger Auflasten (beispielsweise der granularen Eindeckung) am Aufprallort ($\dot{w}(x,y,t = 0) = \dot{W}$) bestimmen. Dabei bezeichnen m und $v_0 = v_{1a} = \sqrt{2gH}$ die Masse respektive die Geschwindigkeit (Energieerhaltung während freien Falls mit H = Fallhöhe) des aufprallenden Körpers. Mit Gleichung (6.3) wird vorausgesetzt, dass es sich um einen ideal plastischen Stoss (Aufprallkörper bleibt nach dem Stoss in der Eindeckung liegen und bewegt sich gemeinsam mit Platte) sowie um eine Impulsbelastung handelt, d. h., dass das Verhältnis der Stossdauer zur Eigenschwingdauer kurz respektive die Verformung während der Kompressionsphase klein ist.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen lässt sich für eine Platte unter Aufprallstoss in kartesischen Koordinaten wie folgt schreiben:

$$\int_{l_n} m_u \dot{\theta}_n dl_n = -m\ddot{W}\dot{W} - \int_A \mu \ddot{w}\dot{w} dA \tag{6.4}$$

Der Term auf der linken Seite von Gleichung (6.4) enthält die Leistung der inneren Kräfte $\dot{D}$ basierend auf der Fliessgelenklinientheorie (Leistung in den kinematischen Diskontinuitätslinien, Kapitel 4.5), während die jeweiligen Terme auf der rechten Seite die Leistungen L des aufprallenden Körpers mit der Masse m und die Leistung der Trägheitskräfte der Platte darstellen. Dabei entspricht μ der Masse der Stahlbetonplatte und der Auflasten pro Fläche mit der Einheit kg/m^2. Die Darstellung der Ableitung nach der Zeit wurde in den Gleichungen (6.3) und (6.4) mit einem Punkt (Oberzeichen) gemäss der Newton’schen Notation gekennzeichnet. Abb. 6.15 visualisiert das Lösungsverfahren für das Biegeverhalten von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss im Versagenszustand.

Die beiden Ausgangsgrössen des Aufprallkörpers – die Geschwindigkeit v_0 und die Masse m – stellen dabei die freien Grössen in den Gleichungen (6.3) und (6.4) dar.

Durch zweifache zeitliche Integration von Gleichung (6.4) lässt sich auf die Durchbiegung $W(t)$ der Platte am Aufprallort schliessen. Die Integrationskonstanten lassen sich aus der Anfangsbedingung für die gemeinsame Geschwindigkeit anhand von Gleichung (6.3) und der Bedingung, dass die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung null ist, $\dot{W}(t = T) = 0$, bestimmen, wobei T dem Zeitpunkt der Platte am Ende der Bewegung entspricht.

Beispiel: Quadratplatte

Im vorliegenden Beispiel wird eine duktile Quadratplatte mit der Seitenlänge l unter Aufprallstoss betrachtet, wobei der Einfluss des Verhältnisses der unteren Bewehrung m_u zur oberen Bewehrung m_u' untersucht wird, was zu unterschiedlichen Mechanismen führen kann. Dabei wird eine isotrope Bewehrung vorausgesetzt.

Die Dissipationsleistung in den Fliessgelenklinien des Pyramidenmechanismus einer gelenkig gelagerten Quadratplatte unter zentrischer Einzellast (Abb. 6.16 (a) beträgt:

$$\dot{D} = 8 m_u \dot{W} \tag{6.5}$$

Die Leistung der Einzellast Q beträgt:

$$L_a = \dot{W} Q \tag{6.6}$$

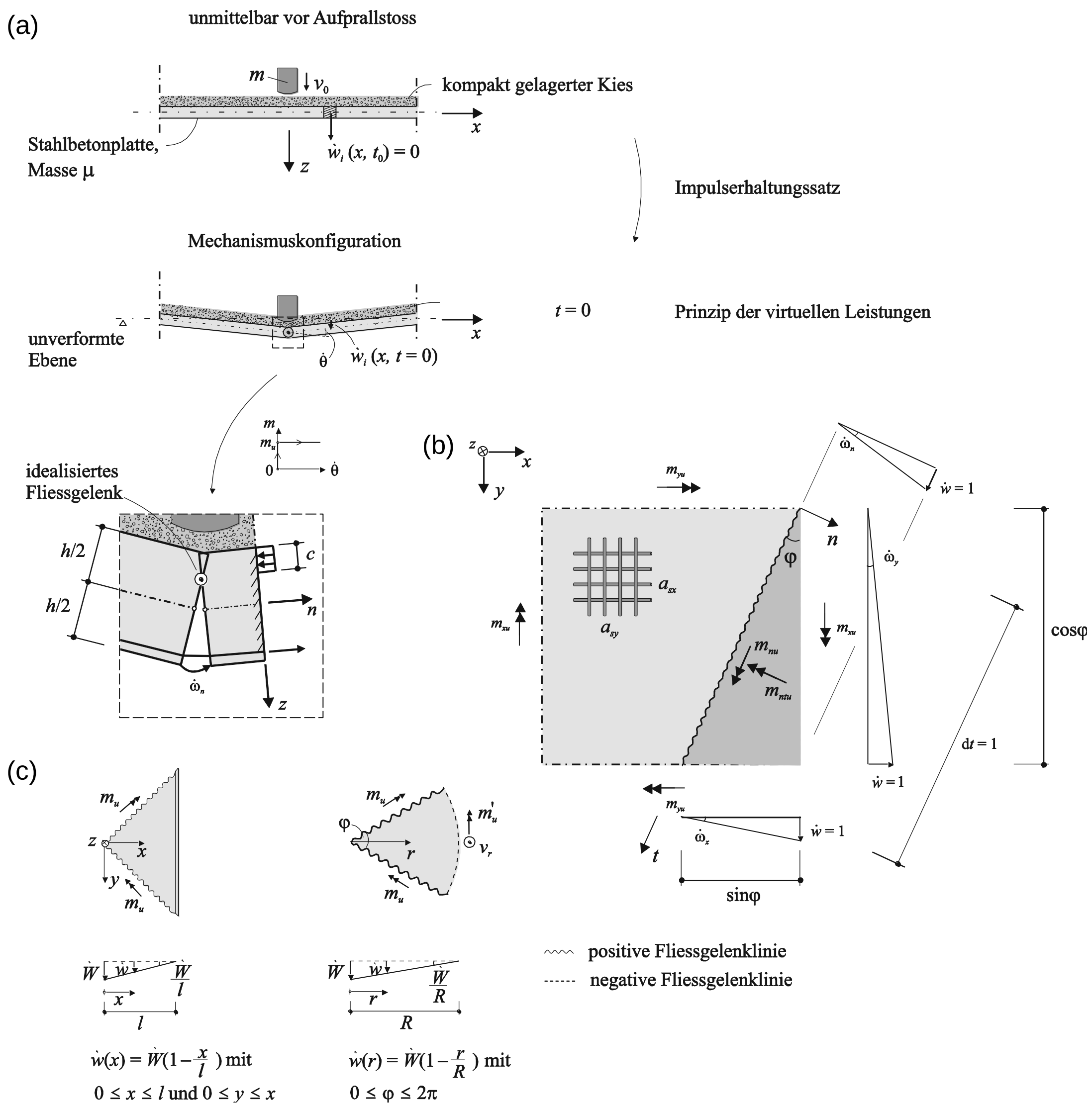


Abb. 6.15 *Biegeverhalten von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss:*
(a) Stahlbetonplatte unmittelbar vor dem Stoss respektive Mechanismus-konfiguration bei t = 0 (Versagenszustand);
(b) infinitesimales Plattenelement mit Fliessgelenklinie;
(c) Plattensegmente mit Geschwindigkeitsfeldern.

Durch Gleichsetzen der Dissipationsleistung (Gleichung (6.5)) mit der Leistung der Einzellast (Gleichung (6.6)) ergibt sich der obere Grenzwert der (statischen) Traglast $Q_k = 8\ m_u$. Gemäss dem Kapitel 4.6.3 liegt für die Quadratplatte mit $m_u' = m_u$ die vollständige Lösung $Q_u = Q_k = 8\ m_u$ vor.

Demgegenüber ergibt sich für den Fächermechanismus in Abb. 6.16 (b) die Dissipationsleistung:

$$\dot{D} = 2\pi(m_u + m_u')\dot{W} \tag{6.7}$$

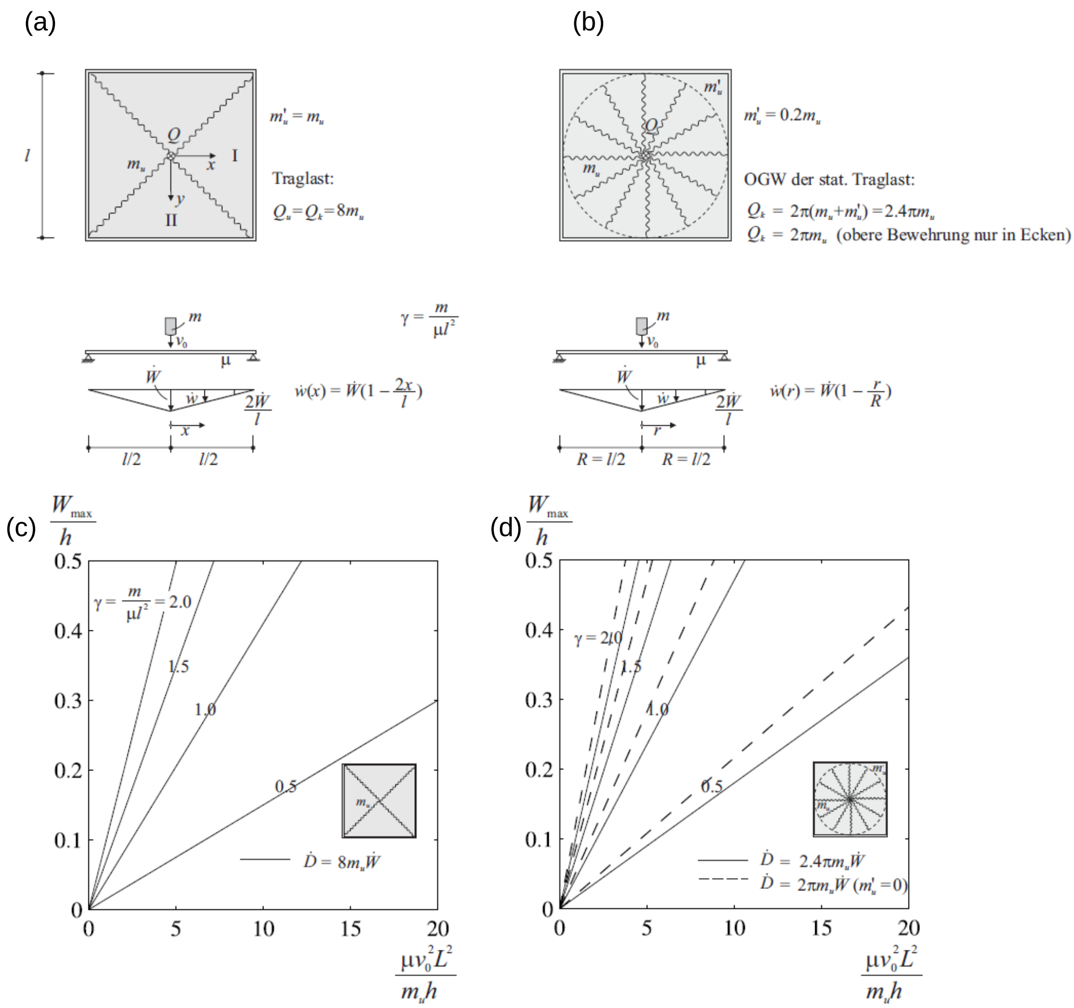


Abb. 6.16 *Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter zentrischer Belastung und isotroper Bewehrung:*
(a) Pyramidenmechanismus, $m_u = m_u'$;
(b) Fächermechanismus, $m_u = 0.2\ m_u'$;
Aufprallstoss: Verhältnis der maximalen plastischen Durchbiegung zur Plattendicke W_{max}/h als Funktion von $\left(\mu v_0^2 L^2\right)/(m_u h)$ für verschieden Massenverhältnisse $\gamma = m/(\mu l^2)$
(c) Pyramidenmechanismus, $m_u = m_u'$;
(d) Fächermechanismus, $m_u = 0.2\ m_u'$ („oberer Grenzwert" wird mit OGW abgekürzt).

Durch Gleichsetzen der Dissipationsleistung nach Gleichung (6.7) mit der Leistung der Einzellast nach Gleichung (6.6) ergibt sich der obere Grenzwert der (statischen) Traglast $Q_k = 2\pi(m_u + m_u')$ für den Fächermechanismus. Der Vergleich der beiden Mechanismuskonfigurationen zeigt, dass der Pyramidenmechanismus für $m_u' \geq 0.27\ m_u$ respektive der Fächermechanismus für $m_u' \leq 0.27\ m_u$ massgebend wird. Falls nur eine obere Bewehrung in den Ecken zur Verfügung steht, beträgt der obere Grenzwert der Traglast $Q_k = 2\pi\ m_u$ (Kreisfächer, $m_u' = 0$). Das folgende Beispiel wird einerseits für den in Abb. 6.16 (a) gezeigten Pyramidenmechanismus, welcher infolge einer zentrischen Einzellast in Plattenmitte und unter Annahme einer isotropen Bewehrung $m_{xu} = m_{yu} = m_{xu}' = m_{yu}' = m_u$ resultiert, berechnet. Und andererseits wird die Lösung für den Pyramidenmechanismus mit dem in Abb. 6.16 (b) dargestellten Fächermechanismus, welcher infolge einer zentrischen Einzellast in Plattenmitte und unter Annahme einer isotropen Bewehrung $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m_{xu}' = m_{yu}' = 0.2\ m_u$ resultiert, verglichen.

Die statische Traglast des Pyramidenmechanismus $Q_u = Q_k = 8m_u$ ist somit unabhängig von der Seitenlänge l der Platte. Die Geschwindigkeitsfelder der Segmente I und II betragen:

$$\dot{w}_I = \dot{W}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \qquad 0 \le x \le l/2 \quad und \quad 0 \le y \le x$$

$$\dot{w}_{II} = \dot{W}\left(1 - \frac{2y}{l}\right) \qquad 0 \le y \le l/2 \quad und \quad 0 \le x \le y$$

Die Anwendung des Impulserhaltungssatzes nach Gleichung (6.3) für den Pyramidenmechanismus ergibt

$$m\dot{W} + 8\mu \int_{x=0}^{l/2} \int_{y=0}^{x} \dot{W}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) dxdy = mv_0 \tag{6.8}$$

und somit

$$\dot{W} = \frac{v_0}{1 + \frac{1}{3}\mu l^2 / G} = \frac{v_0}{1 + \frac{1}{3\gamma}} \tag{6.9}$$

wobei $\gamma = m/\left(\mu l^2\right)$ das Massenverhältnis zwischen der aufprallenden Masse m und der Masse der Platte μl^2 bezeichnet.

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen nach Gleichung (6.4) liefert

$$8m_u\dot{W} = -m\ddot{W}\dot{W} - 8\mu \int_{x=0}^{l/2} \int_{y=0}^{x} \ddot{W}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\dot{W}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) dxdy = -m\ddot{W}\dot{W} - \frac{1}{6}\mu\ddot{W}\dot{W}l^2 \tag{6.10}$$

und umgeformt:

$$8m_u = -\ddot{W}\left(m + \frac{1}{6}\mu l^2\right)$$

Die Integration von Gleichung (6.10) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\dot{W}(t = 0) = \dot{W}$ aus Gleichung (6.9) liefert:

$$\dot{W} = -\frac{8m_u}{m + \frac{1}{6}\mu l^2} \cdot t + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{3}\mu l^2 / m} \tag{6.11}$$

Die Integration von Gleichung (6.11) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $W(\mathrm{t} = 0) = 0$ liefert:

$$W(t) = -\frac{8m_u}{m + \frac{1}{6}\mu l^2} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{3}\mu l^2 / m} \cdot t \tag{6.12}$$

Die Bewegung endet zum Zeitpunkt $t = T$, wenn die Geschwindigkeit $\dot{W}(t = T) = 0$ ist; somit gilt:

$$T = \frac{v_0\left(m + \frac{1}{6}\mu l^2\right)}{8m_u\left(1 + \frac{1}{3}\mu l^2 / m\right)} \tag{6.13}$$

Die maximale plastische Durchbiegung am Aufprallort beträgt:

$$W_{\max} = W(t = T) = -\frac{4m_u}{m + \frac{1}{6}\mu l^2} \cdot T^2 + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{3}\mu l^2 / m} \cdot T \tag{6.14}$$

Im normierten Diagramm in Abb. 6.16 (c) werden die Beziehungen

$$\frac{W_{\max}}{H} = \frac{\mu v_0^2 l^2}{16 m_u H} \frac{\left(\gamma + \frac{1}{6}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3\gamma}\right)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mu v_0^2 l^2}{m_u H} \tag{6.15}$$

verwendet, wobei das Massenverhältnis γ als Parameter variiert wird.

Eine energetische Betrachtung durch Gleichsetzen der kinetischen Energien der Stahlbetonplatte und des Aufprallkörpers

$$T_{Platte} = 8\int_m \frac{\dot{W}^2}{2} dm = 4\mu \int_{x=0}^{l/2} \int_{y=0}^{x} \dot{W}^2 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 dxdy = \frac{1}{12}\mu \dot{W}^2 l^2 \quad und \tag{6.16}$$

$$T_{Aufprallkörper} = \frac{1}{2} m \dot{W}^2$$

mit der Dissipationsenergie

$$D = Q_k W_{\max} = 8 m_u W_{\max} \tag{6.17}$$

liefert die maximale Durchbiegung der Platte am Aufprallort:

$$W_{\max} = \frac{\frac{1}{2}\dot{W}^2\left(m + \frac{1}{6}\mu l^2\right)}{8m_u} \tag{6.18}$$

wobei $\dot{W}$ nach Gleichung (6.9) aus dem Impulserhaltungssatz bestimmt wird. Durch Umformung von Gleichung (6.18) ergibt sich wiederum dasselbe Resultat für W_{max}/H wie nach Gleichung (6.15)₁.

Der obere Grenzwert der (statischen) Traglast für den Fächermechanismus in Abb. 6.16 (b) beträgt $Q_k = 2\pi(m_u + m_u') = 2.4\pi\, m_u$ und ist somit ebenfalls unabhängig von der Seitenlänge l der Platte. Das rotationssymmetrische Geschwindigkeitsfeld beträgt:

$$\dot{w} = \dot{W}\left(1 - \frac{2r}{l}\right) \qquad 0 \le r \le l/2$$

Die Anwendung des Impulserhaltungssatzes nach Gleichung (6.3) ergibt

$$m\dot{W} + \mu \int_{r=0}^{l/2} 2\pi r \dot{w}\, dr = m\dot{W} + \mu \int_{r=0}^{l/2} 2\pi r \dot{W}\left(1 - \frac{2r}{l}\right) dr = m v_0 \tag{6.19}$$

und somit

$$\dot{W} = \frac{v_0}{1 + \frac{1}{12}\pi \mu l^2 / m} = \frac{v_0}{1 + \frac{\pi}{12\gamma}} \tag{6.20}$$

wobei $\gamma = m/(\mu l^2)$ das Massenverhältnis zwischen der aufprallenden Masse und der Masse der Platte bezeichnet.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen nach Gleichung (6.4) liefert

$$2.4\pi m_u \dot{W} = -m\ddot{W}\dot{W} - \mu \int_{r=0}^{l/2} \ddot{W}\left(1 - \frac{2r}{l}\right)\dot{W}\left(1 - \frac{2r}{l}\right) 2\pi r\, dr = -m\ddot{W}\dot{W} - \frac{1}{24}\pi\mu \ddot{W}\dot{W} l^2 \tag{6.21}$$

und umgeformt:

$$2.4\pi m_u = -\ddot{W}\left(m + \frac{1}{24}\pi\mu l^2\right)$$

Die Integration von Gleichung (6.21) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\dot{W}(t = 0) = \dot{W}$ aus Gleichung (6.20) liefert:

$$\dot{W} = -\frac{2.4\pi m_u}{m + \frac{1}{24}\pi\mu l^2} \cdot t + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{12}\pi\mu l^2 / m} \tag{6.22}$$

Die Integration von Gleichung (6.22) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $W(t = 0) = 0$ liefert:

$$W(t) = -\frac{2.4\pi m_u}{m + \frac{1}{24}\pi\mu l^2} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{12}\pi\mu l^2 / m} \cdot t \tag{6.23}$$

Die Bewegung endet zum Zeitpunkt $t = T$, wenn die Geschwindigkeit $\dot{W}(t = T) = 0$ beträgt und somit die maximale plastische Durchbiegung am Aufprallort erreicht ist, d. h.:

$$T = \frac{5v_0\left(m + \frac{\pi}{24}\mu l^2\right)}{12\pi m_u\left(1 + \frac{\pi}{12}\mu l^2 / m\right)} \tag{6.24}$$

Die maximale plastische (bleibende) Durchbiegung am Aufprallort beträgt somit:

$$W_{\max} = W(t = T) = -\frac{2.4\pi m_u}{m + \frac{1}{24}\pi\mu l^2}\cdot\frac{T^2}{2} + \frac{v_0}{1 + \frac{1}{12}\pi\mu l^2 / m}\cdot T \tag{6.25}$$

Im normierten Diagramm in Abb. 6.16 (d) werden die Beziehungen

$$\frac{W_{\max}}{H} = \frac{5}{24}\frac{\mu v_0^2 l^2}{\pi m_u H}\frac{\left(\gamma + \frac{\pi}{24}\right)}{\left(1 + \frac{\pi}{12\gamma}\right)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mu v_0^2 l^2}{m_u H} \tag{6.26}$$

verwendet, wobei wiederum das Massenverhältnis γ als Parameter variiert wird.

Eine energetische Betrachtung mit $T_{\text{tot}} = D$ liefert wiederum dasselbe Ergebnis nach Gleichung $(6.26)_1$.

Das in diesem Kapitel vorgestellte Lösungsverfahren, das auf dem Impulserhaltungssatz (Gleichung (6.3)) und dem Prinzip der virtuellen Leistungen (Gleichung (6.4)) basiert, liefert für vorgegebene Eingangsgrössen m und v_0 des Aufprallkörpers die maximale dynamische Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort, d. h. den Verformungsbedarf der Platte. Das Verformungsvermögen soll mittels des in Kapitel 6.3.3 aufgezeigten Verfahrens sichergestellt werden.

Querkrafttraglast

Bei der Modellvorstellung des Sandwichmodells für Stahlbetonplatten [Marti 1990] werden die Querkräfte dem Plattenkern (mittlere Schicht) zugewiesen, während die Biege- und Drillmomente den Sandwichdeckeln (Scheibenelemente) zugeordnet werden. Der Abstand der Mittelebenen (auf Höhe der unteren respektive oberen Bewehrungslagen angesetzt) der beiden Scheibenelemente wird mit d_v bezeichnet.

Mit der Modellvorstellung des ungerissenen Kerns,

$$\tau_{c0} = \frac{v_0}{d_v} \leq \frac{\sqrt{f_{cc}}}{3} \tag{6.27}$$

ergibt sich für relativ kleine nominelle Schubspannungen in dünnen Platten ein Zustand reinen Schubes und es ist keine Querkraftbewehrung erforderlich. Demgegenüber ist für grössere nominelle Schubspannungen – Modellvorstellung des gerissenen Kerns –,

$$\tau_{c0} = \frac{v_0}{d_v} > \frac{\sqrt{f_{cc}}}{3} \tag{6.28}$$

eine Querkraftbewehrung mit einem Bewehrungsgehalt von

$$\rho_z = \frac{v_0 \tan\theta}{d_v \sigma_{sz}} \tag{6.29}$$

in z-Richtung erforderlich, wobei θ die Neigung des Betondruckspannungsfelds im gerissenen Plattenkern und σ_{sz} die gewählte Bemessungsspannung der Querkraftbewehrung in z-Richtung bezeichnen. Der minimale Querkraftbewehrungsgehalt beträgt $\rho_{z,\min} = \rho_{\min}/3 \approx 0.2\,\%$ [Jäger 2009], mit $\rho_{\min}$ als minimaler Bewehrungsgehalt von Stahlbetonzuggliedern.

Mit dem Sandwichmodell lässt sich der Einfluss der Querkräfte erfassen und es erlaubt auch eine Betrachtung des Verformungsvermögens von Stahlbetonplatten.

Das in den beiden vorangegangenen Abschnitten beschriebene Lösungsverfahren für das Biegeverhalten von Stahlbetonplatten unter Aufprallstoss ermöglicht eine Aussage über den Verformungsbedarf. Zur Gewährleistung eines ausreichenden Verformungsvermögens von Platten ist der Nachweis der Querkrafttragfähigkeit respektive eine Abschätzung der erforderlichen Querkraftwiderstände erforderlich. Mit dem Konzept der Kapazitätsbemessung, welches insbesondere im Erdbebeningenieurwesen Anwendung findet, lässt sich das erforderliche Verformungsvermögen sicherstellen, indem die Querkrafttraglast F_v grösser als die Biegetraglast F_u (oberer Grenzwert der Traglast F_k)

$$F_u \le F_k \le F_v \tag{6.30}$$

gewählt wird.

Die plastifizierenden Bereiche der Platte werden dadurch bewusst so gewählt, dass sich unter den massgebenden Einwirkungen eine geeignete Fliessmechanismuskonfiguration ausbildet. Die Abschätzung der erforderlichen Querkrafttraglast v_0 nach Gleichung (4.11) erfolgt mithilfe der Ausführungen zum Kraftfluss in Plattensegmenten in Kapitel 4.6.3.

Am Beispiel einer gelenkig gelagerten Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Belastung q lässt sich für die in Abb. 6.17 (a) dargestellte Mechanismuskonfiguration der obere Grenzwert der Traglast q_k durch Gleichsetzen der Dissipationsleistung $\dot{D} = 8\, m_u \dot{W}$ mit der Leistung der verteilten Belastung $L^{(a)} = q_k \dot{W} l^2/3$ berechnen: $q_k = 24\, m_u / l^2$.

Für das aus dem Mechanismus herausgetrennte starre, dreieckförmige Plattensegment mit den Fliessgelenklinien als Lastscheiden in Abb. 6.17 (b) lässt sich mit der vollständigen Lösung für das Plattensegment die Traglast ermitteln: $q_u = 24\, m_u / l^2$. Somit liegt die vollständige Lösung der Quadratplatte vor. Die Hauptquerkraft beträgt gemäss Gleichung (4.58): $v_0 = q_u\, r/2 = 12\, m_u\, r/l^2$. Der Kraftfluss ist im Dreiecksegment in Abb. 6.17 (b) dargestellt. In den Plattenecken ergibt sich die maximale Hauptquerkraft: Ecke A $v_{0A} = v_0(r = l/\sqrt{2}) = 12\, m_u / (\sqrt{2}\, l) \approx 8.5\, m_u / l$.

Wirkt in O eine Einzellast Q, so erhält man für die Mechanismuskonfiguration einen oberen Grenzwert der Traglast Q_k durch Gleichsetzen der Dissipationsleistung $\dot{D} = 8\, m_u \dot{W}$ mit der Leistung der Einzellast $L^{(a)} = Q_k \dot{W}$ von $Q_k = 8\, m_u$. Für das dreieckförmige Plattensegment lässt sich mit den Momentenansätzen $m_x = 0$, $m_y = m_u\,(1 - y^2/x^2)$ und $m_{xy} = -m_u\, y/x$ die Traglast $Q_u = 8\, m_u$ bestimmen, womit die vollständige Lösung vorliegt. Die Hauptquerkraft beträgt $v_0 = m_u/(r\cos^2\varphi)$. Die maximale Hauptquerkraft in den Plattenecken beträgt $v_{0A} = v_{0B} = 2\sqrt{2}\, m_u/l \approx 2.83\, m_u/l$.

Ein solches Vorgehen auf der Basis der Kapazitätsbemessung lässt sich beispielsweise auch bei Schutzbauten anwenden [Jäger 2009].

Auf die Problematik des lokalen Durchstanzens am Aufprallort wird in Kapitel 6.4.4 eingegangen.

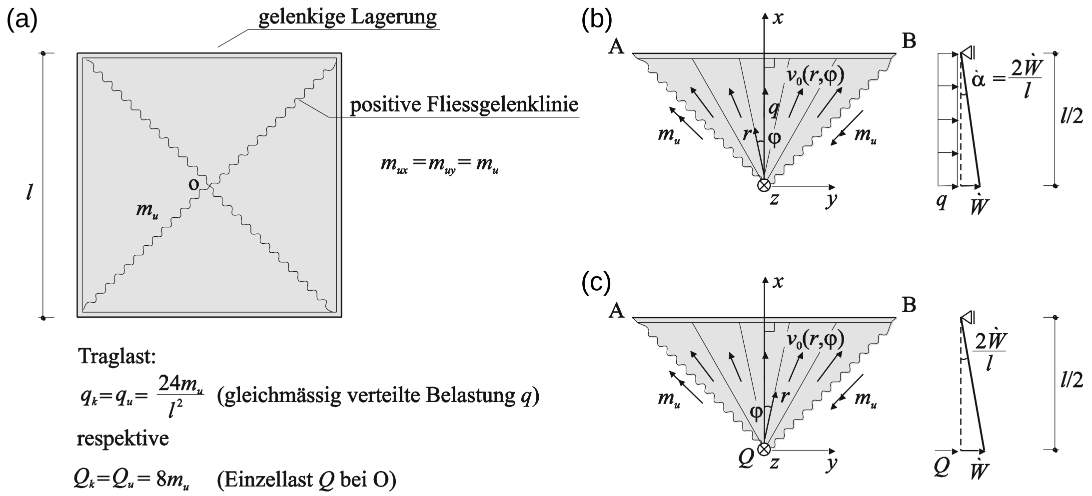


Abb. 6.17 *Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter gleichmässiger Belastung q respektive Einzellast Q in O und mit isotroper Bewehrung:*
(a) Mechanismuskonfiguration;
(b), (c) dreieckförmiges Plattensegment mit dazugehörigem Kraftfluss.

6.3.3 Verformungsvermögen

Bei der Anwendung der Traglastverfahren wird angenommen, dass das Tragwerk ein genügendes Verformungsvermögen aufweist, so dass sich bei der Erstrissbildung die inneren Kräfte umverteilen können und sich ein Fliessmechanismus bilden kann.

Umfangreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen des Verformungsvermögens von plastischen Gelenkbereichen wurden an Stahlbetonbalken ([Sigrist 1995], [Beeby 1997]) und Stahlbetonplatten ([Alvarez et al. 2000], [Jäger 2007]) vorgenommen.

Ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen lässt sich insbesondere durch die Verwendung von Betonstahl mit einem guten Verformungsvermögen (auch als Duktilität bezeichnet) sowie eine sorgfältige konstruktive Durchbildung der Tragwerke sicherstellen. Im Weiteren lässt sich mit dem Konzept der Kapazitätsbemessung, beispielsweise angewendet auf Elemente eines Tragsystems mit nicht duktilem Verhalten, ein verbessertes Verformungsvermögen anstreben (Kapitel 6.3.2, Querkrafttraglast).

Plastische Verformungen entstehen in Stahlbetonplatten hauptsächlich aus der Verlängerung der Biegebewehrung und treten primär in Bereichen maximaler Momentenbeanspruchungen auf. Daher nimmt das Verformungsverhalten des Zuggurts eine besondere Bedeutung ein. Als Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verformungen wird anstelle der Verschiebeduktilität (Kapitel 5.4) im Folgenden die Rotationsduktilität verwendet.

In der Regel liegen die Bereiche maximaler Momentenbeanspruchung einer Platte dort, wo konzentrierte Kräfte eingeleitet werden. Die plastischen Verformungsbereiche bei konzentrierten Krafteinleitungen können vereinfachend zu Gelenkwinkeln (Gelenkrotation) zusammengefasst werden ([Bachmann 1967], [Sigrist 1995]).

Das Rotationsvermögen wird durch die Stahldehnungen respektive durch die Betonstauchungen begrenzt.

Das Bruchkriterium wird für die beiden Versagensformen „Bruch des Betonstahls“ und „Bruch der Biegedruckzone“ formuliert. Der Bruch des Betonstahls tritt ein, wenn die maximale Stahldehnung am Riss $\varepsilon_{sr,\max}$ die Grenzdehnung ε_{su} erreicht. Das Kriterium für das Eintreten des Bruchs der Biegedruckzone lässt sich mit der Beziehung

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{cu}\left(\frac{d}{z_c} - 1\right) \qquad (6.31)$$

ermitteln.

Versuchsergebnisse von [Bachmann & Thürlimann 1965] und [Sigrist & Marti 1993] weisen darauf hin, dass die nominelle Bruchgrenze ε_{cu} für Beton Werte von etwa 5 ‰ annimmt. Bei Vorhandensein einer Umschnürungsbewehrung in der Biegedruckzone können wesentlich grössere Werte für die Bruchstauchung von Beton erreicht werden [Sigrist 1995].

Das Verformungsvermögen wird in Abb. 6.18 anhand eines Beispiels an zwei geometrisch identischen, über zwei Felder gespannten Plattenstreifen mit unterschiedlichen Duktilitätseigenschaften der Bewehrungsstäbe [Jäger 2009] illustriert. Der Plattenstreifen P1 weist einen kaltverformten Stahl (B500A) und P2 einen naturharten Stahl (B500C) auf. Die Parameter und das statische System der Platten mit Bewehrung sind in Abb. 6.18 (a, b) angegeben.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung $\sigma_{sr} - \varepsilon_m$ im Rissquerschnitt nach dem Zuggurtmodell ist für den theoretischen Rissabstand $s_r = \lambda s_{r0}$ mit λ = 0.5, 1.0 in Abb. 6.18 (c-e) dargestellt. Dabei bezeichnen σ_{sr} und ε_m die Stahlspannung am Riss und die mittlere Dehnung. Die beiden Plattenstreifen zeigen bedeutende Unterschiede hinsichtlich des Verlaufs der mittleren Dehnung ε_m im plastischen Bereich.

Die vereinfachte Berechnung des plastischen Gelenkwinkels nach Sigrist basiert auf einer Arbeit von [Bachmann 1967] und ist in Abb. 6.19 dargestellt. Die Beschränkung des plastischen Rotationswinkels (Verformungsvermögen) kann näherungsweise für Betonstahl mit der Beziehung

$$\theta_{pl} = \frac{l_{pl}\left(\varepsilon_{smu} - \varepsilon_{smy}\right)}{d - z_c} \qquad (6.32)$$

respektive für Beton mit der Beziehung

$$\theta_{pl} = l_{pl}\left(\frac{\varepsilon_{cu}}{z_c} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d - z_c}\right) \qquad (6.33)$$

nach [Sigrist 1995] berechnet werden. Dabei bezeichnet d die statische Höhe und z_c die Druckzonenhöhe. Die mittleren Stahldehnungen ε_{sm} werden nach dem Zuggurtmodell (Kapitel 2.3.2) berechnet.

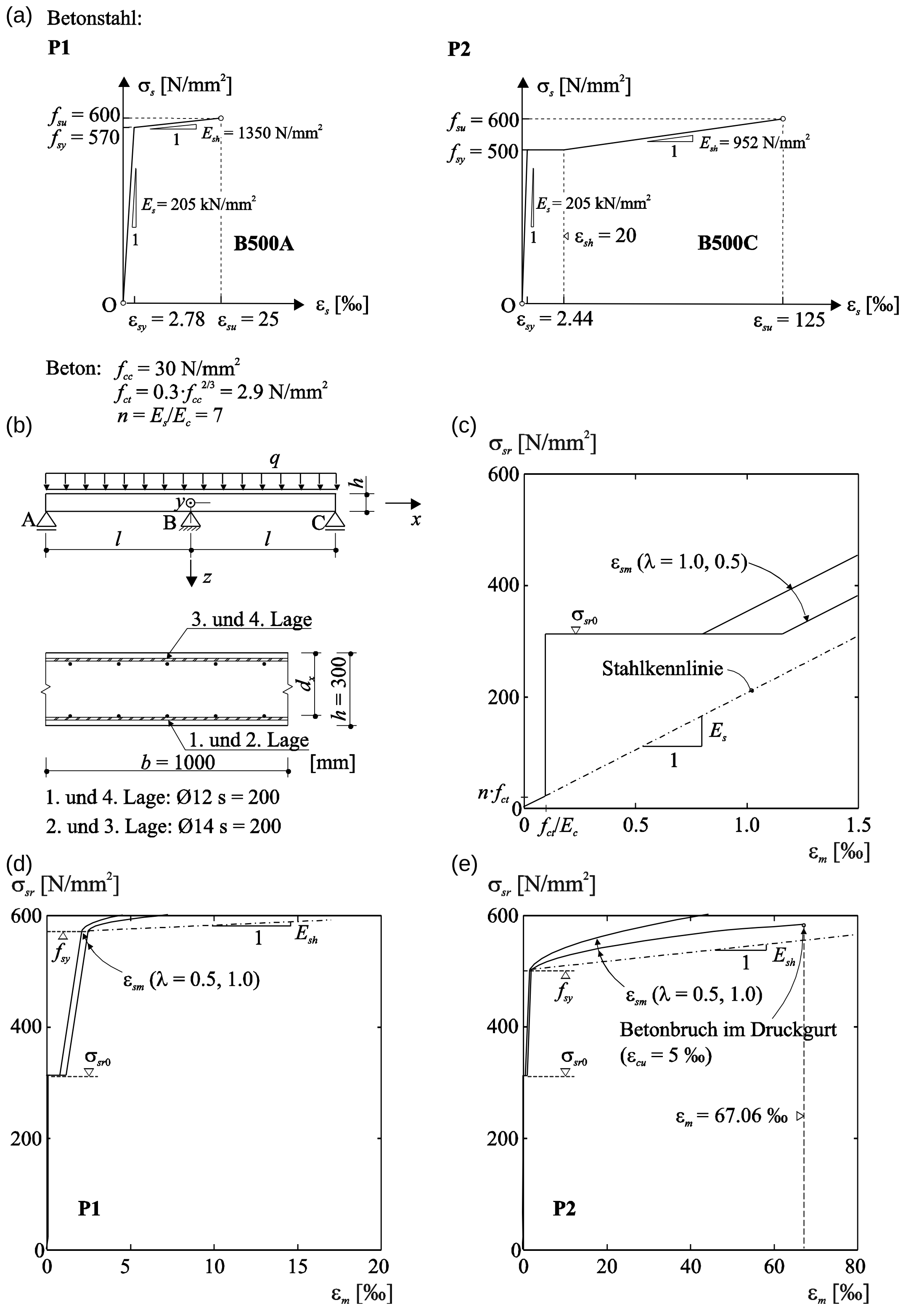


__Abb. 6.18__ Beispiel Verformungsvermögen, Plattenstreifen P1, P2 [Jäger 2009]:
(a) Parameter von Betonstahl und Beton;
(b) statisches System der Platte mit Bewehrung;
Spannungs-Dehnungsbeziehung im Rissquerschnitt:
(c) im Bereich der Rissbildung
(d), (e) im Bereich der elastischen und plastischen Verformungen nach dem Zuggurtmodell.

Dieses Vorgehen betrachtet das Verformungsvermögen unabhängig vom Verformungsbedarf. Der plastische Verformungsbedarf ist sowohl vom betrachteten System als auch von der Belastungskonfiguration abhängig.

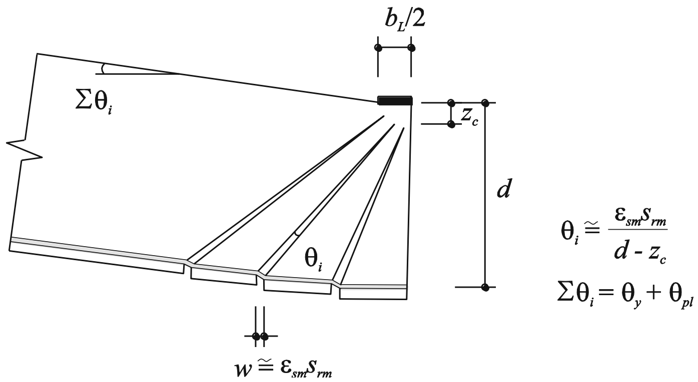


Abb. 6.19 *Plastische Verformungsbereiche von Stahlbetonplatten bei konzentrierter Krafteinleitung (aus [Marti et al. 1999] nach [Bachmann 1967]).*

Die fiktive plastische Gelenklänge kann mit

$$l_{pl} = 2d_m + b_L \tag{6.34}$$

berechnet werden mit d_m als mittlere statische Höhe [Jäger 2007].

Die Gleichungen (6.32) bis (6.34) wurden mit Versuchen an Stahlbetonplatten [Jäger & Marti 2005] bestätigt.

Das Verformungsvermögen ist von zahlreichen Parametern abhängig, welche teilweise grossen Streuungen unterworfen sind, weshalb seine Berechnung mit Schwierigkeiten verbunden ist. Aus diesem Grund ist es vernünftig, von einem vereinfachten Näherungsverfahren auszugehen. Mit zunehmender Gelenkrotation kann eine Verfestigung festgestellt werden. Im Erdbebeningenieurwesen wird dies mit einem sogenannten Überfestigkeitsfaktor für den Betonstahl berücksichtigt [Paulay et al. 1990], wobei darin neben dem Einfluss der Stahlverfestigung bei grossen plastischen Dehnungen auch die dynamischen Effekte enthalten sind.

Der Rissabstand entspricht bei einer vorhandenen Querbewehrung deren Stababstand, d. h., im vorliegenden Beispiel beträgt der Rissabstand s_r = 200 mm. In Abb. 6.20 sind die Risselemente für P1 und P2 beim Erreichen des Bruchzustandes dargestellt. Das Versagen des Plattenstreifens P1 tritt beim Erreichen der Zugfestigkeit ein (Zerreissen der Bewehrung), während der Plattenstreifen P2 vorzeitig aufgrund des Bruchs der Biegedruckzone versagt. Das Verformungsvermögen des Plattenstreifens P1 – die plastische Gelenklänge mit $l_{pl} \approx 3d$ angenommen – ist aufgrund der geringen Bruchdehnung gegenüber demjenigen des Plattenstreifens P2 sehr gering.

Für eine vorgegebene Belastung q kann im Weiteren der erforderliche Verformungsbedarf – im vorliegenden Beispiel eines zweifeldrigen Plattenstreifens: beim Mittellager B – bestimmt werden. Darauf wird hier jedoch nicht weiter eingegangen.

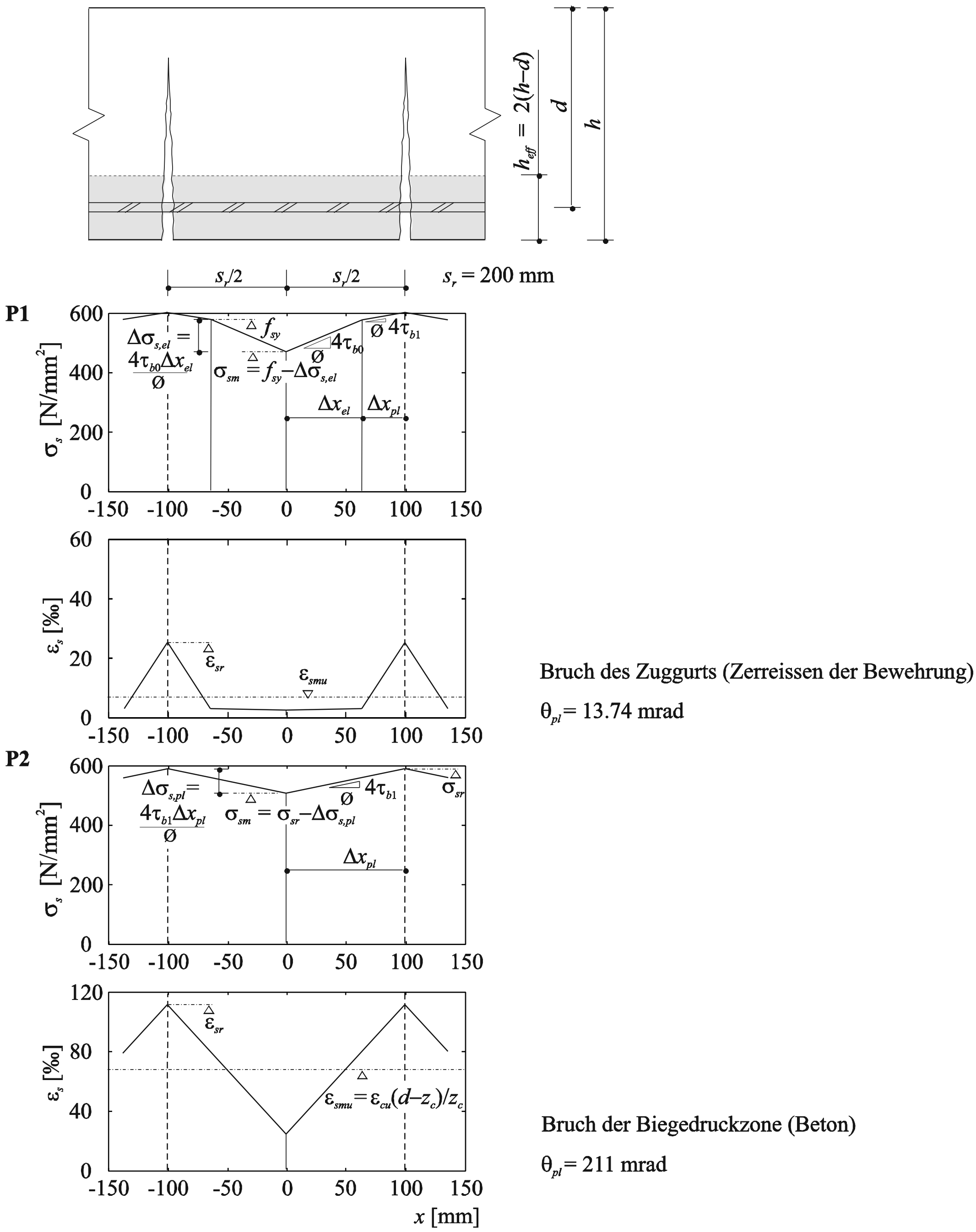


Abb. 6.20 *Risselemente für die Plattenstreifen P1 und P2: Bei Fliessbeginn der Bewehrung und im Bruchzustand. Parameter gemäss Abb.* 6.18 *(a); Rissabstand s_r = 200 mm entspricht der Teilung der Querbewehrung.*

In Abb. 6.21 sind für die angegebenen Parameter und einen Rissabstand mit $\lambda = 1$ die Stahlspannungen am Riss für verschiedene Durchmesser Ø des Bewehrungsstabes respektive Zylinderdruckfestigkeiten f_{cc} des Betons dargestellt. Das Verhältnis einer mittleren Dehnung zur Stahldehnung im Rissquerschnitt $\varepsilon_m/\sigma_{sr}$ nach dem Zuggurtmodell kann als das Mass zur Lokalisierung der jeweiligen Dehnungen von Stahlbetonzuggliedern verwendet werden ([Bachmann 1967], [Sigrist 1995]). Abnehmende Stabdurchmesser respektive zunehmende Zylinderdruckfestigkeiten des Betons führen zu einer grösseren Lokalisierung der Stahldehnungen. Damit verbunden ergeben sich geringere mittlere Bruchdehnungen des Stahlbetonzugglieds.

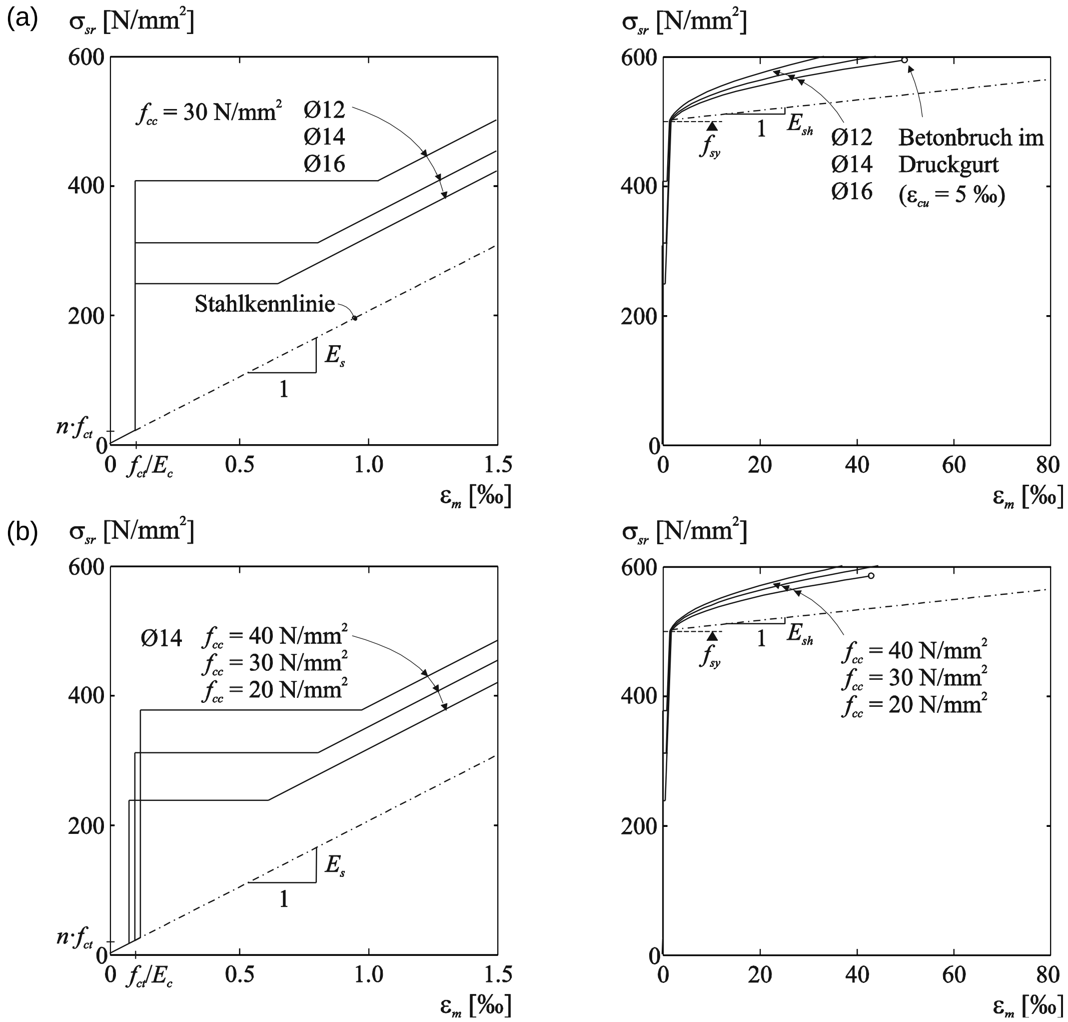


Abb. 6.21 *Parameterstudie, Verformungsvermögen nach dem Zuggurtmodell: Variation*
(a) des Durchmessers Ø des Bewehrungsstabes;
(b) der Betonzylinderdruckfestigkeit.
Parameter: $\lambda = 1$, $f_{sy} = 500$ N/mm², $f_{su} = 600$ N/mm², $E_s = 205$ kN/mm², $E_{sh} = 952$ N/mm², $\varepsilon_{su} = 125$ ‰, $\varepsilon_{sh} = 20$ ‰ (Betonstahl P2), $f_{ct} = 0.3 \cdot f_{cc}^{2/3}$, $n = E_s/E_c = 7$, $\tau_{b0} = 2 \cdot \tau_{b1} = 0.6 \cdot f_{cc}^{2/3}$.

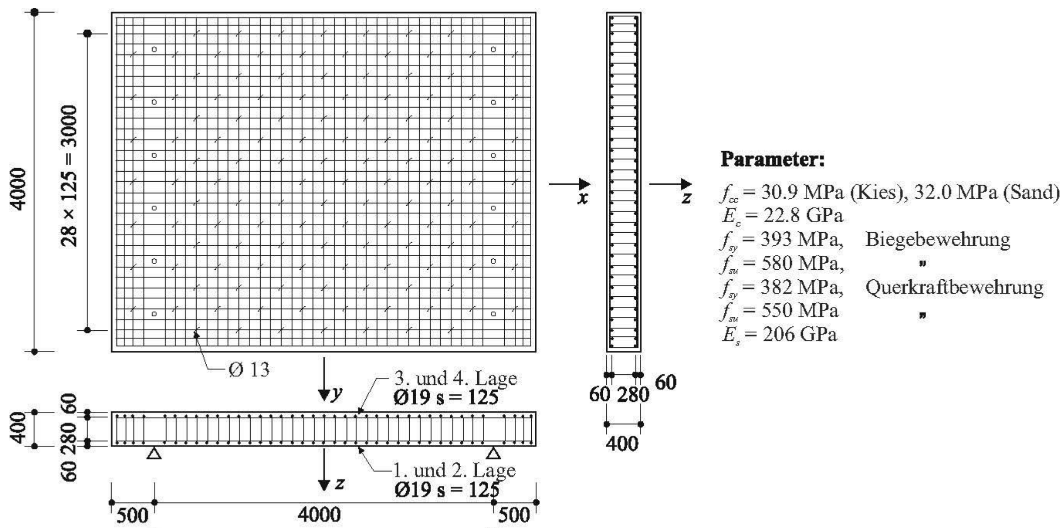
Das Konzept der Kapazitätsbemessung stellt sicher, dass ein Tragwerk eine gewünschte Duktilität aufweist und ein Tragwerksversagen ausschliesslich duktil erfolgen kann. Dieses Vorgehen stellt sicher, dass die Energiedissipation in den bewusst gewählten plastischen Gelenken erfolgen kann und die restlichen Tragwerksbereiche im elastischen Zustand bleiben.

In Versuchen von [Ammann 1983] wurde gezeigt, dass Tragwerke unter dynamischer Beanspruchung ein erhöhtes Verformungsvermögen aufweisen. Gemäss Kapitel 2.3.3 kann diese Erhöhung hauptsächlich den Materialeigenschaften der Bewehrung und des Betons zugeschrieben werden. Die τ_b-δ-Beziehung zwischen Bewehrung und Beton bei hohen Dehngeschwindigkeiten verändert sich nur insofern, als eine Zunahme der Verbundspannung bei gleicher Verschiebung eine Parallelverschiebung der τ_b-δ-Kurve bewirkt.

6.3.4 Vergleich mit Aufprallversuchen von CERI und Muroran IT, Japan

Eine detaillierte Darstellung der Versuchseinrichtung, des Versuchskörpers und der Versuchsresultate findet sich in [Yamaguchi et al. 2011]. In Abb. 6.22 (a) ist der Versuchskörper mit den Abmessungen und der Bewehrung dargestellt. Die Abmessungen und die Bewehrung der Versuchskörper wurden gegenüber Platten typischer Steinschlagschutzgalerien in Japan mit einem Faktor von 2/5 skaliert. Die Aufprallversuche wurden mit granularer Eindeckung aus Sand (feine Körnung, Durchmesser Grösstkorn ca. 2 mm) und Kies (Durchmesser Grösstkorn ca. 30 mm) bei einer konstanten Stärke von e = 50 cm durchgeführt. Die Korngrössenverteilung der granularen Eindeckung ist in Abb. 6.1 (b) dargestellt. Das Eindeckungsmaterial wurde zentrisch auf einer Fläche von ca. 3.5 m × 3.5 m platziert.

(a)



(b)

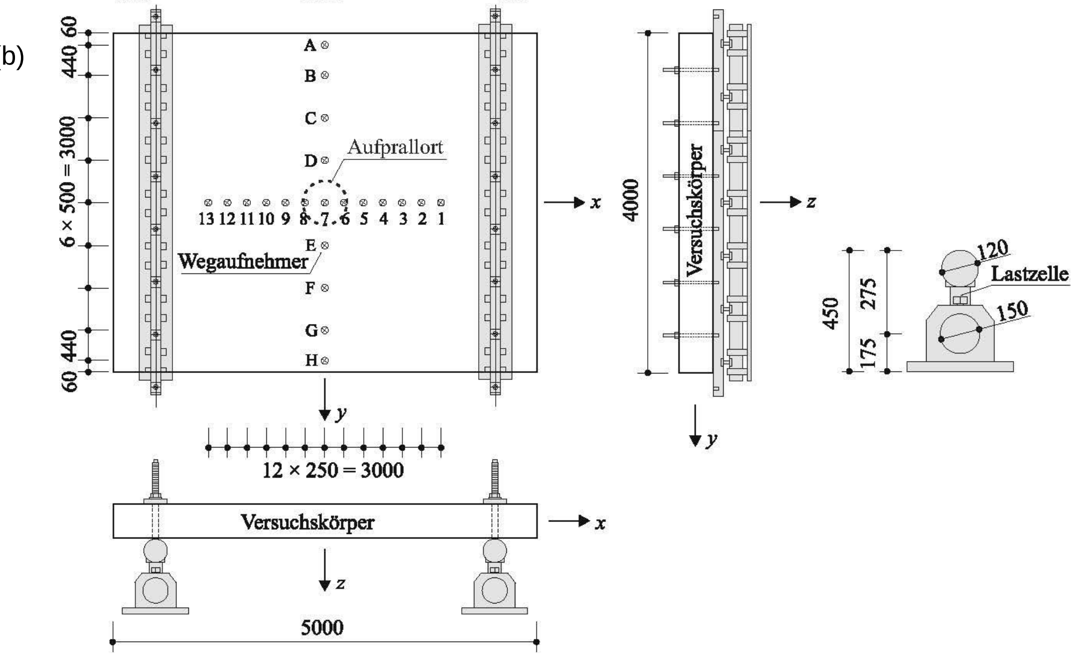


Abb. 6.22 *Aufprallversuche auf Stahlbetonplatten mit Eindeckung ([Yamaguchi et al. 2011], ergänzt). Abmessungen in mm:*
(a) Versuchskörper mit Bewehrung;
(b) Versuchseinrichtung.

Alle Versuchskörper weisen die gleichen Abmessungen (4000 mm × 5000 mm × 400 mm) und eine identische Biegebewehrung mit einem Durchmesser von Ø = 19 mm

(s = 125 mm) in allen vier Lagen auf. Der Biegebewehrungsgehalt bezogen auf die statische Höhe d_x = 340 mm der unteren Bewehrung in x-Richtung beträgt ρ_x = 0.67 %. Der Versuchskörper weist eine Querkraftbewehrung mit einem Durchmesser von Ø = 13 mm auf. Die wichtigsten Werkstoffparameter für Beton und Betonstahl (Mittelwerte) sind in Abb. 6.22 aufgeführt.

Die Versuchskörper sind auf zwei gegenüberliegenden Seiten der Platte gelenkig gelagert; die anderen zwei Seiten weisen freie Ränder auf. Die Spannweite beträgt l = 4000 mm.

Das Versuchsprogramm sah sowohl wiederholte als auch einmalige Stossversuche vor. Dieses Kapitel betrachtet die vier einzelnen Aufprallversuche auf die vier Stahlbetonplatten mit granularer Kies- respektive Sandeindeckung. Der Fallkörper weist einen Durchmesser von 1.0 m, eine kugelförmige Unterseite mit einem Radius von r = 80 cm sowie eine Masse von m = 5 t auf. Die Fallhöhen betrugen jeweils H = 10 m und 12.5 m ($T_0 = 0.5mv_0^2$ = 490 kJ und 613 kJ). Alle Stahlbetonplatten mit Eindeckung wurden zentrisch, (x,y) = (0,0), belastet.

Die Versuchseinrichtung ist in Abb. 6.22 (b) dargestellt. Eine Klemmvorrichtung für die Lagerung wurde verwendet, um ein Abheben der Platte während des Stossvorgangs zu verhindern. Diese Lagerungsart ermöglicht eine freie Rotation der Platte, während horizontale Verschiebungen verhindert werden. Die insgesamt 14 Lastzellen (Kapazität: 294 kN, Messfrequenz: 2.4 kHz) zur Messung der Reaktionskräfte wurden in die Lagerung integriert. Beschleunigungssensoren (Kapazität: ±200 g, Messfrequenz: 7 kHz) wurden auf dem aufprallenden Körper angebracht, um dessen Beschleunigung während des Stosses zu messen und daraus die Aufprallkraft zu berechnen. Anhand von Wegaufnehmern (LVDTs) wurde die Durchbiegung der Stahlbetonplatte an der Unterseite gemessen.

In Abb. 6.23 und Abb.6.24 sind die Versuchsresultate dargestellt. Die maximale Eindringtiefe $d_{\max}$ des aufprallenden Körpers ist bei Verwendung einer Sandeindeckung etwas geringer als bei Verwendung einer Kieseindeckung bei im Übrigen gleichen Parametern. Die prozentuale Abweichung der bleibenden Durchbiegungen W_{res} am Aufprallort im Hinblick auf die Verwendung einer Sand- respektive Kieseindeckung nimmt mit zunehmender Stossintensität ab. Bei einer Fallhöhe von H = 10 m beträgt die prozentuale Abweichung der bleibenden Durchbiegungen W_{res} zwischen Sand und Kies ca. 102 %, während sich bei einer Fallhöhe von H = 12.5 m lediglich eine Abweichung von ca. 28 % ergibt.

Für die Nachrechnung wurden die effektive Betondruckfestigkeit f_c nach Gleichung (2.5), die theoretische Bruchstauchung ε_{cu} nach Gleichung (2.7) und die Zugfestigkeit f_{ct} nach Gleichung (2.9) verwendet.

Die positiven Biegewiderstände ergeben sich in x- und y-Richtung unter Annahme der mittleren statischen Höhen von d = 350 mm und d' = 51 mm der Zug- und Druckbewehrung ohne Berücksichtigung des Einflusses der Dehngeschwindigkeit zu $m_u \approx m_{xu} \approx m_{yu} \approx$ 298.4 kNm/m. Dehngeschwindigkeiten wurden in der vorliegenden Versuchsreihe nicht gemessen. Nachfolgende Berechnungen basieren auf der Annahme einer Vernachlässigung der Dehnrateneffekte. Eine Vergleichsrechnung verwendet einen konstanten, um 20 % erhöhten „dynamischen“ Wert für die Fliessfestigkeit f_{sy} von Betonstahl. Diese Festigkeitserhöhung entspricht etwa einer Festigkeitserhöhung bei einer konstanten Dehngeschwindigkeitsbeanspruchung von $\dot{\varepsilon}$ = 0.016 s^{-1} (Kapitel 2.1, Gleichung (2.2)). Der Einfluss einer Erhöhung der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} von Beton um einen Faktor von 20 % auf die bleibende Durchbiegung ist vernachlässigbar. Die positiven Biegewiderstände betragen damit in x- und y-Richtung $m_{u,\,fsy+20\,\%} \approx m_{xu,\,fsy+20\,\%} \approx m_{yu,\,fsy+20\,\%} \approx$ 352.7 kNm/m.

Das spezifische Gewicht der Kieseindeckung wird mit γ_K = 20 kN/m^3, dasjenige von Beton mit γ_B = 25 kN/m^3 in Rechnung gestellt. Daraus ergibt sich das Eigengewicht der Stahlbetonplatte zu q_B = 25 kN/m^3·0.4 m = 10 kN/m^2 und dasjenige der Kieseindeckung zu q_K = 20 kN/m^3·0.5 m = 10 kN/m^2.

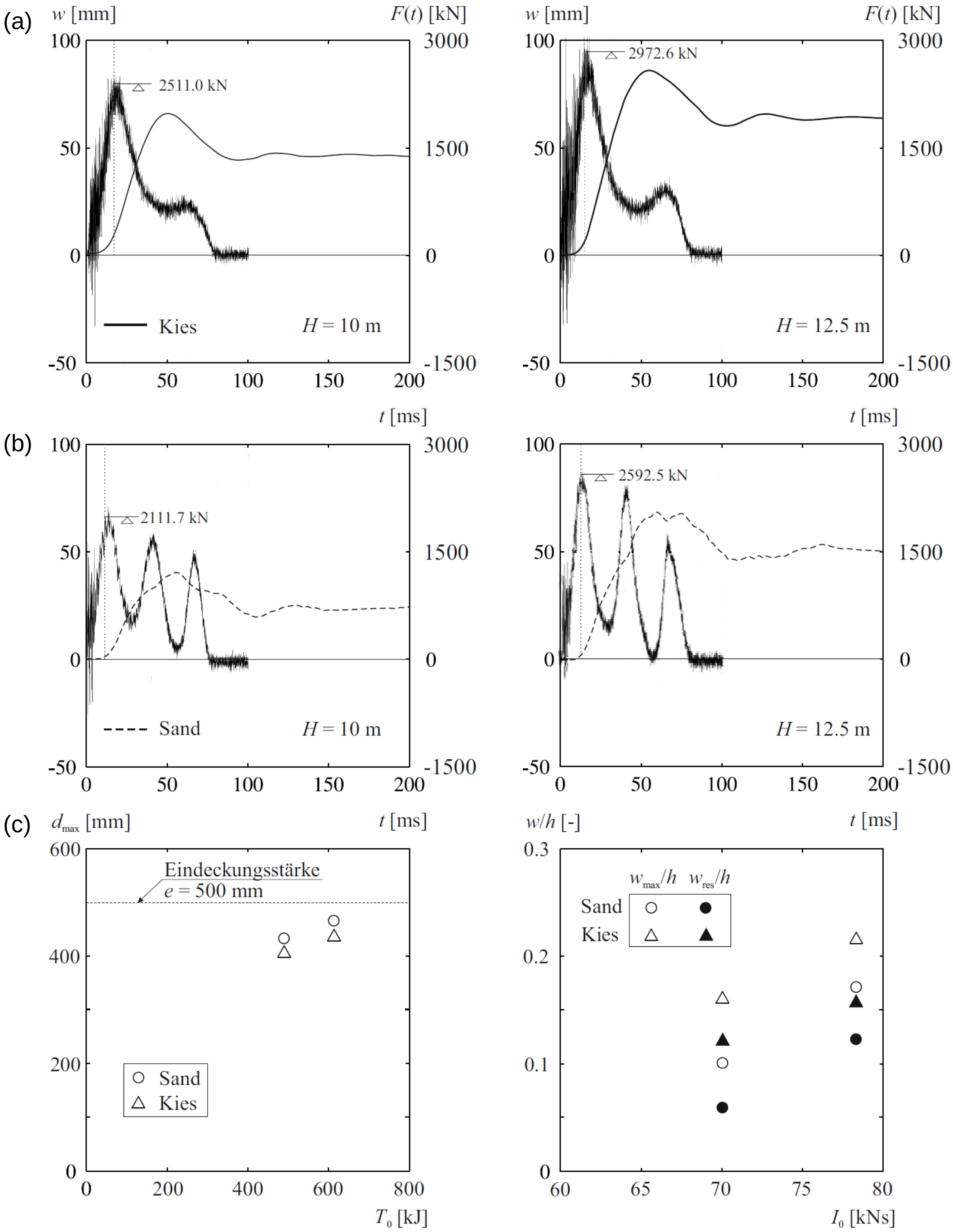


Abb. 6.23 *Versuchsresultate [Yamaguchi et al. 2011]:*

(a) Zeitverläufe der Aufprallkraft und der Plattendurchbiegung an der Messstelle D;

(b) maximale Eindringtiefe dmax als Funktion der Aufprallenergie T_0;

(c) Verhältnis der Plattendurchbiegung zur Plattendicke w/h in Abhängigkeit vom Impuls $I_0 = m \cdot v_0$.

Da in allen vier Lagen eine identische Bewehrung vorhanden ist, bildet sich aus theoretischer Sicht ein Fächermechanismus aus. Die statische Traglast für den in Abb. 6.25 (a) dargestellten Mechanismus ergibt sich aus der Gleichsetzung der Dissipationsleistung und der Leistung der äusseren Kräfte ($\dot{D} = L_a$). Die verteilte Belastung aus dem Eigengewicht der Stahlbetonplatte q_B und der Kieseindeckung q_K wirkt gleichzeitig mit der Einzellast Q (statische Traglast). Der gewählte Mechanismus ergibt sich aus der monotonen Laststeigerung der Einzellast respektive dem Aufprallstoss im Traglastzustand, da die aus der

Einzellast Q resultierende Leistung um ein Vielfaches grösser ist als diejenige Leistung, die aus der gleichmässig verteilten Belastung q_B und q_K resultiert.

Die Dissipationsleistung in den Fliessgelenklinien nach Gleichung (4.35) beträgt:

$$\dot{D} = m_u \dot{W}(\pi + 4) \tag{6.35}$$

Gleichsetzen der Dissipationsleistung mit der Leistung der äusseren Kräfte

$$L_a = \dot{W}\left(Q_k + \frac{1}{3} l \cdot a \cdot q_B + \frac{1}{3} l \cdot a \cdot q_K^*\right) = \dot{W}(Q + 94.2\,kN) \tag{6.36}$$

ergibt einen oberen Grenzwert der statischen Traglast Q_k = 2'037 kN, wobei der Biegewiderstand m_u = 298.4 kNm/m und $l = a$ = 4.0 m (Abb.6.24 (a)) betragen. Die Kieseindeckung wirkt auf einer Fläche von 3.5 m × 3.5 m und wurde zentrisch platziert; q_K^* = 10 kN/m²·(3.5 m / 4.0 m)² = 7.656 kN/m² entspricht der zur gleichmässig verteilten Belastung q_k äquivalenten Belastung der Eindeckung bezogen auf eine Fläche von 4.0 × 4.0 m.

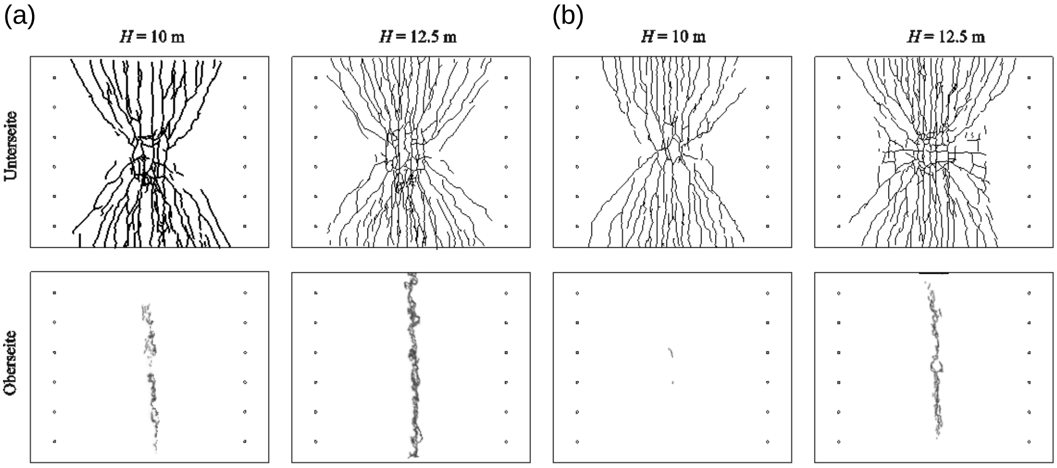


Abb.6.24 *Rissbilder an der Plattenunter- und oberseite [Yamaguchi et al. 2011], Fallhöhen H = 10 m und* H *= 12.5 m:*
(a) Kieseindeckung
(b) Sandeindeckung.

Die Modellbildung der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss basiert auf einem starr-plastischen Verhalten der Platte. Der Stoss selbst wird als plastisch angenommen, d. h., der Aufprallkörper bleibt nach dem Stoss in der Eindeckung der Stahlbetonplatte „haften".

Das Geschwindigkeitsfeld eines Dreiecksegmentes des Mechanismus (Abb. 6.25, Schnitt I-I) beträgt

$$\dot{w}_{\mathrm{I}} = \dot{W}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \qquad 0 \le x \le l/2 \quad \text{und} \quad 0 \le y \le x$$

Der Impulserhaltungssatz nach Gleichung (6.3) liefert für $l = a$:

$$m\dot{W} + 8\mu \int_{x=0}^{l/2} \int_{y=0}^{x} \dot{W}\left(1-\frac{2x}{l}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = m\dot{W} + \frac{1}{3} l^2 \dot{W}\left(q_B + q_K^*\right) = mv_0 \tag{6.37}$$

wobei die Massen des Betons und der Kieseindeckung $\mu_B = 1$ kNs²/m³ respektive $\mu_K^* = 0.7656$ kNs²/m³ betragen.

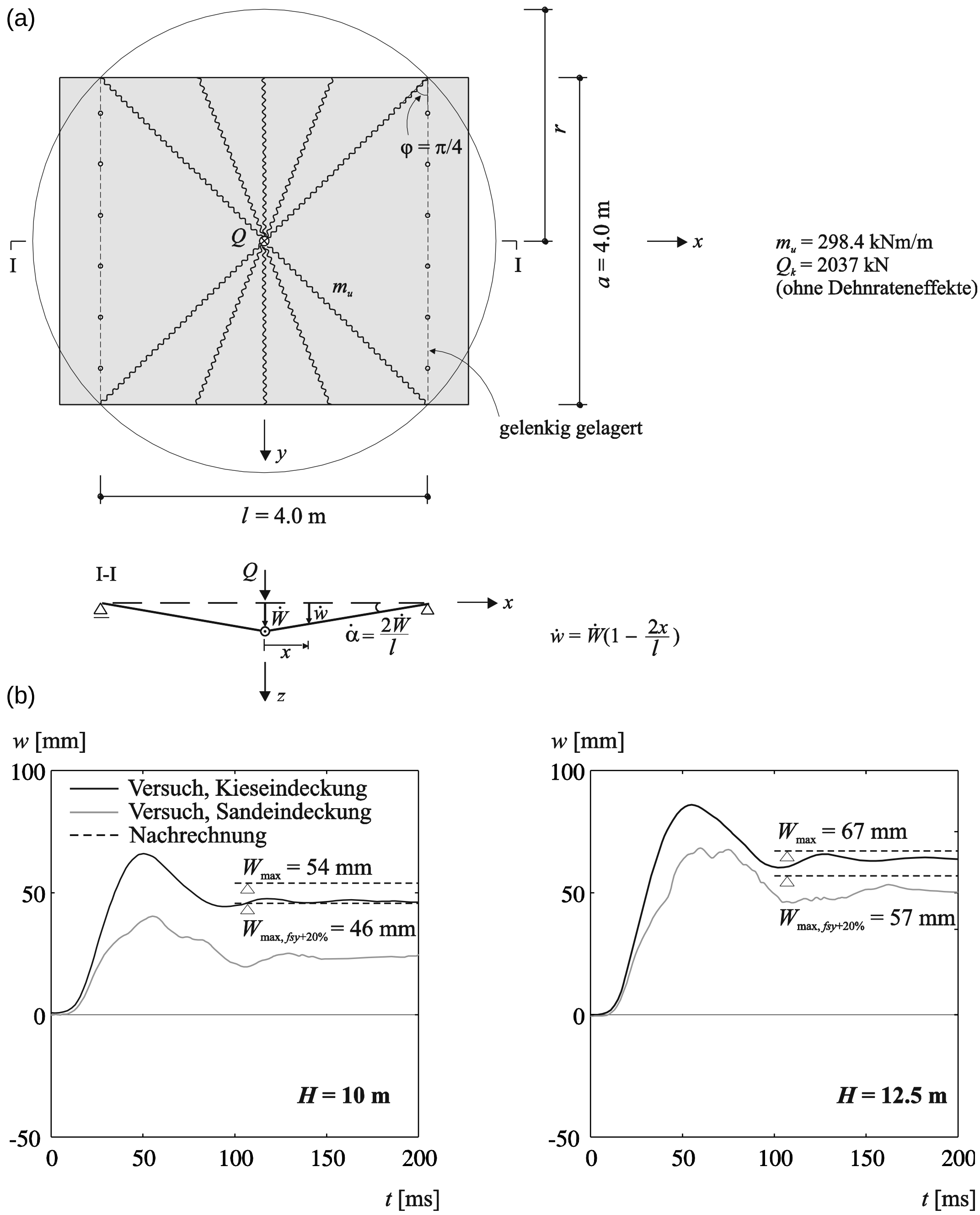


Abb. 6.25 *Versuchsnachrechnung:*
(a) Fliessgelenklinienmechanismus;
(b) Vergleich der maximalen bleibenden Durchbiegung (plastisch) zwischen Versuch [Yamaguchi et al. 2011] und Nachrechnung die Fallhöhen H = 10 m und H = 12.5 m. Bleibende Durchbiegung aus Versuch: $W_{res,Versuch,\ Kies,H10} \approx 47$ mm und $W_{res,Versuch,\ Kies,H12.5} \approx 64$ mm.

Durch Umformung von Gleichung (6.37) erhält man die Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{W} = \dot{W}(t=0) = \frac{v_0}{1+\frac{1}{3}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)l^2/m} = \frac{v_0}{1+\frac{1}{3}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)\cdot 4\,\mathrm{m}\cdot 4\,\mathrm{m}/m} \qquad (6.38)$$

des Aufprallkörpers und der Stahlbetonplatte mit Eindeckung am Aufprallort, wobei die Masse des aufprallenden Körpers m = 5'000 kg = 5 kNs^2/m beträgt.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen nach Gleichung (6.4) liefert

$$(\pi+4)m_u\dot{W} = -m\ddot{W}\dot{W} - \frac{1}{6}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)\ddot{W}\dot{W}l^2 \qquad (6.39)$$

Durch Umformung von Gleichung (6.39) nach $\ddot{W}$ und zweifache zeitliche Integration ergibt mit den Anfangsbedingungen $W(t=0)=0$ und $\dot{W}(t=0) = v_0/(1+\frac{1}{3}(\mu_B+\mu_K^*)l^2/m)$ nach Gleichung (6.38) die Durchbiegung am Aufprallort als Funktion der Zeit t:

$$W(t) = -\frac{(\pi+4)m_u}{m+\frac{1}{6}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)l^2}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{1+\frac{1}{3}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)l^2/m}\cdot t \qquad (6.40)$$

Der Zeitpunkt $t = T$ am Ende der Bewegung ergibt sich aus der Bedingung $\dot{W}(t = T) = 0$:

$$T = \frac{v_0\left(m+\frac{1}{6}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)l^2\right)}{(\pi+4)m_u\left(1+\frac{1}{3}\left(\mu_B+\mu_K^*\right)l^2/m\right)} \qquad (6.41)$$

Die maximale plastische (bleibende) Durchbiegung zum Zeitpunkt $t = T$ beträgt für eine Fallhöhe von H = 12.5 m (v_0 = 15.66 m/s) resp. H = 10 m (v_0 = 14.01 m/s) ohne Berücksichtigung der Dehnrateneffekte

$$W_{\max} = W(t=T) = 67\text{ mm} \quad \text{respektive} \quad 54\text{ mm} \qquad (6.42)$$

und

$$W_{\max,\,fsy+20\%} = W(t=T) = 57\,\text{mm} \quad \text{respektive} \quad 46\,\text{mm} \qquad (6.43)$$

bei Annahme einer Erhöhung der Fliessfestigkeit des Betonstahls um 20 %.

In Abb. 6.25 (b) ist der Vergleich der berechneten Werte mit den Versuchsresultaten bei Verwendung einer Kieseindeckung und denjenigen bei Verwendung einer Sandeindeckung dargestellt. Viskose Effekte reduzieren die bleibenden Verschiebungen der Stahlbetonplatte unter Stossbeanspruchung. Mit zunehmender Stossintensität zeigt sich bei Verwendung einer Sandeindeckung ebenfalls der impulsartige Charakter des Stosses und somit eine verbesserte Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie.

Als Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verformungen wird die Rotationsduktilität verwendet (Kapitel 6.3.3). Der plastische Verformungsbereich beim Aufprallort wird vereinfachend zu einem Gelenkwinkel (Gelenkrotation) zusammengefasst. Der Verformungsbedarf wird unabhängig vom Verformungsvermögen betrachtet. Der plastische Verformungsbedarf ist sowohl vom betrachteten System als auch von der Belastungskonfiguration abhängig. Für den Mechanismus in Abb. 6.25 (a) ergibt sich mit Gleichung (6.40) bei einer Fallhöhe von H = 12.5 m ein Neigungswinkel (Winkel zwischen unverformter und verformter Plattenachse) von $\alpha = \theta_{pl}/2 = W_{\max}/l = (67/2000)\cdot 10^3 = 33.5$ mrad bei den beiden Auflagern. Somit beträgt der erforderliche Rotationswinkel $\theta_{pl,erf} = 2\alpha = 67$ mrad (Rotationsbedarf) respektive $\theta_{pl,erf} = 57$ mrad bei einer Erhöhung der Fliessfestigkeit um 20 %.

Das Verformungsvermögen wird für die Platte mit einer Einheitsbreite von b = 1000 mm betrachtet. Die Zugversteifung des Betons wird nach dem Zuggurtmodell ([Sigrist 1995], [Alvarez 1998]), Kapitel 2.3.2, berücksichtigt. Es wird angenommen, dass sich der Beton linear elastisch und die Bewehrung linear elastisch-ideal plastisch verhalten (Abb. 2.8 (b)).

Das Rotationsvermögen der Stahlbetonpatten wird durch die Stahldehnungen oder durch die Betonstauchungen begrenzt. Das Bruchkriterium wird für die beiden Versagensformen „Bruch des Betonstahls" und „Bruch der Biegedruckzone" formuliert. Wenn die maximale Stahldehnung im Riss $\varepsilon_{sr,\max}$ die Grenzdehnung ε_{su} erreicht, tritt der Bruch des Betonstahls ein. Das Bruchkriterium für den Bruch der Biegedruckzone lässt sich mit Gleichung (6.31) bestimmen. Der maximale Rissabstand s_{r0} beträgt nach Gleichung (2.14) $s_{r0} = Ø(1 - \rho)/4\rho = 247$ mm, wobei $\rho = a_s/(b\cdot h_{eff}) = 1.89$ % der geometrische Bewehrungsgehalt des Betonzugglieds und $h_{eff} = 2(h - d)$ die mitwirkende Breite der Betonzugzone bezeichnen. Die Schranken des theoretischen Rissabstandes betragen demnach 123.3 mm $\leq s_r \leq$ 246.5 mm, Gleichung (2.15). Für die nachfolgenden Berechnungen wird der Rissabstand mit s_r = 125 mm (Teilung der Querbewehrung) angenommen. Die Betrachtung des Risselementes bei Fliessbeginn mit der Fliessspannung $\sigma_{sr} = f_{sy} = 393$ N/mm^2 am Riss ergibt eine Spannungsänderung in der Bewehrung von $\Delta\sigma_s = 2\tau_{b0}\cdot s_r/Ø = 77.7$ N/mm^2 und somit die Stahlspannung $\sigma_{sm} = 315$ N/mm^2. Die mittlere Stahldehnung nach Gleichung (2.16) beträgt $\varepsilon_{smy} = 1.719$ ‰. Das Fliessmoment beträgt $m_y = a_s\cdot f_{sy}\cdot d_v = 282.1$ kNm/m. Der Hebelarm der inneren Kräfte beträgt dabei

$$d_v = d - 0.85z_c/2 = 340 \text{ mm} - 0.85\cdot 55.3 \text{ mm} / 2 = 316.5 \text{ mm}$$

(mit Dehnungsbeschränkung nach der Norm [SIA 262 2013]; Annahme: $\varepsilon_{cu} = -3.5$ ‰ und $f_c = f_{cc}$).

Der maximale Biegewiderstand beim Erreichen der Zugfestigkeit nach der Norm [SIA 262 2013] mit der Dehnungsbeschränkung $\varepsilon_{cu} = -3.5$ ‰ und der Berücksichtigung der Druckbewehrung beträgt $m_{us} = 421.5$ kNm/m. Zur Ermittlung der Druckzonenhöhe z_c wird ein Völligkeitsbeiwert von 0.85 gemäss der Norm [SIA 262 2013] verwendet.

Die Betrachtung des Risselementes beim Erreichen der Zugfestigkeit zeigt, dass das gesamte Element am Fliessen ist. Die mittlere Dehnung des Zuggurts beim Bruch beträgt $\varepsilon'_{smu} = 83.25$ ‰. Die Zugfestigkeit des Betonstahls wird nicht erreicht. Unter Annahme eines Bruchkriteriums für den Beton mit $\varepsilon_{cu} = -5$ ‰ (experimentelle Erfahrung, [Jäger 2009]) liefert die Kontrolle der Betonrandstauchung

$$\varepsilon_c = \varepsilon'_{smu}\, z_c / (d - z_c) = 83.25‰\cdot 56.2 \text{ mm} / (340 \text{ mm} - 56.2 \text{ mm}) = 16.5‰ > 5‰$$

Somit tritt beim Erreichen des Biegewiderstandes ein Betonbruch im Druckgurt auf, während die Bewehrung im Zuggurt am Fliessen ist. Die Risse in der Plattenoberseite in Abb. 6.23 weisen auf einen Betonbruch im Druckgurt hin, so dass die Zugfestigkeit des Betonstahls nicht erreicht werden kann. Daraus ergibt sich eine mittlere Dehnung des Zuggurts beim Erreichen des Biegewiderstandes von:

$$\varepsilon_{smu} = \varepsilon_{cu}(d - z_c) / z_c = 5‰ \,(340 \text{ mm} - 56.2 \text{ mm}) / 56.2 \text{ mm} = 25.27‰$$

Die Stahlspannung am Riss beträgt σ_{sr} = 460.6 N/mm². Der Biegewiderstand ergibt sich dadurch zu $m_{uc} = a_s \cdot \sigma_{sr} \cdot d_v$ = 330 N/mm² ($d_v = d - 0.85 z_c/2$ = 316.1 mm).

In Abb. 6.26 ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung im Rissquerschnitt dargestellt. Die Bruchdehnung des Betonstahls ε_{su} ergibt sich zu $\varepsilon_{su} = (f_{su} - f_{sy}) / E_{sh} + \varepsilon_{sy}$ = 92.68 ‰, wobei für den Verfestigungsmodul $E_{sh} \approx 1\% \cdot E_s$ angenommen wird.

Der plastische Rotationswinkel (Verformungsvermögen) berechnet sich nach Gleichung (6.32) zu $\theta_{pl} = l_{pl}\,(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{smy}) / (d - z_c)$ = 3.594 (25.27 ‰ – 1.719 ‰) = 84.63 mrad unter der Annahme der Länge des plastischen Gelenkes von $l_{pl} \approx 3d$ = 1020 mm.

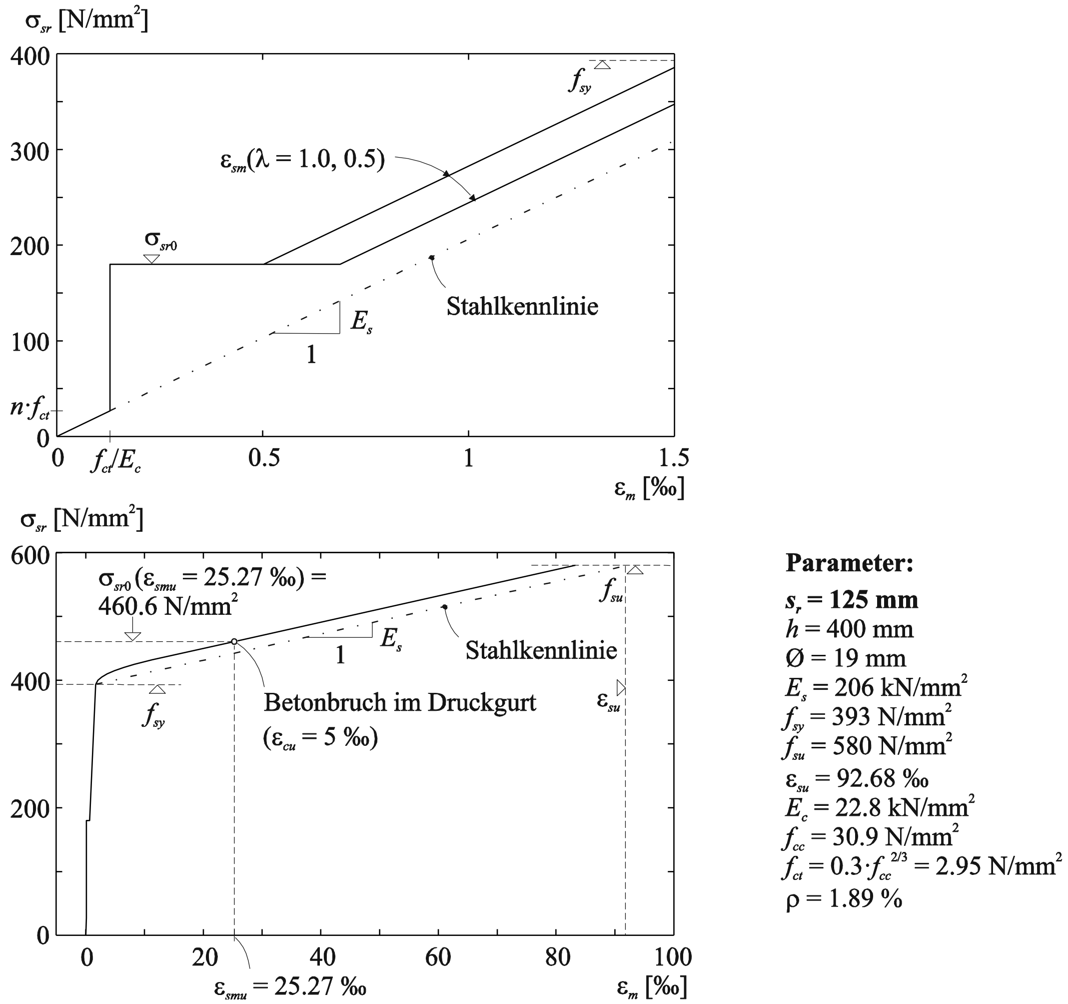


Abb. 6.26 *Spannungs-Dehnungsbeziehung im Rissquerschnitt, ohne Dehnrateneffekte: Maximale Stahlspannungen als Funktion der mittleren Dehnungen nach dem Zuggurtmodell.*

Das Verformungsvermögen θ_{pl} der Stahlbetonplatte ist daher grösser als der Rotationsbedarf $\theta_{pl,erf}$ der Platte für einen Aufprallkörper mit einer Masse von m = 5000 kg und einer Fallhöhe von H = 12.5 m: θ_{pl} = 84.63 mrad > $\theta_{pl,erf} = 2\alpha$ = 67 mrad (ohne Dehnrateneffekte).

Die Berücksichtigung der Dehnrateneffekte führt zu einem verbesserten (erhöhten) Verformungsvermögen. Im Folgenden werden die Fliessfestigkeit f_{sy} von Betonstahl und die Zylinderdruck- und Zugfestigkeit f_{cc} und f_{ct} von Beton um einen konstanten Wert von 20 %

und die Zugfestigkeit f_{su} des Betonstahls um 5 % erhöht. Dadurch liefert Gleichung (6.32) einen plastischen Rotationswinkel von

$$\theta_{pl} = l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{smy}) / (d - z_c) = 3.557\ (26.93‰ - 2.08‰) = 88.4 \text{ mrad}$$

d. h. eine Erhöhung um ca. 5 % gegenüber einer Berechnung unter Vernachlässigung der Dehnrateneffekte. Der Nachweis des Rotationsvermögens liefert $\theta_{pl} = 88.4$ mrad > $\theta_{pl,erf} = 2\alpha = 57$ mrad.

Aufgrund der Annahme kleiner Verformungen erhält man für die maximale Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort durch Rückrechnung mithilfe des plastischen Rotationswinkels (Starrkörperrotation) $W_{\max} = 84.63$ mm respektive $W_{\max} = 88.4$ mm bei Erhöhung der Festigkeiten von Beton und Betonstahl um 20 % (Fliessfestigkeit von Stahl, Zylinderdruck- und Zugfestigkeit von Beton) respektive 5 % (Zugfestigkeit von Stahl). Aus Gleichung (6.40) folgt damit bei gegebener Masse des aufprallenden Körpers von $m = 5$ t die maximal zulässige Aufprallgeschwindigkeit v_0 respektive die maximal zulässige Fallhöhe $H = v_0^2/(2g) = 16.9$ m respektive $H = 19.4$ m bei entsprechender Erhöhung der Festigkeiten.

6.3.5 Vergleich mit Aufprallversuch von CERI, Muroran IT, Japan, und ETH Zürich

In diesem Kapitel wird das dynamische Tragverhalten der Stahlbetonplatte mit Kieseindeckung unter Aufprallstoss des in [Röthlin et al. 2015] detailliert beschriebenen Versuches dargestellt. Die Stossversuche wurden an einer nachgebauten Galerie im Massstab 1:1 in Japan durchgeführt. In Abb. 6.27 ist die Stahlbetonplatte (Galeriedecke) mit den Abmessungen und der Bewehrung dargestellt. Die Aufprallversuche wurden mit granularer Eindeckung sowohl aus Sand als auch aus Kies mit einer konstanten Stärke von $e = 90$ cm durchgeführt. Die Korngrössenverteilung der Kieseindeckung ist in Abb. 6.1 (b) dargestellt. Hier wird nur der letzte Stossversuch mit Kieseindeckung betrachtet.

Die Stahlbetonplatte ist eine orthotrope Platte mit einer oberen und unteren Bewehrung mit Durchmessern von Ø = 29 mm (3. Lage, $s = 250$ mm) respektive Ø = 25 mm (2. Lage, $s = 125$ mm) in x-Richtung sowie einer oberen und unteren Bewehrung mit Durchmessern von Ø = 19 mm (4. Lage, $s = 250$ mm) respektive Ø = 22 mm (1. Lage, $s = 250$ mm) in y-Richtung.

Tab. 6.1 *Baustoffparameter Beton*

Druckfestigkeit f_{cc}	[MPa]	37.9
Elastizitätsmodul E_c	[GPa]	25.22

Tab. 6.2 *Baustoffparameter Betonstahl*

Nomineller Durchmesser	**[mm]**	**13**	**19**	**22**	**25**	**29**
Fliessgrenze f_{sy}	[MPa]	372.1	397.3	389.1	390.1	385.3
Zugfestigkeit f_{su}	[MPa]	543.6	605.8	555.3	563.0	563.2
Bruchdehnung ε_{su}	[‰]	369.9	293.6	284.4	295.8	359.5
Elastizitätsmodul E_s	[GPa]	190.7	186.1	188.5	188.4	187.4

Die Biegebewehrungsgehalte bezogen auf die statischen Höhen betragen ρ^u_x = 0.43 % und ρ^l_x = 0.68 %. Die Querkraftbewehrung besteht aus Bewehrungsstäben mit einem Durchmesser von Ø = 13 mm und einem Querkraftbewehrungsgehalt von ρ_z = 0.05 %. Die Tab. 6.1 und Tab. 6.2 enthalten die wichtigsten Werkstoffparameter für Beton und Betonstahl (Mittelwerte).Die Galeriedecke ist in Querrichtung auf einer Seite mit drei Stützen und auf der gegenüberliegenden Seite mit einer Wand monolithisch verbunden.

Die Galerie wurde durch mehrmalige Fallversuche an verschiedenen Aufprallorten belastet. Der Aufprallort für den hier nachgerechneten Fallversuch wird mit L4 bezeichnet. Das Fallgewicht mit einem Durchmesser von 1.25 m und einer kugelförmigen Unterseite mit einem Radius von r = 1.0 m weist eine Masse von m = 10 t auf. Die Fallhöhe beträgt H = 30 m ($T_0 = 0.5\ mv_0^2$ = 3000 kJ).

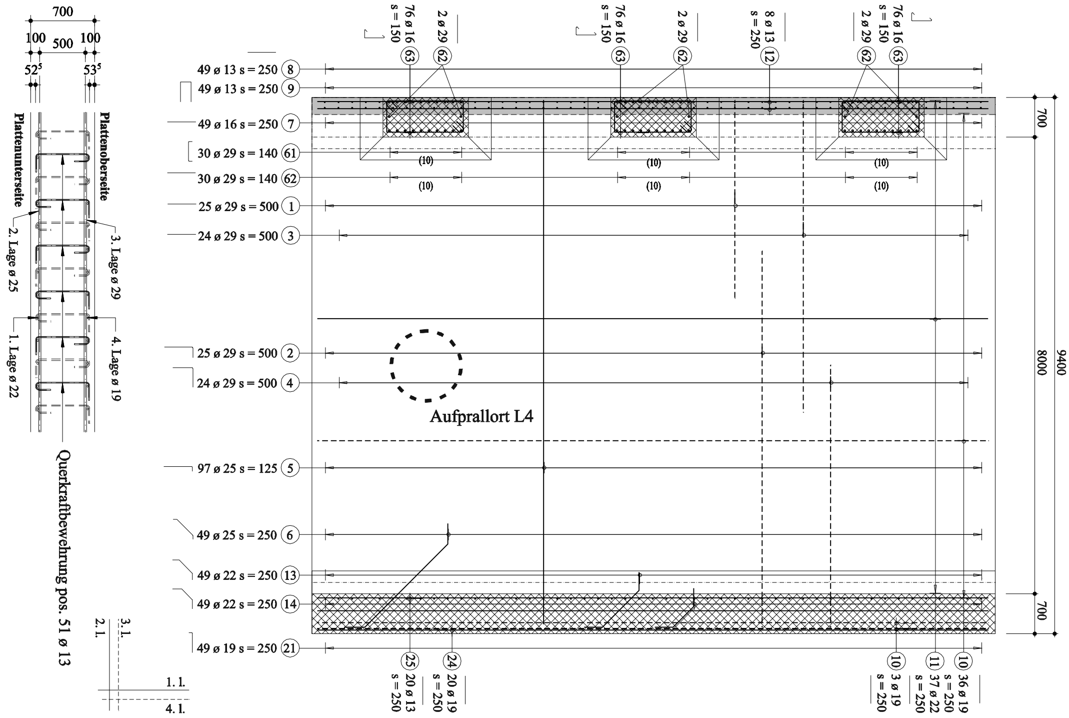


Abb. 6.27 *Aufprallversuche auf Stahlbetongalerie mit Eindeckung [Röthlin et al. 2015]: Versuchskörper Platte mit Bewehrung. Abmessungen in mm.*

Die Versuchsresultate sind in Abb. 6.28 dargestellt. Am gleichen Aufprallort L4 wurden zwei weitere Stossversuche vor dem hier beschriebenen Versuch durchgeführt. Diese beiden Stossversuche wurden mit einer Masse von m = 5 t und einer Fallhöhe von H = 5 m (bleibende Durchbiegung der Platte im Versuch w_{res} = 1.2 mm) unter Verwendung einer Kieseindeckung respektive mit einer Masse von m = 10 t und einer Fallhöhe von H = 30 m (bleibende Durchbiegung der Platte im Versuch w_{res} = 0.5 mm) unter Verwendung eines dreischichtigen Systems namens „three-layer absorbing system“ (TLAS) durchgeführt. In der Nachrechnung wurde die geringfügige Schädigung des Betons infolge dieser beiden Stossversuche nicht berücksichtigt; die Bewehrung blieb im elastischen Bereich und die Verformungen waren vernachlässigbar klein.

Für die Nachrechnung wurden die effektive Betondruckfestigkeit f_c nach Gleichung (2.5), die theoretische Bruchstauchung ε_{cu} nach Gleichung (2.7) und die Zugfestigkeit f_{ct} nach Gleichung (2.9) verwendet.

Die positiven und negativen Biegewiderstände ergeben sich in x- und y-Richtung ohne Berücksichtigung des Einflusses der Dehngeschwindigkeit zu m_{xu} = 897.4 kNm/m, m_{yu} = 423.3 kNm/m und m'_{xu} = 634.8 kNm/m, m'_{yu} = 308.3 kNm/m. Nachfolgende Berechnungen basieren auf der Annahme einer Vernachlässigung der Dehnrateneffekte. Eine Vergleichsrechnung verwendet einen konstanten, um 20 % erhöhten „dynamischen“ Wert für die Fliessfestigkeit f_{sy} von Betonstahl. Diese Festigkeitserhöhung entspricht etwa einer Festigkeitserhöhung bei einer konstanten Dehngeschwindigkeitsbeanspruchung von $\dot{\varepsilon}$ = 0.016 s^{-1} (Kapitel 2.1, Gleichung (2.2)). Der Einfluss einer um 20 % erhöhten Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} von Beton auf die bleibende Durchbiegung ist vernachlässigbar. Die positiven und negativen Biegewiderstände betragen damit in *x*- und *y*-Richtung $m_{xu,\,fsy+20\,\%}$ = 1'056.7 kNm/m, $m_{yu,\,fsy+20\,\%}$ = 498.5 kNm/m, $m'_{xu,\,fsy+20\,\%}$ = 740.2 kNm/m und $m'_{yu,\,fsy+20\,\%}$ = 359.4 kNm/m.

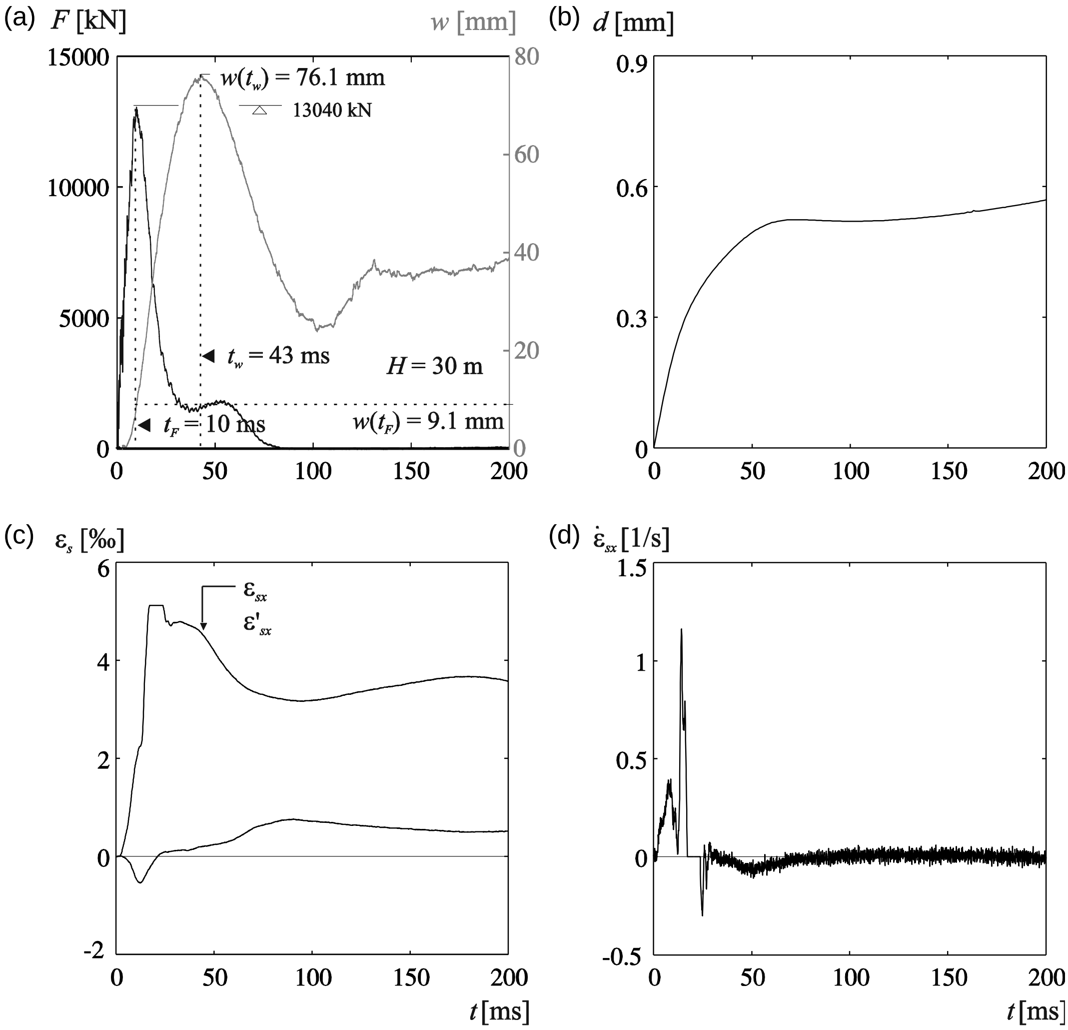


Abb. 6.28 *Versuchsresultate [Röthlin et al. 2015], Zeitverläufe am Aufprallort L4:*
(a) Aufprallkraft und Durchbiegung;
(b) Eindringtiefe (inkl. Plattendurchbiegung);
(c) Stahldehnungen ε_{sx} und ε'_{sx};
(d) Stahldehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{sx}$.

Das spezifische Gewicht der Kieseindeckung wird mit γ_K = 20 kN/m³, dasjenige von Beton mit γ_B = 25 kN/m³ berücksichtigt. Daraus ergibt sich das Eigengewicht der Stahlbetonplatte und Kieseindeckung zu $q = q_B + q_K$ = 25 kN/m³·0.7 m + 20 kN/m³·0.9 m = 35.5 kN/m².

Bei den Anschlüssen der Stützen respektive der Wand an die Deckenplatte wurden Verstärkungen mittels Vouten (dreiecksförmige Verstärkungen) konzipiert. Auf der Seite der Stützen gibt es zusätzlich einen in Längsrichtung durchgehenden Überzug. Für die Ermittlung der massgebenden Fliessmechanismuskonfiguration, welche sich effektiv ausbilden wird, ist eine plausible Annahme der Lagerung wesentlich. Obwohl die Stützen und die Wand monolithisch mit der Platte verbunden sind, ist aufgrund der Rahmenwirkung eine gewisse Verdrehbarkeit möglich.

In Kapitel 4.7 wurde der Plattenstreifen mit isotroper Bewehrung unter mittiger Einzellast thematisiert. Bei einer gelenkigen Lagerung (λ_i = 1, λ_e = 0) resultiert ein Fächer mit $\varphi = \pi/4$. Demgegenüber ergibt sich bei einer Einspannung (λ_i = 1, λ_e = 1) ein Winkel von $\varphi = \pi/2$, d. h. ein Fächer mit der Fläche eines Halbkreises. Die orthotrope Bewehrung beim vorliegenden Versuch führt zu einer Verzerrung der Plattenabmessungen und Biegemomente (vergleiche Affinitätstheorem in Kapitel 4.5.3).

In einem ersten Schritt wird die Lösung eines orthotropen Plattenstreifens mit frei drehbarer Lagerung unter zentrischer Einzellast, welche im Abstand *x* vom freien Plattenrand angreift, betrachtet. Die im Folgenden beschriebene analytische Lösung wurde nach [Sawczuk & Jaeger 1963] in Anlehnung an [Niepostyn 1958] ermittelt. Die Dissipationsleistung des in Abb. 6.30 (a) dargestellten Fächers OAP, der negativen ellipsenförmigen Fliessgelenklinie AP („Umfangfliessgelenklinie“) und der radialen Fliessgelenklinien OA und OP beträgt

$$\dot{D}_1 = \dot{W}\left(2m_{yu}\left[\frac{Az^*}{\left(\dfrac{a^*}{b^*}\right)^2 + z^{*2}} + B\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\frac{bz^*}{a}\right)\right] + \frac{\Lambda}{z^*}\right) \tag{6.44}$$

Die Konstanten a^*, b^*, A, B und z^* in Gleichung (6.44) ergeben sich für $\Lambda = \Lambda'$ zu

$$a^* = \frac{A}{\sqrt{1+\Lambda'_y}} \tag{6.45}$$

$$b^* = \frac{A}{\sqrt{\Lambda'_y\,\Lambda' + \Lambda}} \tag{6.46}$$

und somit $b^*/a^* = 1/\sqrt{\Lambda}$, wobei $\Lambda = m_{xu}/m_{yu}$, $\Lambda' = m'_{xu}/m'_{yu}$, $\Lambda'_y = |m'_{yu}|/m_{yu}$ und

$$A = \frac{\Lambda'_y\,(\Lambda - \Lambda')}{1+\Lambda'_y} = 0 \tag{6.47}$$

$$B = \sqrt{(1+\Lambda'_y)(\Lambda + \Lambda'_y\,\Lambda')} = \sqrt{\Lambda}\,(1+\Lambda'_y) \tag{6.48}$$

$$z^* = \cot\psi = \pm\sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda'_y}} \tag{6.49}$$

Mit dem Einsetzen der Gleichungen (6.45)-(6.49) in Gleichung (6.44) und durch Umformung erhält man die Dissipationsleistung

$$\dot{D}_1 = \dot{W}\left(2m_{yu}\sqrt{\Lambda}\left[(1+\Lambda'_y)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\frac{1}{\sqrt{\Lambda'_y}}\right) + \sqrt{\Lambda'_y}\right]\right) \tag{6.50}$$

Der Winkel ψ beträgt nach Gleichung (6.49) ohne Dehnrateneffekte ψ = 0.533 rad (= 30.56°). Bei Annahme einer erhöhten Fliessfestigkeit des Betonstahls um 20 % ergibt sich eine geringfügige Änderung des Winkels; der Winkel beträgt dann $\psi = 0.531$ rad (= 30.43°). Im Vergleich dazu resultiert für eine isotrope Stahlbetonplatte mit beidseitig gelenkiger Lagerung respektive voller Einspannung ein Winkel von $\psi = \pi/4$ rad (= 45°) respektive $\psi = 0$. Für die vorliegende Stahlbetonplatte liegt der Winkel ψ demnach zwischen $\psi = 0$ und $\psi = 0.533$ rad (= 30.56°). Aufgrund der Rahmenwirkung (Verdrehbarkeit) werden die nachfolgenden Berechnungen mit einem Winkel von $\psi = 0.533$ rad respektive mit entsprechender Berücksichtigung der Dehnrateneffekte mit $\psi = 0.531$ rad durchgeführt. Ein Vergleich mit dem Rissbild scheint die obigen Überlegungen zu bestätigen, Abb. 6.29.

Der tatsächliche Aufprallort liegt $x^* = 1.631$ m vom freien Plattenrand entfernt; der geplante Aufprallort war $x^* = 2.0$ m. Die Breite wird mit $b^* = 8.0$ m – lichter Abstand zwischen Stützen und Wand – festgelegt, vergleiche Abb. 6.30 (a).

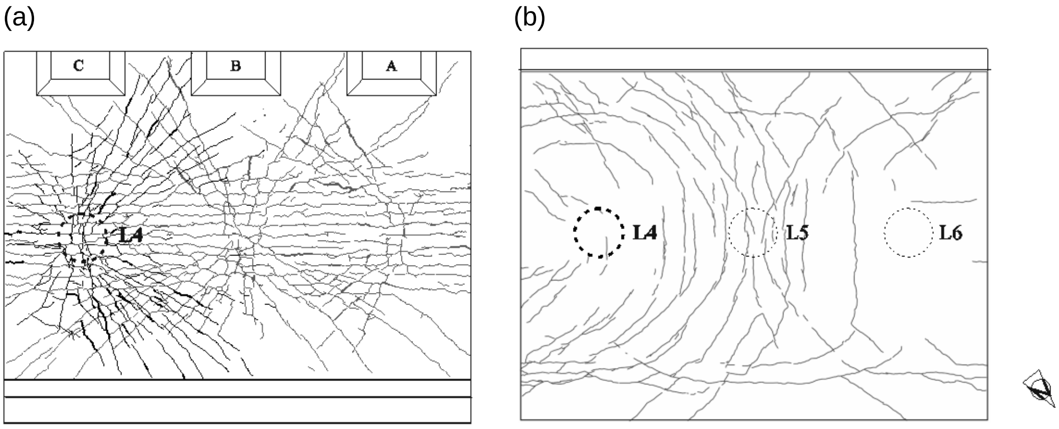


Abb. 6.29 *Versuchsresultate [Röthlin et al. 2015]: Rissbilder an der (a) Plattenunterseite; (b) Plattenoberseite.*

Die Dissipationsleistungen betragen

$$\dot{D}_2 = \dot{W}\left(m_{xu} x^* \frac{4}{b^*}\right) \tag{6.51}$$

in der Fliessgelenklinie OB und

$$\dot{D}_3 = \dot{W}\left(2m'_{xu}\left(\tan\psi \frac{b^*}{2} + x^*\right)\frac{2}{b^*}\right) \tag{6.52}$$

in den Fliessgelenklinien OA und OP.

Die totale Dissipationsleistung beträgt:

$$\dot{D} = \dot{D}_1 + \dot{D}_2 + \dot{D}_3 = \dot{W} \cdot 4917.5\,\text{kN} \tag{6.53}$$

Die Leistung der äusseren Kräfte beträgt

$$L_a = \dot{W}\left(Q + q\left(\frac{1}{2}b^* x^* + \frac{2}{3}\frac{b^*}{2}\tan\psi \frac{b^*}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_{OAP}\right)\right) = \dot{W}\left(Q + 35.5\,\text{kN/m}^2 \cdot 19.31\,\text{m}^2\right) \tag{6.54}$$

wobei A_{OAP} der Fläche des Ellipsensektors OAP entspricht:

$$A_{OAP} = 2\left[\frac{ab}{2}(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} - \frac{ab}{2}(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\psi=0.533}\right] = 28.2\,\text{m}^2 \quad (6.55)$$

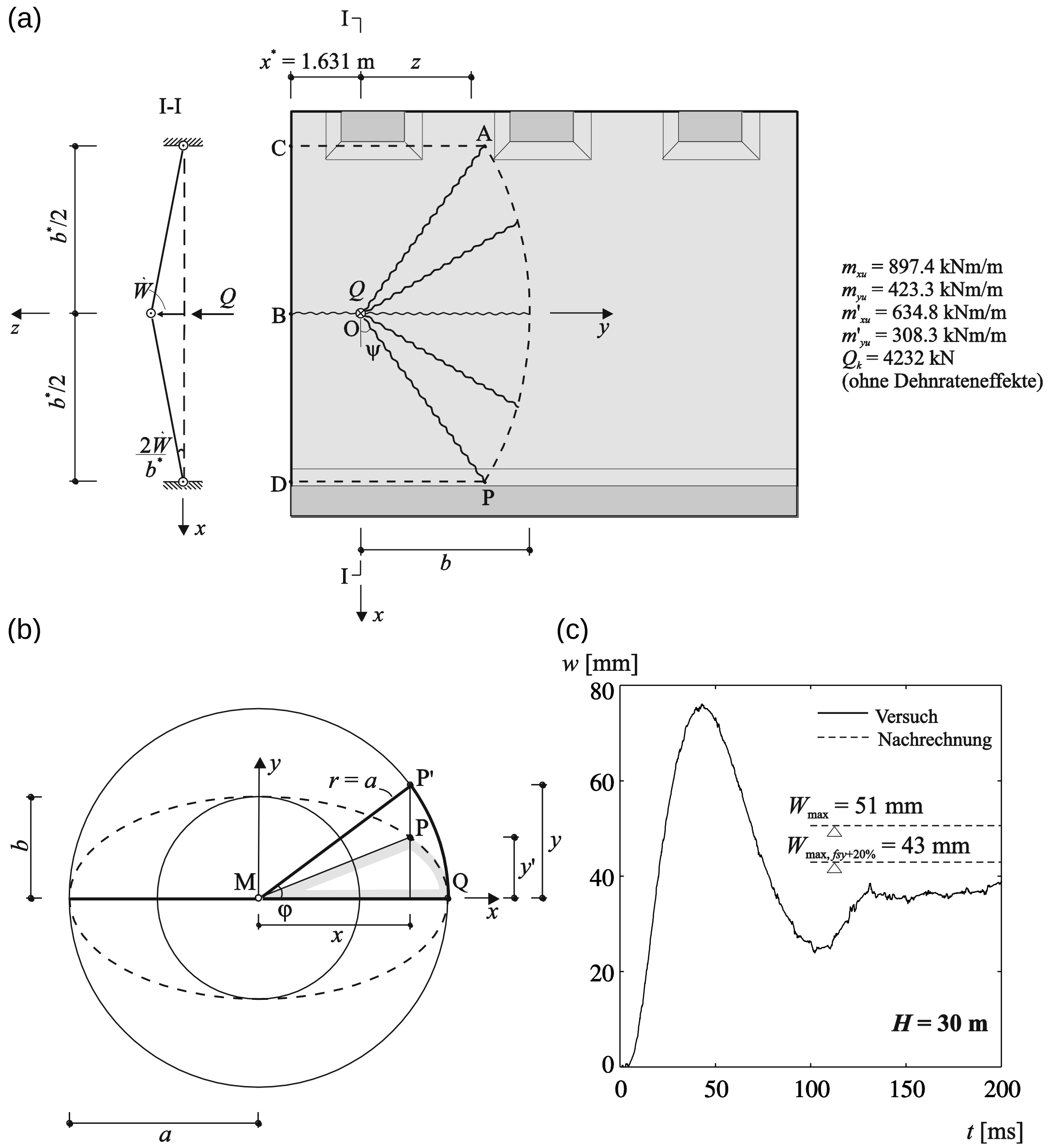


Abb. 6.30 *Versuchsnachrechnung:*
(a) gewählter Fliessgelenklinienmechanismus;
(b) Kreis- und Ellipsensektor;
(c) Vergleich von Versuch und Nachrechnung bezüglich der maximalen bleibenden Durchbiegung (plastisch); bleibende Durchbiegung aus Versuch: $W_{res,Versuch,H30} \approx 39$ mm.

Der Punkt P mit den Koordinaten $(x,y) = (b^*/2\ ,\ z = \tan\psi \cdot b^*/2) = (4.0\ \text{m}, 2.362\ \text{m})$ liegt auf der Ellipse, Abb. 6.30 (a, b). Anhand der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.56)$$

lassen sich die Variablen a und b der Ellipse:

$$a = 5.275\,\text{m}, \quad b = a\sqrt{\frac{m_{yu}}{m_{xu}}} = 3.62\,\text{m} \tag{6.57}$$

unter Beachtung des Affinitätstheorems bestimmen.

Gleichsetzen der totalen Dissipationsleistung (Gleichung (6.53)) und der Leistung der äusseren Kräfte (Gleichung (6.54)) liefert einen oberen Grenzwert der statischen Traglast von Q_k = 4'232 kN. Verglichen mit der maximalen Stosskraft $F_{\max}$ = 13'040 kN ist dieser Wert dreimal kleiner, was auf das Wirken von beträchtlichen Trägheitskräften schliessen lässt.

Für den Aufprallstoss wird wiederum ein starr-plastisches Verhalten des Stahlbetons angenommen. Der Stoss selbst wird als plastisch angenommen, d. h., der Aufprallkörper bleibt nach dem Stoss in der Eindeckung der Stahlbetonplatte stecken.

Der Impulserhaltungssatz nach Gleichung (6.3) liefert

$$m\dot{W} + \left(\frac{1}{2}b^*x^* + 2\frac{1}{3}\frac{b^*}{2}\tan\psi\frac{b^*}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_{\text{OAP}}\right)\cdot\mu\dot{W} = mv_0 \tag{6.58}$$

wobei die Massen des Betons und der Kieseindeckung μ = 3.55 kNs²/m³ betragen.

Durch Umformung von Gleichung (6.58) erhält man die Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{W} = \dot{W}(t=0) = \frac{v_0}{1 + \left(\frac{1}{2}b^*x^* + 2\frac{1}{3}\frac{b^*}{2}\tan\psi\frac{b^*}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_{\text{OAP}}\right)\mu/m} = 3.09\,\text{m/s} \tag{6.59}$$

des Aufprallkörpers und der Stahlbetonplatte mit Eindeckung am Aufprallort, wobei die Masse des Fallkörpers m = 10'000 kg = 10 kNs²/m beträgt und die Aufprallgeschwindigkeit des Fallkörpers $v_0 = \sqrt{2gH}$ mit der Fallhöhe H = 30 m aus einer Energiebilanzierung für den freien Fall resultiert.

Das Prinzip der virtuellen Leistungen nach Gleichung (6.4) liefert

$$\dot{W}\cdot 4917.5\,\text{kN} = -m\ddot{W}\dot{W} - \int_A \mu\ddot{w}\dot{w}\,\mathrm{d}A \tag{6.60}$$

wobei

$$\int_A \mu\ddot{w}\dot{w}\,\mathrm{d}A = \mu\int_{r=0}^{r^*=\sqrt{ab}}\ddot{W}\dot{W}\left(1-\frac{r}{\sqrt{ab}}\right)^2\gamma^* r\,\mathrm{d}r + 2\mu\int_{x=0}^{b^*/2}\int_{y=0}^{x}\ddot{W}\dot{W}\left(1-\frac{2x}{b^*}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mu x^*\int_{x=0}^{b^*/2}\ddot{W}\dot{W}\left(1-\frac{2x}{b^*}\right)^2\mathrm{d}x = 11.87\,\text{m}^2\cdot\mu\ddot{W}\dot{W} \tag{6.61}$$

für einen zum Ellipsensektor äquivalenten Kreissektor mit Radius $r^* = \sqrt{ab}$ = 4.371 m und Öffnungswinkel $\gamma^* = 2\,A_{\text{OAP}}/(ab)$ = 2.95 rad berechnet wurde.

Durch Umformung von Gleichung (6.60) nach $\ddot{W}$ und zweimalige Integration über die Zeit ergibt mit den Anfangsbedingungen $W(t = 0) = 0$ und $\dot{W}(t = 0) = 3.09$ m/s nach Gleichung (6.59) die Durchbiegung als Funktion der Zeit:

$$W(t) = \frac{4917.5\,\text{kN}}{m + 11.87\,\text{m}^2\mu} \cdot \frac{t^2}{2} + 3.09\,\text{m/s} \cdot t \tag{6.62}$$

Die maximale plastische (bleibende) Durchbiegung am Ende der Bewegung zum Zeitpunkt $t = T$ ergibt sich aus der Bedingung $\dot{W}(t = T) = 0$ und beträgt für eine Fallhöhe von $H = 30$ m ohne Berücksichtigung der Dehnrateneffekte:

$$W_{\max} = W(t = T) = 51\,\text{mm} \tag{6.63}$$

respektive

$$W_{\max,\,fsy+20\%} = W(t = T) = 43\,\text{mm} \tag{6.64}$$

bei Annahme einer Erhöhung der Fliessfestigkeit des Betonstahls um 20 %.

In Abb. 6.30 (c) ist der Vergleich der berechneten Werte mit dem gemessenen Zeitverlauf der Durchbiegung aus dem Versuch dargestellt. Die Annahme einer Erhöhung der Fliessfestigkeit des Betonstahls um 20 % zur Berücksichtigung viskoser Effekte führt zu einer Reduktion der bleibenden Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort von ca. 19 %.

Das Verformungsvermögen wird für die Platte mit einer Einheitsbreite $b = 1'000$ mm betrachtet. Die Zugversteifung des Betons zwischen den Rissen wird nach dem Zuggurtmodell, Kapitel 2.3.2, berücksichtigt.

Der maximale Rissabstand s_{r0} beträgt nach Gleichung (2.14) $s_{r0} = Ø(1 - \rho)/4\rho = 312$ mm (Durchmesser Ø = 25 mm), wobei $\rho = a_s/(b \cdot h_{eff}) = 1.96\,\%$ der geometrische Bewehrungsgehalt des Betonzugglieds und $h_{eff} = 2(h - d)$ die mitwirkende Breite der Betonzugzone bezeichnen. Die Schranken des theoretischen Rissabstandes betragen demnach 156 mm ≤ s_r ≤ 312 mm, Gleichung (2.15). Für die nachfolgenden Berechnungen wird der Rissabstand mit $s_r = 250$ mm (Teilung der Querbewehrung) angenommen. Die Betrachtung des Risselementes bei Fliessbeginn mit der Fliessspannung $\sigma_{sr} = f_{sy} = 390.1$ N/mm^2 am Riss ergibt eine Spannungsänderung in der Bewehrung von $\Delta\sigma_s = 2\tau_{b0} \cdot s_r/Ø$ = 135.4 N/mm^2 und somit die Stahlspannung $\sigma_{sm} = 254.7$ N/mm^2. Die mittlere Stahldehnung nach Gleichung (2.16) beträgt $\varepsilon_{smy} = 1.71\,‰$. Das Fliessmoment beträgt $m_y = a_s \cdot f_{sy} \cdot d_v$ = 866.3 kNm/m, wobei der Hebelarm der inneren Kräfte $d_v = d - 0.85 z_c/2$ = 600 mm – 0.85·81.1 mm / 2 = 565.5 mm beträgt (mit Dehnungsbeschränkung nach der Norm [SIA 262 2013]; Annahme: $\varepsilon_{cu} = -3.5\,‰$ und $f_c = f_{cc}$).

Der maximale Biegewiderstand beim Erreichen der Zugfestigkeit nach der Norm [SIA 262 2013] mit der Dehnungsbeschränkung $\varepsilon_{cu} = -3.5\,‰$ und der Berücksichtigung der Druckbewehrung beträgt $m_{us} = 1'277$ kNm/m. Zur Ermittlung der Druckzonenhöhe z_c wird ein Völligkeitsbeiwert von 0.85 gemäss der Norm [SIA 262 2013] verwendet.

Die Betrachtung des Risselementes beim Erreichen der Zugfestigkeit zeigt, dass das gesamte Element am Fliessen ist. Die mittlere Dehnung des Zuggurts beim Bruch beträgt $\varepsilon'_{smu} = 75.87\,‰$. Die Zugfestigkeit des Betonstahls wird nicht erreicht. Unter Annahme eines Bruchkriteriums für den Beton mit $\varepsilon_{cu} = -5\,‰$ (experimentelle Erfahrung) liefert die Kontrolle der Betonrandstauchung:

$$\varepsilon_c = \varepsilon'_{smu} \cdot z_c / (d - z_c) = 75.87‰ \cdot 83.6 \text{ mm} / (600 \text{ mm} - 83.6 \text{ mm}) = 12.3‰ > 5‰$$

Somit tritt beim Erreichen des Biegewiderstandes ein Betonbruch im Druckgurt auf, während die Bewehrung im Zuggurt am Fliessen ist. Daraus ergibt sich eine mittlere Dehnung des Zuggurts beim Erreichen des Biegewiderstandes von:

$$\varepsilon_{smu} = \varepsilon_{cu}(d - z_c)/z_c = 5‰ \cdot (600 \text{ mm} - 83.6 \text{ mm}) / 83.6 \text{ mm} = 30.9‰$$

Die Stahlspannung am Riss beträgt $\sigma_{sr} = 478$ N/mm². Der Biegewiderstand ergibt sich dadurch zu $m_{uc} = a_s \cdot \sigma_{sr} \cdot d_v = 1062$ N/mm² ($d_v = d - 0.85 z_c/2 = 564.4$ mm).

Der plastische Rotationswinkel (Verformungsvermögen) berechnet sich nach Gleichung (6.32) zu $\theta_{pl} = l_{pl}\,(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{smy}) / (d - z_c) = 3.49 \cdot (30.9‰ - 1.71‰) = 101.6$ mrad unter der Annahme der Länge des plastischen Gelenkes von $l_{pl} \approx 3d = 1'800$ mm.

Das Verformungsvermögen θ_{pl} der Stahlbetonplatte ist daher wesentlich grösser als der Rotationsbedarf $\theta_{pl,erf}$ für einen aufprallenden Körper mit einer Masse von $m = 10'000$ kg und einer Fallhöhe von $H = 30$ m: $\theta_{pl} = 101.6$ mrad $> \theta_{pl,erf} = 2\alpha = 2\,(51 / 8'000) \cdot 10^3 = 12.7$ mrad (ohne Dehnrateneffekte).

Die Berücksichtigung der Dehnrateneffekte führt zu einem verbesserten (erhöhten) Verformungsvermögen. Im Folgenden werden die Fliessfestigkeit f_{sy} von Betonstahl und die Zylinderdruck- und Zugfestigkeit f_{cc} und f_{ct} von Beton um einen konstanten Wert von 20 % und die Zugfestigkeit f_{su} des Betonstahls um 5 % erhöht. Dadurch liefert Gleichung (6.32) den plastischen Rotationswinkel $\theta_{pl} = l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{smy}) / (d - z_c) = 3.45 \cdot (33.4‰ - 2.08‰) = 108.1$ mrad, d. h. eine Erhöhung um ca. 6 % gegenüber einer Berechnung durch Vernachlässigung der Dehnrateneffekte. Der Nachweis des Rotationsvermögens liefert: $\theta_{pl} = 108.1$ mrad $> \theta_{pl,erf} = 2\alpha = 10.8$ mrad.

Aufgrund der Annahme kleiner Verformungen erhält man für die maximale Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort durch Rückrechnung mithilfe des plastischen Rotationswinkels (Starrkörperrotation) $W_{\max} = 203$ mm respektive $W_{\max} = 216$ mm bei Erhöhung der Festigkeiten von Beton und Betonstahl um 20 % (Fliessfestigkeit von Stahl, Zylinderdruck- und Zugfestigkeit von Beton) respektive 5 % (Zugfestigkeit von Stahl). Aus Gleichung (6.61) folgt damit bei gegebener Masse des aufprallenden Körpers von $m = 10$ t die maximal zulässige Aufprallgeschwindigkeit v_0 respektive die maximal zulässige Fallhöhe $H = v_0^2/(2g) = 120.4$ m respektive $H = 149$ m bei entsprechender Erhöhung der Festigkeiten.

Abschliessend lässt sich mit den Ergebnissen aus den in den Kapiteln 6.3.4 und 6.3.5 nachgerechneten Versuchen darauf schliessen, dass die aus den getroffenen Annahmen – starr-ideal plastisches Materialverhalten und Impulsbelastung – resultierenden entgegengesetzten Abweichungen der Grund für die relativ gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie sein könnten.

6.4 Praxisrelevante Überlegungen

6.4.1 Allgemeines

Die Traglastverfahren der Plastizitätstheorie setzen ein ideal plastisches Baustoffverhalten und infinitesimal kleine Verschiebungen voraus. Plastische Modelle, die auf den Traglastverfahren basieren, erlauben die Beurteilung der Tragsicherheit im Rahmen einer rechnerischen Überprüfung von Stahlbetonpatten bestehender Tragwerke respektive die Sicherstellung der Tragsicherheit durch eine entsprechende Bemessung der Stahlbetonplatten.

Das in der vorliegenden Arbeit ins Zentrum gestellte Lösungsverfahren für Stahlbetonplatten im Bruchzustand, nämlich das Fliessgelenklinienverfahren nach Johansen, beruht auf dem kinematischen Verfahren der Plastizitätstheorie. In der Praxis wird dieses Verfahren insbesondere für die Beurteilung der Tragsicherheit durch eine rechnerische Überprüfung von Stahlbetonplatten zur Ermittlung von oberen Grenzwerten der (quasi-statischen) Traglast herangezogen. Die Anwendbarkeit des Fliessgelenklinienverfahrens im Rahmen der Traglastverfahren von Stahlbetonplatten unter statischer Beanspruchung wurde mit zahlreichen Versuchen verifiziert und bestätigt. Die Anwendbarkeit der Fliessgelenklinientheorie auf das in Kapitel 6.3.2 beschriebene Lösungsverfahren zur Bestimmung des Biegeverhaltens von stossbeanspruchten duktilen Stahlbetonplatten wurde mit entsprechenden experimentellen Untersuchungen verifiziert (Kapitel 6.2.2, 6.3.4 und 6.3.5). Dabei hat sich gezeigt, dass das Verhalten von dynamisch beanspruchten duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung im Bruchzustand auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie für die hier betrachteten Stossintensitäten beschrieben werden kann. Anders als bei den Traglastverfahren erhält man bei dem vorgestellten dynamischen Verfahren keine dynamische Traglast, sondern die dynamische plastische Durchbiegung am Aufprallort, den sogenannten plastischen Verformungsbedarf. Ein im Vergleich zum Verformungsvermögen geringerer plastischer Verformungsbedarf soll sicherstellen, dass ein ausreichendes Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche vorhanden ist (Kapitel 6.3.3). Das Verformungsvermögen wird massgeblich vom Verfestigungsverhalten der Bewehrung, dem Verformungsvermögen des Betons, der Zugversteifung und letztlich auch von der konstruktiven Durchbildung beeinflusst. Die Verwendung von Betonstahl hoher Duktilität, eine vertikale Anordnung der Querkraftbewehrung und ein Verzicht auf Matten beeinflussen das Verformungsvermögen positiv.

Das erhöhte Dissipationsvermögen bei duktilen Stahlbetonplatten führt insbesondere bei aussergewöhnlichen Einwirkungen wie stossartigen Belastungen zu einem günstigen Tragverhalten. Darum ist die (irreversible) plastische Energiedissipation, d. h. die Umwandlung der auf das Tragwerk aufgebrachten kinetischen Energie in plastische Energie in Form von plastischen Verformungen, von besonderem Wert. Von einem auf elastischer Energiespeicherung basierenden Konzept wird daher abgesehen.

Die nachfolgenden Überlegungen sollen als richtungsweisende Hinweise für ein Bemessungs- und Überprüfungskonzept von duktilen Stahlbetonplatten im Bruchzustand zu verstehen sein, wobei für eine definitive Beurteilung der Tragsicherheit von Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung weiterer Forschungsbedarf besteht (vergleiche dazu den Ausblick in Kapitel 7.2). Ebenso werden weitere Tragelemente von Steinschlagschutzgalerien wie Stützen, Wände und Fundamente nachfolgend ausser Acht gelassen. Auf die Thematiken des Gebrauchszustandes, des Durchstanzens am Aufprallort und der Dehnrateneffekte von Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung wird in Kapitel 6.4.4 eingegangen. Insbesondere liegt gerade für eine rechnerische Überprüfung der Hauptfokus auf der Untersuchung des Tragverhaltens im Bruchzustand; das Tragverhalten im Gebrauchszustand ist für eine Beurteilung der Tragfähigkeit bestehender Stahlbetonplatten dagegen nicht entscheidend.

In den folgenden Ausführungen zur Bemessung und rechnerischen Überprüfung wird von nicht viskosen Vorgängen im Bruchzustand ausgegangen. Die erhöhten Festigkeitswerte aufgrund der Dehnrateneffekte wirken sich auf die dynamischen Durchbiegungen von

Stahlbetonplatten günstig aus. Dementsprechend wäre eine Vernachlässigung der Dehnrateneffekte aus baupraktischer Sicht grundsätzlich möglich. Die Berücksichtigung der dynamischen Dehnrateneffekte und der Verfestigung des Betonstahls bei zunehmenden plastischen Verformungen von Stahlbetonplatten könnte analog dem Vorgehen im Erdbebeningenieurwesen mit einem konstanten Überfestigkeitsfaktor erfolgen. Ebenso könnten die Betonfestigkeiten mit einem konstanten Faktor erhöht werden, um Dehnrateneffekte zu berücksichtigen.

Aufgrund experimenteller Erfahrungen ist als granulare Eindeckung ein gut kompaktierter Kies gegenüber einem Sand zu favorisieren, damit ein verbessertes lokales Verhalten der Stahlbetonplatte gewährleistet werden kann. Einen weiteren wesentlichen Einfluss diesbezüglich nimmt die vorhandene Eindeckungsstärke ein. Aus den vorgängig beschriebenen und nachgerechneten Experimenten an Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung, welche mit einem Faktor von 2/5 skaliert wurden, zeigte sich, dass eine Eindeckungsstärke von e = 50 cm die untere Grenze der erforderlichen Stärke darstellt. Die obere Grenze der geeigneten Eindeckungsstärke ergibt sich aus dem Eigengewicht der granularen Eindeckung. In Japan wird eine Eindeckungsstärke von e = 90 cm (Sand) vorgeschrieben. In den durchgeführten 1:1-Versuchen an einer Steinschlagschutzgalerie konnte ein duktiles Biegeverhalten der Stahlbetonplatte für ein Steinschlagereignis von ca. T_0 = 3'000 kJ (m = 10 t, H = 30 m) erreicht werden, wobei der Bruchzustand der Platte noch nicht erreicht wurde.

6.4.2 Bemessung

Die plastische Bemessung einer Stahlbetonplatte von Steinschlagschutzgalerien mit granularer Eindeckung wird wie folgt eingeteilt: i) statische Bemessung, ii) Ermittlung des Verformungsvermögens und iii) Ermittlung des dynamischen Verformungsbedarfs.

i) Statische Bemessung

Die Bemessung von Stahlbetonplatten erfolgt in der Praxis meistens mithilfe des unteren (statischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie. Dabei werden statisch zulässige Spannungszustände ermittelt und die Schnittgrössen mittels der Finite-Elemente-Methode oder der Streifenmethode nach Hillerborg unter Vernachlässigung der Drillmomente bestimmt und anhand der Normalmomenten-Fliessbedingung die Biegebewehrung ermittelt. Die so bestimmte Traglast der Platte ist gemäss der Plastizitätstheorie nicht kleiner als die zum verwendeten statisch zulässigen Spannungszustand gehörende Belastung. Somit ist die Tragsicherheit gegeben und die Lösung liegt auf der sicheren Seite.

Auf der Basis des oberen (kinematischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie lässt sich ein oberer Grenzwert der Traglast ermitteln; für die Bemessung lässt sich mit diesem jedoch nur bedingt eine Lösung finden. Lässt sich jedoch für eine zu betrachtende Stahlbetonplatte ein Fliessmechanismus finden, dessen Ausbilden erfahrungsgemäss erwartet werden kann, so liefert dieser wertvolle Hinweise bezüglich des Kraftflusses und somit eine grössere Freiheit bei der Anordnung und Menge der erforderlichen Bewehrung. Bei einer Bemessung auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie ergibt sich jedoch eine Schwierigkeit hinsichtlich der Anordnung und Menge der oberen Bewehrung (negative Biegewiderstände). Selbst bei Stahlbetonplatten mit gelenkiger Lagerung ist im Bereich der Lager eine obere Bewehrung aufgrund von Torsionsbeanspruchungen erforderlich.

Fallen der obere und untere Grenzwert der Traglast zusammen, so liegt gemäss dem Verträglichkeitssatz der Plastizitätstheorie [Sayir & Ziegler 1969] eine vollständige Lösung vor. Während sich bei stabförmigen Tragwerken bei eindeutiger Definition der Randbedingungen und Baustoffeigenschaften in der Regel vollständige Lösungen angeben lassen, gestaltet sich ein solches Vorgehen bei Platten aufgrund der zusätzlichen Dimension schwieriger. Des Weiteren sind in den praktischen Anwendungen konstruktive Details und geometrische Verhältnisse vorhanden, die zu Abweichungen von der Theorie führen können.

Für das Auffinden von vollständigen Lösungen für Platten lässt sich analog zu Balken vorgehen, indem ausgehend von einem gewählten Fliessmechanismus der obere Grenzwert der Traglast minimiert wird und anschliessend mit den vollständigen Lösungen der einzelnen starren Plattensegmente die Plastizitätskontrolle vorgenommen wird, wobei die dadurch erhaltenen Traglasten dem Minimum des oberen Grenzwerts der Traglast entsprechen müssen [Zweidler 2015] (vergleiche Kapitel 4.6). Für ausgewählte Plattensegmente unter gleichmässiger Belastung sind vollständige Lösungen vorhanden. Die angesprochene Schwierigkeit der Bestimmung der negativen Widerstände lässt sich mit dem zur vollständigen Lösung gehörenden Spannungszustand lösen. Ein solches Verfahren erlaubt eine statische Bemessung auf der Basis des Kraftflusses in der Stahlbetonplatte. Die Plastizitätskontrolle kann auch mit dafür geeigneten Statikprogrammen erfolgen.

Der Nachweis der Querkrafttragfähigkeit einer Stahlbetonplatte ist zur Sicherstellung eines duktilen Biegeverhaltens erforderlich, so dass sich eine Mechanismuskonfiguration im Bruchzustand einstellen kann. Auf der Basis des Konzepts der Kapazitätsbemessung lässt sich dies für die einzelnen Plattensegmente mittels des zur vollständigen Lösung gehörenden Spannungszustandes bewerkstelligen (Kapitel 6.3.2).

Für die Ermittlung des Verformungsvermögens respektive des Verformungsbedarfs von Stahlbetonplatten ist die Bestimmung der massgebenden Mechanismuskonfiguration für eine Einzellast als Ausgangssituation erforderlich.

Die Traglastverfahren, Kapitel 3.6.3, liefern wertvolle ergänzende Folgerungen für die baupraktische Anwendung ([Sawczuk & Jäger 1963], [Marti et al. 1999]). Sie bieten eine hilfreiche Grundlage für die mit der Modellbildung verbundenen, erforderlichen Vereinfachungen.

Aus dem statischen (unteren) Grenzwertsatz lassen sich folgende Sätze formulieren:

- Das Hinzufügen (Wegnehmen) von gewichtslosem Material reduziert (erhöht) die Traglast des Systems nicht.
- Das Erhöhen (Reduzieren) der Fliessgrenze des Baustoffs reduziert (erhöht) die Traglast nicht.
- Das Umschreiben (Einschreiben) einer Fliessfläche der wirklichen Fliessfläche liefert einen oberen (unteren) Grenzwert der Traglast.
- Eigenspannungszustände beeinflussen unter Voraussetzung von infinitesimal kleinen Verschiebungen die Traglast nicht.

Aus dem kinematischen (oberen) Grenzwertsatz lassen sich folgende Sätze formulieren:

- Anfängliche Verformungszustände beeinflussen unter Voraussetzung von infinitesimal kleinen Verschiebungen die Traglast nicht.
- Verschiebungen von freien Rändern oder von durch Bindungen gehaltenen Rändern gewichtsloser Tragwerke nach aussen erhöhen die Traglast nicht.

Aus dem Verträglichkeitssatz ergeben sich schliesslich folgende Sätze:

- Die Traglast ist durch die geometrischen und statischen Randbedingungen, die Fliessbedingung und das dazugehörige Fliessgesetz eindeutig bestimmt.
- Die Spannungen in starren Bereichen sind in einer vollständigen Lösung nicht eindeutig bestimmt; es können verschiedene statisch zulässige Spannungszustände auftreten.
- Das (kinematisch zulässige) Verformungsgeschwindigkeitsfeld lässt sich in einer vollständigen Lösung nicht eindeutig bestimmen.

ii) Ermittlung des Verformungsvermögens

Es wird vorgeschlagen, das Verformungsvermögen der Stahlbetonplatte unabhängig vom dynamischen Verformungsbedarf zu ermitteln.

Auf der Basis der gewählten Mechanismuskonfiguration lassen sich die maximalen plastischen Verformungen am Aufprallort in Form eines plastischen Gelenkwinkels gemäss Kapitel 6.3.3 betrachten. Daraus ergibt sich das Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche der Platte, welches entweder durch die Stahldehnungen (Bruch des Betonstahls) oder durch die Betonstauchungen (Bruch der Biegedruckzone) begrenzt wird. Der plastische Gelenkwinkel lässt sich vereinfachend mit Gleichung (6.32) für Betonstahl respektive Gleichung (6.33) für Beton berechnen.

Die fiktive plastische Gelenklänge gemäss Gleichung (6.34) wird vereinfachend mit

$$l_{pl} = 3d_m \tag{6.65}$$

vorgeschlagen, wobei d_m die mittlere statische Höhe bezeichnet. Eine Verifikation von Gleichung (6.65) mit geeigneten Versuchen ist noch ausstehend. Die wirkliche Grösse eines aufprallenden Steinblocks ist nicht bekannt und die Bestimmung der plastischen Gelenklänge daher mit entsprechenden Unsicherheiten verbunden.

iii) Ermittlung des dynamischen Verformungsbedarfs

Mit der statischen Bemessung wurden die Bewehrung und die Abmessungen der Platte bestimmt, die zusammen mit dem Verformungsvermögen, d. h. der maximal zugelassenen plastischen Durchbiegung respektive dem maximalen plastischen Gelenkrotationswinkel der Stahlbetonplatte am Aufprallort, die Ausgangssituation bilden.

Der dynamische plastische Verformungsbedarf wird gemäss Kapitel 6.3.2 bestimmt. Ausgehend von der Mechanismuskonfiguration wird basierend auf der Fliessgelenklinientheorie mittels des Impulserhaltungssatzes und des Prinzips der virtuellen Leistungen die plastische (bleibende) Durchbiegung am Aufprallort ermittelt.

Die Berechnung der Dissipationsenergie in den plastischen Fliessgelenklinien erfolgt gemäss der Fliessgelenklinientheorie, Kapitel 4.5, wobei sich die positiven und negativen Biegewiderstände in den Fliessgelenklinien gemäss Kapitel 4.3 ergeben.

Ausgehend von dem ermittelten Rotationswinkel des plastischen Gelenkbereiches am Aufprallort lässt sich mittels einer Rückrechnung direkt mithilfe des Impulserhaltungssatzes und des Prinzips der virtuellen Leistungen bei beispielsweise vorgegebener Masse des aufprallenden Körpers die maximal zulässige Fallhöhe berechnen.

Ist die zu erwartende Intensität (Masse m, Fallhöhe H) gemäss dem Geologen grösser als die maximal zulässige Intensität, so sind geeignete Anpassungen bezüglich der Dimensionierung (Abmessungen, Bewehrung) der Stahlbetonplatte vorzunehmen.

6.4.3 Rechnerische Überprüfung

Die Erhaltung bestehender Bauten gewinnt gegenüber Neubauten zunehmend an Bedeutung. Insbesondere ist diese Tendenz auch bei Steinschlagschutzgalerien in der Schweiz zu beobachten.

Bei den folgenden Ausführungen werden lediglich die statischen Aspekte bestehender Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien – herausgelöst aus dem Gesamtrahmen einer Überprüfung bestehender Bauten – behandelt. Diese statischen Aspekte der Überprüfung sind als Ergänzung zur Zustandserfassung und der abschliessenden Zustandsbeurteilung der Gesamtbauten zu verstehen, was schlussendlich zu einer Massnahmenempfehlung führt.

Bei einer rechnerischen Überprüfung bestehender Tragwerke gelangen oftmals verfeinerte Modellvorstellungen zur Anwendung, welche bei Bedarf die Ausnützung der Tragreserven erlauben. Ausführliche Berechnungen werden jedoch nur für diejenigen Tragwerksteile empfohlen, wo die Erforderlichkeit mittels einfacher Berechnungen nachgewiesen wurde und auch tatsächlich ein Anlass dafür besteht [Marti & Stoffel 1999].

Ein Modell erweist sich als besonders leistungsfähig, wenn es das komplexe physikalische Tragverhalten eines Bauwerks auf einfache Weise mit geeigneten Idealisierungen unter Berücksichtigung der wesentlichen Einflussgrössen (Parameter) näherungsweise erfassen und beschreiben kann.

Der Detaillierungsgrad einer Modellvorstellung soll in einem angemessenen Verhältnis zur Genauigkeit der vorhandenen Eingangsgrössen respektive zu den mit diesen Eingangsgrössen verbundenen Unsicherheiten stehen.

Gerade im Bereich der Naturgefahren durch Steinschlag ist man mit wesentlichen Unsicherheiten konfrontiert.

Bei einer statischen Überprüfung bestehender Stahlbetonplatten werden in der Regel der statische und der kinematische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie angewendet, um die Traglast einzugrenzen.

Die Ausführungen in Kapitel 6.4.2 hinsichtlich der plastischen Bemessung einer Stahlbetonplatte von Steinschlagschutzgalerien mit granularer Eindeckung gelten sinngemäss auch für die rechnerische Überprüfung bestehender Steinschlagschutzgalerien.

6.4.4 Weitere Überlegungen

Gebrauchszustand

Im Erdbebeningenieurwesen wird hinsichtlich Intensität eines Erdbebens je nach Art der Aufgabe eines Bauwerks zwischen Sicherheitsbeben, Betriebsbeben und Schadengrenzbeben unterschieden [Paulay et al. 1990]. Bei lebenswichtigen Aufgaben eines Bauwerks wird vermehrt die Berücksichtigung eines Betriebsbebens verlangt. Diese Entwicklung wird heutzutage auch bei konventionellen Hochbauten beobachtet. Das Konzept der Kapazitätsbemessung nimmt dabei eine zentrale Rolle ein. Mit der Wahl eines steifen Tragwerks können die Verformungen im elastischen Bereich gehalten werden, was bei einem im Verhältnis zum Sicherheitsbeben starken Schadengrenzbeben erforderlich wird. Mit der Bemessungsduktilität können das Fliessen der Bewehrung und daher entsprechende plastische Verformungen gesteuert werden. Bei einem starken Sicherheitsbeben werden häufig eine hohe Duktilität und ein entsprechend geringer Tragwiderstand angestrebt.

Verformungsberechnungen von Stahlbetonplatten unter Stossbelastung im Gebrauchszustand sind schwierig quantifizierbar. Zum einen ist die wirkliche Belastungs- und Zwängungsgeschichte eines Tragwerks nicht ausreichend bekannt, zum anderen unterliegen die statischen und dynamischen Material- (Verbundbaustoff Stahlbeton und granulare Eindeckung) und Systemkennwerte sowie die Einwirkung (Masse und Fallhöhe des aufprallenden Körpers) teilweise grossen Streuungen respektive sind vorgängig nicht oder nur ungenügend bekannt. Die Ermittlung der Steifigkeit einer Stahlbetonplatte unter Stossbelastung ist aufgrund der Rissbildung, der Inhomogenitäten, welche die Eigenformen beeinflussen, sowie des komplexen Verhaltens der granularen Eindeckung schwierig. Theorien, die auf inkrementellen, nichtlinearen und zeitabhängigen Berechnungen zur Beschreibung des komplexen Tragverhaltens von Stahlbetonplatten unter Stossbeanspruchung im Gebrauchszustand basieren, sind sehr aufwendig und stehen bis anhin (noch) nicht zufriedenstellend zur Verfügung. Umso wichtiger ist die Beurteilung des Grenztragverhaltens von Stahlbetonplatten unter Stossbelastung mittels Näherungsverfahren. Nicht zuletzt erlauben Näherungsverfahren Plausibilitätsprüfungen für entsprechende Finite-Elemente-Berechnungen.

Nichtlineare dynamische Zeitverlaufsberechnungen sind für baupraktische Anwendungen wie diejenigen bei Steinschlagschutzgalerien jedoch nicht angezeigt. Aus baupraktischer Sicht liegt die zentrale Aufgabe in erster Linie bei einer zuverlässigen Bestimmung des Bruchzustandes. Nichtlineare dynamische Berechnungsmethoden, beispielsweise auf der Basis der Finite-Elemente-Methode ([Kishi et al. 2009], [Ghadimi Khasraghy 2011]), stellen jedoch in der Forschung eine wertvolle Ergänzung zu analytischen Verfahren respektive Näherungsverfahren dar.

Der Gebrauchszustand von Stahlbetonplatten einer Steinschlagschutzgalerie wird in grossem Masse von der granularen Eindeckung beeinflusst. Durch die Wahl einer genügenden Eindeckungsstärke kann das Verhalten unter Gebrauchslasten positiv gesteuert werden. Betonabplatzungen infolge von Stossbelastungen wurden in Versuchen in geringem Ausmass beobachtet [Röthlin et al. 2015].

Eine optimierte Lösung der dynamischen Problemstellung kann oft durch ein sehr flexibles Bauwerk erreicht werden. Mit den Untersuchungen an einem elastisch-plastischen Masse-Feder-System mit einem Freiheitsgrad konnten die wesentlichen Systemparameter untersucht werden. Der für Stossbelastungen relevante Bereich wird auch als Impulsbereich bezeichnet (t_d/T klein). Betrachtet man den Bereich $t_d/T < 1$, so kann im elastischen sowie plastischen Bereich beobachtet werden, dass sich die maximale Verschiebung $w_{\max}$ oder der erforderliche Widerstand R_m mit zunehmender Eigenschwingdauer T reduziert. Eine Erhöhung der Eigenschwingdauer T kann durch eine Erhöhung der Masse des Bauwerks m_e oder durch eine Reduktion der Steifigkeit k_e erreicht werden. Zur Erreichung einer gewünschten Steifigkeit ist man auf konstruktive Überlegungen für das Tragwerk angewiesen.

Die Versuche an Stahlbetonplatten mit einer granularen Eindeckung von [Yamaguchi et al. 2011] und [Röthlin et al. 2015] zeigten die verbesserte Dämpfungswirkung einer Sandeindeckung im Vergleich zu einer Kieseindeckung im Gebrauchszustand und die daraus resultierenden kleineren Auswirkungen der Stahlbetonplatte (Durchbiegung, Rissbildung). Allerdings zeigten sich Schwächen der Sandeindeckung bei erhöhten Aufprallenergien, was ein duktiles Verhalten der Stahlbetonplatte bis nahe dem Bruchzustand durch ein vorzeitiges Durchstanzen am Aufprallort verhindern kann.

Durchstanzen

In der Praxis werden Betontragwerke weitgehend duktil ausgebildet. Das aus dem Erdbebeningenieurwesen bekannte Konzept der Kapazitätsbemessung wird bei Stahlbetontragwerken häufig indirekt angewendet. So wird beispielsweise mithilfe einer Mindestbewehrung ein nicht duktiles Versagen bei Erstrissbildung vermieden. Oder es wird bei Stahlbetonplatten ohne Querkraftbewehrung der Tragwiderstand so gewählt, dass ein Biegeversagen vor einem nicht duktilen Querkraftversagen eintritt.

Versuche an Platten unter monotoner (statischer) Laststeigerung zeigten, dass die Anordnung einer Querkraftbewehrung bereits bei kleinen Querkraftbewehrungsgehalten zu einer deutlichen Verbesserung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonplatten führt [Jäger & Marti 2005].

Bei einer konzentrierten Krafteinleitung kann allerdings ein lokales, sprödes Versagen am Ort der Krafteinleitung oftmals nicht ohne weitere Massnahmen verhindert werden. Bei den plastisch bemessenen Stahlbetonplatten mit konzentrierter Krafteinleitung in den Versuchen von [Heinzmann et al. 2012] konnte kein duktiles Tragverhalten erreicht werden, so dass die Platten sprödartig und ohne Vorankündigung vor Erreichen der rechnerischen

Biegetraglast versagten. Eine Durchstanzbewehrung führte zu einem erhöhten Durchstanzwiderstand und einem verbesserten Verformungsvermögen.

Bei Stahlbetonplatten ohne Überdeckung kann auch bei einer flächigen Anordnung einer Querkraftbewehrung kein duktiles Verhalten unter Stossbeanspruchung erreicht werden ([Kon-No et al. 2010], [Beckmann et al. 2012], [Hrynyk 2013]).

Demgegenüber zeigen Stahlbetonplatten mit einer granularen Eindeckung unter Stossbeanspruchung wesentliche Stärken hinsichtlich des lokalen Tragverhaltens auf. [Yamaguchi et al 2011] untersuchten identische Versuchskörper unter Stossbelastung mit einer granularen Eindeckung – bestehend einerseits aus Sand und andererseits aus Kies –, wobei ein duktiles Tragverhalten der Stahlbetonplatte erreicht werden konnte. Die Versuche an Stahlbetonplatten mit Sandeindeckung von [Okada et al 2011b] zeigten exemplarisch auf, dass im geringeren Energiebereich ein duktiles Tragverhalten vorhanden ist und ab einer gewissen Aufprallenergie ein Durchstanzen am Aufprallort erfolgt, bevor ein globaler Biegebruch eintritt. Zahlreiche weitere in Japan durchgeführte Versuche an Stahlbetonplatten mit Sandeindeckung zeigten das gleiche Phänomen. Die in [Röthlin et al. 2015] dokumentierten Grossversuche an einer nachgebauten Steinschlagschutzgalerie sowie die Versuche an einer – aufgrund der Anordnung der Lagerung – steifen Platte weisen auf die günstigere Schutzwirkung einer gut kompaktierten Kieseindeckung gegenüber einer Sandeindeckung in Bezug auf das lokale Tragverhalten einer Stahlbetonplatte hin.

Eine wesentliche Stärke der granularen Eindeckung hinsichtlich der Schutzwirkung der Stahlbetonplatte vor einem Durchstanzen am Aufprallort zeigt sich in der ungleichmässigen (nicht zwingend rotationssymmetrischen) Spannungsverteilung unterhalb des Aufprallkörpers respektive in der entsprechenden Belastungsverteilung auf der Stahlbetonplatte, welche zu keinem klaren Umriss der Belastungsfläche (gestützte Fläche) führt. Die Spannungsverteilung wird massgeblich durch die Steifigkeitseigenschaften der granularen Eindeckung und die Ausgangsgrössen des aufprallenden Körpers (Masse, Fallhöhe) bestimmt, Kapitel 6.2.1. Je dichter die Lagerung, desto grössere Werte erreichen die Spannungsspitzen. Im Vergleich dazu ergibt sich beispielsweise bei Flachdecken ein klarer Umriss der Belastungsfläche bei den Stützen (gestützte Fläche), wobei die Basis des Durchstanzkegels oftmals am Stützenansatz zu beobachten ist.

Des Weiteren ist ein progressiver Kollaps – anders als bei Flachdecken, bei denen zu dessen Verhinderung ein genügendes Lastumlagerungsvermögen erforderlich ist – bei einem Durchstanzen der Stahlbetonplatte einer Steinschlagschutzgalerie unwahrscheinlich.

Die vorhandene untere orthogonal angeordnete Biegebewehrung bei Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien gewährleistet bis zu einem gewissen Grade ein Zurückhalten des Durchstanzkegels in der Platte bei einem allfälligen lokalen Versagen am Aufprallort.

Zusammenfassend weisen die nun vorhandenen Erkenntnisse aus dieser Arbeit darauf hin, dass ein lokales Versagen von Steinschlagschutzgalerien infolge Durchstanzens am Aufprallort einen im Vergleich zum globalen Biege- und Querkrafttragverhalten und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten unter Aufprallstoss eines dementsprechend weniger gewichteten Stellenwerts bedarf.

Aus baupraktischer Sicht stellen konstruktive Überlegungen hinsichtlich der erforderlichen Plattendicke, der Eindeckungsstärke und des Bewehrungslayouts / der Bewehrungsführung sowie vereinfachte Grenzbetrachtungen eine wertvollere Herangehensweise bezüglich des (dynamischen) Durchstanzens dar als detaillierte theoretische Modelle zur Beschreibung der lokalen Durchstanzproblematik. Weitere Forschungstätigkeiten sind erforderlich, um diesbezüglich quantitative Aussagen machen zu können.

Dehnrateneffekte und Überfestigkeitsfaktor

Obwohl bei Stossvorgängen die Dehnraten der beteiligten Baustoffe als Funktion des Ortes und der Zeit variieren, wird für praktische Anwendungen oftmals von einer Festigkeitszunahme der jeweiligen Baustoffe mit einem konstanten Faktor ausgegangen.

Gemäss der Normvorschrift [SIA 262 2013] können für die Bemessungssituation „Anprall" die Bemessungswerte der Fliessgrenze von Betonstahl und Spannstahl um 15 % erhöht werden, während der Einfluss der Einwirkungsdauer auf die Betondruckfestigkeit für stossartige Einwirkungen, wie z. B. Anprall und Explosion, mit einer Festigkeitszunahme um 20 % (Beiwert $\eta_t = 1.2$) zu berücksichtigen ist.

Im Erdbebeningenieurwesen wird mit dem Überfestigkeitsfaktor für den Betonstahl der Einfluss der Stahlverfestigung bei grossen plastischen Dehnungen (zunehmende Gelenkrotation) sowie der dynamischen Effekte berücksichtigt [Paulay et al. 1990].

Die Nachrechnung von Versuchen an Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss in den Kapiteln 6.3.4 und 6.3.5 wurde einerseits ohne Berücksichtigung der Dehnrateneffekte und andererseits als Vergleichsbasis mit Berücksichtigung einer Festigkeitszunahme – der Fliessfestigkeit des Betonstahls und der Zylinderdruckfestigkeit des Betons – um einen konstanten Wert von 20 % angestellt. Diese um 20 % erhöhten Festigkeitswerte entsprechen den mit den Gleichungen (2.2) und (2.10) berechneten dynamischen Festigkeiten für Betonstahl (Fliessfestigkeit) und Beton (Zylinderdruckfestigkeit) unter einachsiger Zug- und Druckbeanspruchung mit konstanter Belastungsgeschwindigkeit (Dehnrate) von jeweils $\dot{\varepsilon} = 0.01\ s^{-1}$.

Die mit dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Näherungsverfahren berechnete maximale bleibende Durchbiegung der Stahlbetonplatten am Aufprallort wird bei einer Erhöhung der Fliessfestigkeit des Betonstahls reduziert. Der Einfluss einer erhöhten Zylinderdruckfestigkeit des Betons auf die plastische Durchbiegung ist vernachlässigbar klein. Die Berücksichtigung des Einflusses der Dehnrateneffekte auf die Fliessfestigkeit des Betonstahls führt zu wirtschaftlicheren Lösungen.

Der aus den Dehnrateneffekten resultierende Einfluss der erhöhten Festigkeiten sowohl des Betonstahls (Fliessfestigkeit, Zugfestigkeit) als auch des Betons (Zylinderdruckfestigkeit, Zugfestigkeit) wirkt sich auf das Verformungsvermögen aus.

Generell zeigt sich, dass die Fliessfestigkeit f_{sy} der Parameter mit dem grössten Einfluss sowohl auf den Verformungsbedarf als auch auf das Verformungsvermögen ist.

[Beckmann et al. 2012] führten Versuche an Stahlbetonplatten mit und ohne Querkraftbewehrung unter Aufprallstoss durch (ohne Eindeckung; lokales Versagen infolge Durchstanzens). Dabei wurden neben weiteren Grössen die Betondehnungen auf der Plattenoberseite (Druck) sowie die Dehnungen im Betonstahl (Zug, untere Bewehrung) gemessen. Die dazugehörigen maximalen Werte der Dehnraten für Beton unterschieden sich dabei um mindestens den Faktor 3 von den wesentlich höheren Werten des Betonstahls. Bei Verwendung einer flächig angeordneten Durchstanzbewehrung ergaben sich noch grössere Unterschiede zwischen Beton und Baustahl (ca. Faktor 8…9), wobei die Dehnrate im Beton (Betonstahl) tendenziell kleiner (grösser) ausfiel als bei den Platten ohne Querkraftbewehrung.

Bei den Versuchen von [Röthlin et al. 2015] an einer Stahlbetongalerie mit einer granularen Eindeckung unter Aufprallstoss ergaben sich wesentlich kleinere Maximalwerte der Dehnraten im Betonstahl der Deckenplatte (Zug, untere Bewehrung: $\dot{\varepsilon}_{s,max} < 1.2\ s^{-1}$) als bei den von Beckmann et al. durchgeführten (kleinmassstäblichen) Plattenversuche ($10\ s^{-1} \leq \dot{\varepsilon}_{s,max} < 18\ s^{-1}$). Bei den gemessenen Grössen der Stahldehnung ist zu beachten, dass das Verbundverhalten zwischen Beton und Betonstahl lokal nicht mehr gegeben ist.

7 Folgerungen und Ausblick Teil A

7.1 Folgerungen

Die Methoden der Plastizitätstheorie bieten zuverlässige Dienste für die Ermittlung von oberen und unteren Grenzwerten der (statischen) Traglast von Stahlbetonplatten. In dieser Arbeit wurde das Ziel verfolgt, die Plastizitätstheorie für Stahlbetonplatten unter stossartiger (einmaliger) Belastung durch Einbezug der d'Alembert'schen Trägheitskräfte zu erweitern. Dabei lag der Fokus auf der Erarbeitung einer Näherungslösung für Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung (vorzugsweise kompakt gelagerter Kies) unter Aufprallstoss auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie für das Anwendungsgebiet von Steinschlagschutzgalerien.

Aus den in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnissen lassen sich einige Folgerungen ableiten:

7.1.1 Anwendungs- und Gültigkeitsbereich der Einwirkungs- und Tragwerksmodelle

Die Anwendungs- und Gültigkeitsbereiche einer dynamischen, starr-plastischen Modellbildung sowie einer Grenzbetrachtung bezüglich der Einwirkung als Impulsbelastung (kurzzeitig wirkende äussere Belastung) lassen sich anhand eines Masse-Feder-Systems mit einem Freiheitsgrad untersuchen (Kapitel 5.4).

Einerseits kann die starr-plastische Theorie nur angewendet werden, wenn die äussere Stossenergie um ein Vielfaches grösser ist als die totale elastische Verzerrungsenergie. Andererseits müssen die Durchbiegungen im Vergleich zur Dicke des Bauteils klein sein (Theorie erster Ordnung), damit Effekte aus Geometrieänderungen nicht berücksichtigt werden müssen. Des Weiteren ist bei dynamischer Beanspruchung eine grosse plastische Energiedissipation (wie dies bei statischer Beanspruchung der Fall ist) nicht die einzige Voraussetzung; es ist ebenso eine kurze Stossdauer im Vergleich zur Eigenschwingdauer des Tragwerks (Impulsbeanspruchung) erforderlich, damit die Abweichungen zwischen starr-plastischer Idealisierung und dem wirklichen dynamischen Tragverhalten gering bleiben. Bei einem Aufprallstoss spielt auch das Verhältnis der aufprallenden Masse zur Masse des Tragwerks eine entscheidende Rolle, wobei für grösser werdende Massenverhältnisse eine bessere Übereinstimmung erzielt werden kann.

Die Grenzbetrachtung einer Stossbelastung als Impulsbelastung bringt wesentliche Vereinfachungen mit sich. Je grösser die vorhandene Verschiebeduktilität des Tragwerks ist, desto kleiner ist die Abweichung zwischen der Näherungslösung einer Impulsbelastung und der numerischen Lösung eines elastisch-plastischen Masse-Feder-Systems.

Die beiden Vereinfachungen – starr-plastisches Modell und Impulsbelastung – führen zu Abweichungen mit entgegengesetztem Vorzeichen und von ähnlicher Grösse. Die Betrachtung eines kurzzeitig wirkenden Stosses, indem eine Impulsbelastung angenommen wird, führt zu einer Überschätzung (konservativ), die Vernachlässigung elastischer Verformungen zu einer Unterschätzung (nicht konservativ) der Durchbiegungen am Aufprallort.

7.1.2 Erweiterung des Traglastverfahrens auf dynamische Problemstellungen

Die Erweiterung der Traglastverfahren für statische Lasten auf dynamische Problemstellungen war trotz einigen frühen Erfolgen nicht einfach, da aufgrund der zeitabhängigen Verschiebungsfelder respektive Geschwindigkeitsfelder selbst die Vereinfachung als starr-plastische Idealisierung des Tragverhaltens zu mathematischen Schwierigkeiten führte.

Das Verschiebungsfeld eines dynamisch beanspruchten Tragwerks ist im Allgemeinen aufgrund der vorhandenen Trägheitskräfte nicht stationär während der Bewegungsantwort des Tragwerks. Eine analytische, starr-plastische Lösung liegt nur für Kreis- und Quadratplatten unter gleichförmig verteilter dynamischer Belastung vor. Die zu den statischen Belastungen analogen Grenzwertsätze für dynamische Belastungen weisen aus praktischer Sicht nicht gleichermassen die Stärken der Traglastverfahren auf, da sich grössere Abweichungen ergeben. Die Arbeit von [Martin & Symonds 1966] über Modalform-Lösungen war wegweisend für die Erarbeitung von Näherungsverfahren, welche nur ein stationäres Verschiebungsfeld betrachten und daher aus baupraktischer Sicht interessant sind.

7.1.3 Starr-plastisches Näherungsverfahren für Steinschlagschutzgalerien

Für duktile Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien mit Kieseindeckung wird ein starr-plastisches Näherungsverfahren vorgeschlagen, welches auf dem Modalform-Konzept beruht. Der Stoss wird als Aufprallstoss idealisiert. Ausgehend von der Annahme eines Geschwindigkeitsfeldes entsprechend der Mechanismuskonfiguration auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie von Stahlbetonplatten wird mithilfe des Impulserhaltungssatzes und des Prinzips der virtuellen Leistungen die plastische Durchbiegung am Aufprallort berechnet (Verformungsbedarf).

Die Anwendung einer plastischen Berechnungsmethode führt gegenüber der Anwendung einer elastischen Methode zu einer wirtschaftlicheren Lösung, indem die vorhandene Duktilität (Verformungsvermögen) ausgenutzt wird und dadurch der Tragwiderstand reduziert werden kann. Der Vergleich des Näherungsverfahrens mit Experimenten lieferte folgende Erkenntnisse:

- Die Annahme eines Verschiebungsfeldes respektive Geschwindigkeitsfeldes basierend auf der Fliessgelenklinientheorie konnte verifiziert werden.

- Die sich einstellende (bleibende) Modalform respektive das Rissbild der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss stimmt mit der Fliessgelenklinientheorie für statische Lasten überein, wobei die Bedingung der gegenüber elastisch gespeicherten Verformungsenergie grossen plastischen Energiedissipation eingehalten werden muss. Dies bedingt das vorgängig erwähnte grosse Massenverhältnis.

- Die Nachrechnung mit den oben genannten Vereinfachungen (starr-plastisch, Impulserhaltung) ergibt plausible Resultate und zeigt Potential, da eine mit zahlreichen Unsicherheiten verbundene „Kräfteberechnung" unter Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der granularen Eindeckung umgangen werden kann.

- In den Experimenten wurden kleine Tragwerksverformungen beobachtet und somit konnte die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System erfolgen und die Theorie erster Ordnung angewendet werden.

Der Verformungsbedarf und das Verformungsvermögen wurden separat und voneinander unabhängig ermittelt. Die Rotationsduktilität (Verformungsvermögen) wurde als Kenngrösse für die maximal möglichen plastischen Verformungen verwendet.

Die Voraussetzung für das Einstellen des oben beschriebenen duktilen Biegebruchverhaltens von Stahlbetonplatten ist das Ausbleiben eines vorzeitigen lokalen Versagens infolge Durchstanzens am Aufprallort respektive eines spröden Querkraftversagens der Platte. Die granulare Kieseindeckung von genügender Stärke sowie das Konzept der Kapazitätsbemessung stellen diesbezüglich die zentralen Einflussmöglichkeiten dar. Ein duktiles Tragverhalten bedingt eine sorgfältige konstruktive Durchbildung der Bewehrung von Stahlbetonplatten.

7.1.4 Dämpfende Wirkung der Eindeckung

Die dämpfende Wirkung der granularen Eindeckung im kleinen Aufprallenergiebereich (Gebrauchszustand; Tragwerk elastisch) muss für die Modellbildung im elastischen (elastisch-plastischen) Bereich des Tragwerksverhaltens berücksichtigt werden. Bei zunehmender Aufprallenergie nimmt die Dissipation in Form von Dämpfung der granularen Eindeckung ab und die Duktilität der Stahlbetonplatte nimmt eine wesentliche Rolle ein. Das Vorhandensein einer granularen Eindeckung ist jedoch von wesentlicher Bedeutung für das Steuern des lokalen respektive globalen Tragverhaltens der Stahlbetonplatte, nämlich für das Verhindern eines „vorzeitigen“ Durchstanzens am Aufprallort. Die wohl wesentlichste Stärke einer granularen Eindeckung diesbezüglich ergibt sich aus dem nicht klar definierten Umriss der Belastungsfläche. Die Experimente zeigten, dass im geringen Aufprallenergiebereich die Interaktion zwischen dem aufprallenden Körper und der granularen Eindeckung berücksichtigt werden muss und daher der Impulserhaltungssatz für diesen Bereich nicht mehr zur Anwendung kommen kann. Das Einstellen einer Modalform im elastisch-plastischen Tragwerksbereich affin zum statischen Verschiebungsfeld ist aufgrund der immer vorhandenen Imperfektionen und der Lage der Anregung fraglich, womit Modellvorstellungen mit Masse-Feder-Systeme infrage gestellt werden. Das effektive dynamische Tragverhalten von Stahlbetonplatten wurde bis anhin mittels inkrementeller, dynamischer Modellvorstellungen nicht zufriedenstellend gelöst. Generell sollte aus praktischer Sicht das Verhalten im Versagenszustand von Interesse sein, womit gesamte Zeitschrittverfahren/Masse-Feder-Systeme (gesamte dynamische Last-Verformungsdiagramme) mit entsprechenden Zeitverläufen an Bedeutung verlieren.

7.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit bezüglich des dynamischen Tragverhaltens duktiler Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien erhaltenen Erkenntnissen und die damit verbundenen Folgerungen regen weiterführende Untersuchungen an:

- Das vorgeschlagene Näherungsverfahren für duktile Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung unter Aufprallstoss könnte mit weiteren Bruchversuchen verifiziert und gegebenenfalls modifiziert werden. Ergänzende Versuche an Stahlbetonplatten mit (quasi) isotropen und orthotropen Biegewiderständen und einer gut kompaktierten Kieseindeckung basierend auf dem Konzept und den Erkenntnissen aus [Okada et al. 2011b] und [Yamaguchi et al. 2011] würden eine vertiefte Untersuchung im dynamischen Versagenszustand erlauben. Besondere Beachtung muss dabei einer guten Verankerung der Platten auf den Hauptträgern (Auflagerung) geschenkt werden, da bei stossartigen Belastungen beträchtliche Abhebekräfte auftreten können. Das Lagerungskonzept kann von den beiden oben genannten Versuchen übernommen werden. Experimentelle Erfahrungen hinsichtlich der Messtechnik und der Versuchsauswertung stehen in [Röthlin et al. 2015] zur Verfügung.

- In den in dieser Arbeit verwendeten Versuchsreihen ([Yamaguchi et al. 2011], [Röthlin et al. 2015]) sowie in statischen Plattenversuchen [Jäger & Marti 2005] wurde das Verformungsvermögen der Stahlbetonplatten massgeblich durch die Spannungs-Dehnungscharakteristik des Betons in der Biegedruckzone bestimmt. Weitere experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Beschreibung der Biegedruckzone sind erforderlich, um Aussagen bezüglich der Spannungs- und Verzerrungszustände und insbesondere der Grösse der Bruchstauchung vornehmen zu können. Es ist empfehlenswert, diese Untersuchungen zunächst an Biegeträgern unter statischer Beanspruchung vorzunehmen, mit dem Ziel, die sich daraus ergebenden Erkenntnisse auf dynamische Problemstellungen zu erweitern. Das Verbundverhalten dynamisch beanspruchter Stahlbetonplatten ist im Hinblick auf die Kalibrierung der Verbundkennwerte des Zuggurtmodells für normal- und hochduktile Betonstähle (und Spannstähle) experimentell zu untersuchen.

- Über das dynamische Tragverhalten von vorgespannten Stahlbetonplatten unter stossartiger Beanspruchung ist noch wenig bekannt. Das in dieser Arbeit beschriebene Näherungsverfahren kann auf Platten mit Vorspannung erweitert und durch entsprechende Versuche verifiziert werden.

- Viele bestehende Galerien respektive Tunnelportale sind Schalentragwerke. Das auf den in dieser Arbeit vorgestellten Grundlagen basierende Näherungsverfahren kann für Schalen unter Stossbeanspruchung weiterentwickelt werden. In einem ersten Schritt könnte vereinfachend eine genügend dünne Schale betrachtet werden, für welche nur Membraneffekte zu berücksichtigen sind. Eine weitere vereinfachende Betrachtung ergibt sich in der Annahme einer kugelsymmetrischen Schale, welche abschliessend auf axialsymmetrische Schalen erweitert werden kann. Bogenartige Schalentragwerke (Gewölbe) erweisen sich gegenüber plattenartigen Tragwerken bei hohen Aufschüttungen und Hinterfüllungen als tragfähiger als Platten [Passer 1980]. Im Weiteren könnte das Zusammenwirken von Hinterfüllung und Schalentragwerk in Betracht gezogen werden.

- Aus baupraktischer Sicht stellen konstruktive Überlegungen hinsichtlich der erforderlichen Plattendicke, der Eindeckungsstärke und des Bewehrungslayouts / der Bewehrungsführung respektive vereinfachte Grenzbetrachtungen eine wertvolle Herangehensweise bezüglich des (dynamischen) Durchstanzens von Stahlbetonplatten am Aufprallort dar. In Bezug auf die Bewehrungsführung könnten gestützt auf den Ausführungen in [Zweidler 2015] Aussagen gemacht werden. Theoretische Modelle für rotationssymmetrische Probleme könnten basierend auf der Arbeit von [Jäger 2007] entwickelt werden. Eine solche Modellvorstellung müsste zuerst für Platten unter monotoner Belastungserhöhung erarbeitet und mit entsprechenden Experimenten verifiziert werden. Weitergehende Hinweise diesbezüglich finden sich in Jägers Arbeit.

- Membrankraftbeanspruchung von Platten aufgrund der Lagerungsbedingungen (Gewölbewirkung) kann mit einer beträchtlichen Steigerung des Tragwiderstandes verbunden sein. Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Näherungsverfahren lässt sich durch Einbezug von Membrankräften erweitern.

Bezeichnungen Teil A

Lateinische Grossbuchstaben

A	Fläche der Platte
A, B, C	Duktilitätsklassen
A_c	Bruttoquerschnittsfläche des Betons
$A_k^{(d)}$	dissipative (plastische) Arbeit der inneren Kräfte
$A_\mathrm{k}^{(q)}$	quasi konservative (elastische) Arbeit der inneren Kräfte
A_{k0}	spezifische Arbeit der inneren Kräfte
A_OAP	Fläche des Ellipsensektors OAP
A_q	Teil der Fläche, auf dem die äusseren Spannungen q wirken
A_s	Querschnittsfläche der Bewehrung
C	Schwerpunkt der Fläche unter einer Stossfunktion; Konstante
D	Plattensteifigkeit; Materialkonstante; Durchmesser
$\dot{D}$	Dissipationsleistung
$\dot{D}_a$	Dissipationsleistung entlang Fächerberandung
$\dot{D}_F$	Dissipationsleistung im Fächer
$\dot{D}_i$	spezifische Dissipationsleistung
$\dot{D}^k$	Dissipationsleistung für ein System mit einem kinematisch zulässigen Verschiebungsfeld
D_min, D_max	minimaler respektive maximaler Korngrössendurchmesser von granularen Partikeln
E	makroskopische Steifigkeit des granularen Mediums; Elastizitätsmodul
E_{abs}	absorbierte Energie (granulare Eindeckung)
E_c	Elastizitätsmodul des Betons
$E_{c,dyn}$	dynamischer Elastizitätsmodul des Betons
E_{cm}	mittlerer Elastizitätsmodul des Betons
E_i	vom Tragwerk absorbierte (elastische oder elastisch-plastische) Energie
E_{imp}	Aufprallenergie
E_s	Elastizitätsmodul des Betonstahls
E_{sh}	Verfestigungsmodul des Betonstahls
F	Kraft; Maximalwert der äquivalenten, rechteckförmigen Stossfunktion nach Youngdahl
$\boldsymbol{F}^{(a)}$	äussere Kräfte
$\boldsymbol{F}^{(i)}$	innere Kräfte
$\boldsymbol{F}^{(t)}$	Trägheitskräfte
$F(t)$	Aufprallkraft
$F^*(t)$	transmittierte Aufprallkraft
$F(x,y)$	Ortsfunktion
$F_A(t)$, $F_B(t)$	Kontaktkräfte beim Stoss
F_e	Maximalwert der äquivalenten, äusseren zeitabhängigen

	Belastung (Masse-Feder-Modell)
$F_e(t)$	äquivalente, äussere zeitabhängige Belastung (Masse-Feder-Modell)
$F_{e,\mathrm{Approx.}}$	Maximalwert des Kraftstosses aus Näherungslösung (Impulsbelastung oder quasi-statische Belastung) eines linear elastisch-ideal plastischen Masse-Feder-Systems
$F_{e,Numerisch}$	Maximalwert des Kraftstosses aus numerischer Lösung eines linear elastisch-ideal plastischen Masse-Feder-Systems
F_i	(äussere) Oberflächenkraft
F^{i}	(äussere) einparametrige, zeitabhängige Belastung
$\mathrm{F}_i(x,y)$	allgemeine dynamische Einwirkung
$F_i(x_j,t)$	auf einen Körper einwirkende, statisch zulässige (äussere) Belastung
F_i^0	örtliche Verteilungsfunktion
F_i^s	statisch zulässige Belastung
F_k	oberer Grenzwert der Traglast
$F_{\max}$	maximale Aufprallkraft
$F^*_{\max}$	maximale Aufprallkraft
F_n	Normalkontaktkraft
F_s	unterer Grenzwert der Traglast
F_u	Traglast, Biegetraglast
F_v	Querkrafttraglast
F^0	Maximalwert eines rechteckförmigen Kraftstosses
$F_{1,max}$, $F_{2,max}$	Maxima der Kontaktkräfte beim Stoss
G	Gewicht
G_2	Gewicht von Körper 2
H	Fallhöhe
$H(t)$	Heaviside-Funktion (Sprungfunktion)
$\boldsymbol{I}$	Impuls
$\boldsymbol{I}_0$	Impuls unmittelbar vor dem Stoss
$\boldsymbol{I}_1$	Impuls unmittelbar nach dem Stoss
J^*	Lee's Funktion
K	Körper; Kennzeichnung für Kies
K	Konstante
L	Gesamtleistung
$\tilde{L}$	virtuelle Gesamtleistung
$L^{(a)}$	Leistung der äusseren Kräfte
$\tilde{L}^{(a)}$	virtuelle Leistung der äusseren Kräfte
$L^{(i)}$	Leistung der inneren Kräfte
$\tilde{L}^{(i)}$	virtuelle Leistung der inneren Kräfte
$L^{(t)}$	Leistung der Trägheitskräfte
$\tilde{L}^{(t)}$	virtuelle Leistung der Trägheitskräfte
L_a	Leistung einer Einzellast
M	Biegemoment
M_t	Biegemoment an einer Diskontinuitätslinie
M_u	Biegewiderstand

M_y	Biegemoment um die *y*-Achse
$\mathbf{N}$	Matrix Fliessbedingungen
N	Normalkraft
P_f	Impuls des rechteckförmigen Kraftstosses (Fläche unter Kurve)
Q	thermische Leistung; konzentrierte Belastung
Q^*	transformierte, konzentrierte Belastung (Affinitätstheorem)
Q_i	verallgemeinerte Spannung
Q^*_i	beliebiger Spannungszustand unterhalb der Fliessgrenze
Q_k	oberer Grenzwert der Traglast
Q_s	unterer Grenzwert der Traglast
Q_u	Traglast
Q_α	auf einen Balken einwirkende Einzellast an der Stelle α
Q_α^0	Ausgangswert des Kraftstosses an der Stelle α
R	Bezeichnung für einen wiederholten Aufprallversuch
R	Energieverhältnis nach Lee & Symonds; Radius; Kennzeichnung für maschinelle Verdichtung der granularen Eindeckung
$R_e(w)$	bilineare Widerstandsfunktion (Masse-Feder-Modell)
R_{me}	äquivalenter innerer Widerstand des Tragwerks (Masse-Feder-Modell)
R_α	plastischer Widerstand eines Balkens an der Stelle α
S	Kennzeichnung für Sand
S	Oberfläche eines Körpers; Oberfläche eines Systems; Korrelationsparameter nach Youngdahl
$\dot{S}$	totale Entropieleistung
S_q	Teil der Oberfläche eines Systems, auf dem die äusseren Spannungen *q* vorgegeben sind
$\dot{S}^i$	irreversible Entropieleistung
$\dot{S}^r$	reversible Entropieleistung
S_u	Teil der Oberfläche eines Systems, für den die Verschiebungen u_i^0 vorgeschrieben sind
T	kinetische Energie; Eigenschwingdauer; Zeitpunkt am Ende der Plattenbewegung
$T_{Aufprallkörper}$	kinetische Energie des Aufprallkörpers
$\dot{T}$	zeitliche Ableitung der kinetischen Energie
T^k	kinetische Energie in Funktion eines kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes
$T_{\max}$	maximale kinetische Energie
T_{Platte}	kinetische Energie der Stahlbetonplatte
T_0	kinetische Energie des Aufprallkörpers (initiale kinetische Energie)
T_0^*	initiale kinetische Energie (Modalform-Näherungsverfahren)
T_{1a}	kinetische Energie des Körpers 1 unmittelbar vor dem Stoss
U	potentielle Energie der inneren Kräfte (Deformationsenergie)
$\dot{U}$	zeitliche Ableitung der inneren Energie
U_{cF}	spezifische Bruchenergie pro Volumeneinheit der Bruchzone (Druckbeanspruchung)

U_{cFl}	lokal dissipierte Energie pro Volumeneinheit der Bruchzone nach erreichter Bruchstauchung
U_i	spezifische Verformungsenergie (elastische Energie bei Entlastung)
U_i^*	spezifische Ergänzungsenergie (komplementäre Deformationsenergie)
U_n	Überlappung in *n*-Richtung
V	potentielle Energie der äusseren Kräfte; Potentialfunktion; Querkraft; Volumen
$V_{mit\ Sand}$	Durchstanzlast mit Sandeindeckung
$V_{ohne\ Sand}$	Durchstanzlast ohne Eindeckung
V_t	konzentrierte Querkraft an einer Diskontinuitätslinie
V_z	Querkraft
W	Durchbiegung der Platte beim Aufprallort
$\dot{W}$	Geschwindigkeit der Platte beim Aufprallort; „gemeinsame“ Geschwindigkeit des Aufprallkörpers und Platte am Aufprallort; mechanische Leistung der inneren Kräfte
$\ddot{W}$	Beschleunigung der Platte beim Aufprallort
$W_{e,I}$	äussere Arbeit einer Impulsbelastung
W_e	Arbeit der äusseren Kräfte
W_f	oberer Grenzwert für die maximale Durchbiegung
$W_{\max}$	Maximum der Formänderungsarbeit
$W_{\max,\ fsy+20\ \%}$	maximale bleibende Durchbiegung mit um 20% erhöhter (dynamischer) Fliessfestigkeit des Betonstahls
W_{res}	bleibende (engl.: residual) Durchbiegung
$W_{res,Versuch,\ \dots}$	gemessene bleibende Durchbiegung im Versuch mit (Eindeckungsmaterial und) Fallhöhe
W_s	Formänderungsarbeit
W_{tot}	bleibende (plastische) Gesamtverschiebung
W^*_{tot}	bleibende (plastische) Gesamtverschiebung (Modalform-Näherungslösung)
$\boldsymbol{Y}$, Y	Fliessfläche für positive (plastischen) Krümmungsinkremente
Y'	Fliessfläche für negative (plastischen) Krümmungsinkremente
Y_m	Fliessfläche mit Singularitäten
Y_1	Coulomb'sche Fliessbedingung

Lateinische Kleinbuchstaben

$\boldsymbol{a}$	Beschleunigung
a	Variable der Ellipse; Seitenlänge; Beschleunigung
a^*	Skalierfaktor für orthotrope Platte
a_s	Querschnittsfläche der unteren Bewehrung bezogen auf die Einheitsbreite
a'_s	Querschnittsfläche der oberen Bewehrung bezogen auf die Einheitsbreite
$a(t)$	Beschleunigungsfunktion $a(t) = F(t)/m$
a_{i-1}, a_{i-2}	Beschleunigung an den Stützstellen *i*-1, *i*-2
b	Variable der Ellipse; Seitenlänge

b^*	Seitenlänge einer orthotropen Platte
b_L	Breite eines Auflagers
c	Kohäsion; geschwindigkeitsproportionale Dämpfung
$c(\alpha)$	fiktive Kohäsion
$\boldsymbol{d}$	Vektor des bezogenen Biegewiderstands
d	statische Höhe; Eindringtiefe des Aufprallkörpers in die granulare Eindeckung
$damp$	lokale Dämpfung (DEM)
d_m	mittlere statische Höhe
$d_{\max}$	maximale Eindringtiefe des Aufprallkörpers in die granulare Eindeckung
$\mathrm{d}n$	infinitesimale Breite der Diskontinuitätslinie
d_v	Hebelarm der inneren Kräfte
e	Eindeckungsstärke; Fehler
$e_{\min}$, $e_{\max}$	minimale respektive maximale Porenzahl
e_w, e_w^*	Fehler; Fehler zwischen analytischer Lösung und Näherungslösung (Modalform-Näherungslösung)
$e_w^{\text{EP-QS,EP}}$	Fehler zwischen der numerischen Lösung und der Näherungslösung des Systems unter einer quasi-statischen Belastung (EP: linear elastisch-ideal plastisches Masse-Feder-Modell)
$e_w^{\text{EP-I,EP}}$	Fehler zwischen der numerischen Lösung und der Näherungslösung des Systems unter einer Impulsbelastung (EP: linear elastisch-ideal plastisches Masse-Feder-Modell)
e_0	Aufprallenergieverhältnis (Verhältnis der kinetischen Energie eines Aufprallkörpers zum Bauwerkswiderstand)
f	Eigenfrequenz
f_c	einachsige Druckfestigkeit des Betons; effektive einachsige Druckfestigkeit des Betons
$f_{c,dyn}$	dynamische Druckfestigkeit des Betons
f_{cc}	Zylinderdruckfestigkeit des Betons
f_{cm}	mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons
f_{cm0}	Referenzwert der mittleren Zylinderdruckfestigkeit des Betons
f_{ct}	Zugfestigkeit des Betons
$f_{ct,dyn}$	dynamische Zugfestigkeit des Betons
f_{ctm}	mittlere Zugfestigkeit des Betons
f_{cw}	Würfeldruckfestigkeit des Betons
f_{su}	Zugfestigkeit des Betonstahls
$f_{su,dyn}$	dynamische Zugfestigkeit des Betonstahls
f_{sy}	Fliessspannung/Fliessfestigkeit des Betonstahls
$f_{sy,dyn}$	dynamische Fliessspannung/Fliessfestigkeit des Betonstahls
$f(\sigma,\varepsilon,\dot{\sigma},\dot{\varepsilon},t)$	allgemeine Funktion zur Beschreibung des Formänderungsvorganges
h	Kennzeichnung für Kompaktionsgrad hoch (high)
h	Plattenstärke
h_{eff}	mitwirkende Breite der Betonzugzone
i	Index
i, ii	Plattenteile

k	Verhältnis der Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit des Betons; Federsteifigkeit
k_E	von Zuschlag des Betons abhängige Konstante
k_e	äquivalente Steifigkeit (Masse-Feder-Modell)
k_n	Normalsteifigkeit (mikromechanischer Parameter)
k_s	Schubsteifigkeit (mikromechanischer Parameter)
l	Länge; Spannweite; Zylinderhöhe
l_{pl}	fiktive plastische Gelenklänge
l_s	Bruchzonenhöhe
l_v	Verbundlänge
m	Kennzeichnung für Kompaktionsgrad mittel (medium)
m	Masse; Masse des Aufprallkörpers; Masse zweier vereinter Körper 1 und 2 ($m = m_1 + m_2$); Halbwellenzahl in x-Richtung
m_B	Masse pro Längeneinheit (Balken)
m^*	konzentrierte (äquivalente) Masse
m_e	zur kontinuierlich verteilten Masse des Tragwerks äquivalente Masse (Masse-Feder-Modell)
m_{in}	Biegemoment in der i-ten Fliessgelenklinie
m_{ixu}, m_{iyu},	Biegewiderstand in x- bzw. y-Richtung in der i-ten Fliessgelenklinie
m_n, m_t	transformiertes Biegemoment in n- respektive t-Richtung
$m^i{}_n$, $m^{ii}{}_n$	Biegemomente beiderseits der statischen Diskontinuitätslinie
m_{nu}, m_{tu}	transformierter Biegewiderstand in n- respektive t-Richtung
m_r, m_φ	Biegemomente in Zylinderkoordinaten
$m_{r\varphi}$, $m_{\varphi r}$	Drillmomente in Zylinderkoordinaten
m_{tn}	transformiertes Drillmoment
$m^i{}_{tn}$, $m^{ii}{}_{tn}$	Drillmomente beiderseits der statischen Diskontinuitätslinie
m_{tnu}	transformierter Drillmomentwiderstand
m_u	positiver Biegewiderstand (isotrope Bewehrung)
$m_{u,\, fsy+20\,\%}$	positiver Biegewiderstand mit um 20% erhöhter (dynamischer) Fliessfestigkeit des Betonstahls
m_u^i	Biegewiderstand der i-ten Bewehrungslage
m'_u	negativer Biegewiderstand (isotrope Bewehrung)
m_{uc}	Biegewiderstand infolge Betonbruch
m_{us}	Biegewiderstand unter Berücksichtigung der Druckbewehrung
m_x, m_y	Biegemoment in x- respektive y-Richtung
m_{xu}, m_{yu}	positiver Biegewiderstand in x- respektive y-Richtung
$m_{xu,\, fsy+20\,\%}$, $m_{yu,\, fsy+20\,\%}$	positiver Biegewiderstand in x- respektive y-Richtung mit um 20% erhöhter (dynamischer) Fliessfestigkeit des Betonstahls
m_{xy}	Drillmoment
m_{xyu}	positiver Drillmomentenwiderstand
m'_{xu}, m'_{yu}	negativer Biegewiderstand in x- respektive y-Richtung
$m'_{xu,\, fsy+20\,\%}$, $m'_{yu,\, fsy+20\,\%}$	negativer Biegewiderstand in x- respektive y-Richtung mit um 20% erhöhter (dynamischer) Fliessfestigkeit des Betonstahls
m'_{xyu}	negativer Drillmomentenwiderstand
m_1, m_2	Hauptmomente in Richtung φ_1 respektive φ_2; Masse von Körper 1 respektive Körper 2 beim Stoss

n	Porosität; Halbwellenzahl in y-Richtung; grösster Wert eines Index; Senkrechte zur Richtung der Fliessgelenklinie
n_j	Einheitsnormalenvektoren der Oberfläche
n_n	Membrannormalkraft in n-Richtung
n_{tn}	Membranschubkraft
p	Spannung
q	Materialkonstante; Streckenlast; verteilte Belastung
q^*	transformierte, verteilte Belastung (Affinitätstheorem)
q_B	Eigengewicht der Stahlbetonplatte
q_i	auf die Oberfläche S_q eingeprägte Spannungen; einparametrige Oberflächenkraft
$\bar{q}_i$	auf die Oberfläche S_u wirkende Reaktionskraft
$\dot{q}_i$	verallgemeinerte Verformungsgeschwindigkeit
q_{i0}	beliebige Bezugsbelastung (konstante Grundlast)
q_K	Eigengewicht der Kieseindeckung
q_k	oberer Grenzwert der Traglast nach Plastizitätstheorie
q_n	kontinuierliche Streckenlast (Stützkraft) entlang einer Diskontinuitätslinie
$q(t)$	zeitabhängige Funktion des Kraftstosses
q_u	Traglast der vollständigen Lösung nach Plastizitätstheorie
q_0	Maximalwert einer rechteckförmigen Stossfunktion $q(t)$
$\boldsymbol{r}$	Ortsvektor
r	Radius; Verhältnis des Bauwerkswiderstands zur äquivalenten Masse (Masse-Feder-Modell)
r_i	Abstand zum Aufprallort $(x,y) = (0,0)$ zur Bestimmung der Spannungsverteilung
$\dot{\boldsymbol{r}}$	einfache zeitliche Ableitung des Ortsvektors (Geschwindigkeitsvektor)
$\ddot{\boldsymbol{r}}$	zweifache zeitliche Ableitung des Ortsvektors (Beschleunigungsvektor)
s	Kennzeichnung für Kompaktionsgrad klein (small)
s	Abstand; Bewehrungsabstand
s_r	theoretischer Rissabstand
s_{r0}	maximaler Rissabstand
t	Zeit; Richtung der Fliessgelenklinie; Plattendicke
t_c	Korrelationsparameter nach Youngdahl
t_d	Stossdauer
t_F	Zeitpunkt beim Erreichen der maximalen Aufprallkraft
t_f	Dauer der Tragwerksbewegung (starr-plastische Modellbildung)
t_f^k	unterer Grenzwert der Dauer der Tragwerksantwort
t_i	auf ein System einwirkende Volumenkräfte
t_{i0}	beliebige Bezugslast
t_i^d	auf einen Körper wirkende Volumenkräfte (dynamisches System)
t_m	Zeitpunkt beim Erreichen der maximalen Verschiebung
t_w	Zeitpunkt beim Erreichen der maximalen Durchbiegung am Aufprallort

t_0	Zeitpunkt des Stossbeginns
u_i	Verschiebung in *i*-Richtung
u_i^k	kinematisch zulässiger Verschiebungszustand
u_i^0	vorgeschriebene Verschiebung an der Oberfläche des Systems
$\dot{u}_i^u$	mit der Traglast verträgliche Verschiebungsgeschwindigkeit
$\dot{u}_n$	Verschiebungsgeschwindigkeit in *n*-Richtung
$\dot{u}_t$	Verschiebungsgeschwindigkeit in *t*-Richtung
u_x, u_y	Verschiebung in *x*- bzw. *y*-Richtung
$\dot{u}_0$	zeitliche Ableitung der horizontalen Verschiebungen der Bezugsebene der Platte in *x*-Richtung
$\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$	Geschwindigkeit eines Balkens an der Stelle 1 respektive 2
$\dot{u}_\alpha$, $\ddot{u}_\alpha$	Geschwindigkeits- respektive Beschleunigungsvektor eines Balkens an der Stelle α
$\boldsymbol{v}$, v	Geschwindigkeit
$\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde{v}$	virtuelle Geschwindigkeit
$v(x,y)$	Geschwindigkeit
$\boldsymbol{v}_i$, v_i	impulsartige Geschwindigkeit
$\dot{v}_i^d$	Beschleunigung (dynamisches System)
v_i^k, $\dot{u}_i^k$	kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld; virtuelle Geschwindigkeit
v_n, v_t	Querkraft in *n*- respektive *t*-Richtung
$v^i{}_n$, $v^{ii}{}_n$	Querkräfte beiderseits der statischen Diskontinuitätslinie
v_r	Querkraft (Fächer)
v_x, v_y	Querkraft in *x*- respektive *y*-Richtung
v_0	Hauptquerkraft; Geschwindigkeit des aufprallenden Körpers unmittelbar vor dem Stoss; Anfangsgeschwindigkeit (bei Impulsbelastung)
v_{0A}, v_{0B}	maximale Hauptquerkraft in Ecke A respektive Ecke B
v_{0i}	Anfangsbeanspruchung eines Körpers durch ein impulsartiges Geschwindigkeitsfeld (t = 0)
$v^*(t)$	zeitabhängige, modale Geschwindigkeitsamplitude (Modalform-Näherungslösung)
$v_0^*(t)$	Anfangsgeschwindigkeitsfeld (Modalform-Näherungslösung)
$\dot{v}_0$	zeitliche Ableitung der horizontalen Verschiebungen der Bezugsebene der Platte in *y*-Richtung
$\dot{v}_0^*(t)$	Anfangsbeschleunigungsfeld (Modalform-Näherungslösung)
v_1, v_2	Geschwindigkeit von Körper 1 respektive Körper 2
v_{1a}, v_{2a}	Geschwindigkeit von Körper 1 respektive Körper 2 unmittelbar vor dem Stoss
v_{1e}, v_{2e}	Geschwindigkeit von Körper 1 respektive Körper 2 unmittelbar nach dem Stoss
v_α^0	Anfangsgeschwindigkeit eines Balkens an der Stelle α
v_φ	Querkraft in φ-Richtung (Zylinderkoordinaten)
w	Durchbiegung; Wassergehalt
$w(t)$	zeitabhängige Durchbiegung
$\dot{w}$	einfache (zeitliche) Ableitung der Durchbiegung (Geschwindigkeit)

$\dot{w}_I$, $\dot{w}_{II}$	Geschwindigkeitsfelder der Segmente I und II
$\ddot{w}$	zweifache (zeitliche) Ableitung der Durchbiegung (Beschleunigung)
w_f	maximale Durchbiegung (starr-plastische Modellbildung); bleibende plastische Verschiebung
w_i	Wegordinate
$w_i^k(t)$	kinematisch zulässiges Verschiebungsfeld (zeitabhängige Amplitude des Verschiebungsfeldes)
$\dot{w}_i$	Geschwindigkeitsordinate
$\dot{w}_i^k$	kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld; virtuelles Geschwindigkeitsfeld
$\dot{w}_i^*$	modales Geschwindigkeitsfeld (Modalform-Nährungslösung)
$\ddot{w}_i$	Beschleunigungsordinate
$\ddot{w}_i^k$	kinematisch zulässiges Beschleunigungsfeld
$\ddot{w}_i^*$	modales Beschleunigungsfeld (Modalform-Nährungslösung)
$w_{i\text{-}1}$, $w_{i\text{-}2}$	Verschiebung an den Stützstellen *i*-1, *i*-2
$\dot{w}_{i\text{-}1}$, $\dot{w}_{i\text{-}2}$	Geschwindigkeit an den Stützstellen *i*-1, *i*-2
$\ddot{w}_{i\text{-}1}$, $\ddot{w}_{i\text{-}2}$	Beschleunigung an den Stützstellen *i*-1, *i*-2
$\dot{w}_{0i}$	impulsartiges, wirkliches Geschwindigkeitsfeld
$w_{\max}$	maximale Durchbiegung
w_{res}	bleibende Durchbiegung der Platte („res“: Abkürzung von „residual“)
w_u	Durchbiegung beim Erreichen des Bruchzustandes
w_y	Durchbiegung bei Fliessbeginn
x, $\bar{x}$	Koordinaten
x, y, z	Koordinatenachsen des rechtwinkligen Koordinatensystems
x^*, y^*, z^*	transformierte Koordinaten, Abmessungen (Affinitätstheorem)
$y_{\max}$	maximale Verschiebung eines linear elastisch reagierenden Masse-Feder-Modells
y_{stat}	statische Verschiebung eines linear elastisch reagierenden Masse-Feder-Modells
$y_{stat,m}$	statische Verschiebung der Körper 1 und 2 mit gemeinsamer Masse $m = m_1 + m_2$
$y_{stat,m1}$	statische Verschiebung des Körpers 1 mit Masse m_1
$y_{stat,m2}$	statische Verschiebung des Körpers 2 mit Masse m_2
z_c	Höhe der Betondruckzone
z_{cx}, z_{cy}	Höhe der Betondruckzone in *x*- bzw. *y*-Richtung
z_p	Abstand in einer Ebene parallel zur unverformten Bezugsebene im Punkt P
z_s	*z*-Ordinate der unteren Bewehrung
z'_s	*z*-Ordinate der oberen Bewehrung

Griechische Kleinbuchstaben

α	fiktiver Winkel der inneren Reibung; (dynamischer) Koeffizient der davon abhängig ist, ob der Fliess- oder Bruchzustand des Betonstahls betrachtet wird
$\dot{\alpha}$	Verdrehungsgeschwindigkeitswinkel

α_{fsy}	Koeffizient zur Berechnung der dynamischen Fliessfestigkeit des Betonstahls
α_{fsu}	Koeffizient zur Berechnung der dynamischen Zugfestigkeit des Betonstahls
α_s	Materialparameter
β	Materialkonstante, Öffnungswinkel Fächer
β_w	Würfeldruckfestigkeit
γ	Massenverhältnis
γ_B	spezifisches Gewicht des Betons
γ_K	spezifisches Gewicht der Kieseindeckung
$\dot{\gamma}_{nt}$	Schubverzerrungsgeschwindigkeit in *nt*-Richtung
γ_s	Materialparameter
γ_{xy}, γ_{yx}	Schubverzerrung in *xy*- respektive *yx*-Richtung
$\dot{\gamma}_{xz}$, $\dot{\gamma}_{yz}$	Schubverzerrungsgeschwindigkeit in *xz*- respektive *yz*-Richtung
δ	Materialkonstante; Schlupf (Relativverschiebung zwischen Bewehrung und Beton); Variationssymbol zur Kennzeichnung von virtuellen Grössen
δ^*	Materialkonstante
$\delta(t)$	Dirac-Funktion (Impulsfunktion, Stossfunktion)
δA	virtuelle Arbeit
$\delta \overline{A}$	virtuelle Ergänzungsarbeit
δA_a	virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte
$\delta \overline{A}_a$	virtuelle äussere Ergänzungsarbeit
δA_i	virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
$\delta \overline{A}_i$	virtuelle innere Ergänzungsarbeit
δF_i	virtuelle Kraftänderung
$\delta \overline{q}_i$	virtuelle Reaktionsänderung
δu_i	virtuelle Verschiebungen
$\delta \varepsilon_{ij}$	virtuelle Verzerrungen
$\delta \sigma_{ij}$, $\delta \sigma_{ij}$	virtuelle Spannungen
$\dot{\delta}_n$	relative Verschiebungsgeschwindigkeit auf der Höhe der Plattenmittelebene
ε	eindimensionale Verzerrung
$\dot{\varepsilon}$	eindimensionale Verzerrungsgeschwindigkeit (Dehngeschwindigkeit)
ε_c	Betonstauchung
$\dot{\varepsilon}_c$	Dehngeschwindigkeit des Betons auf Druck
$\dot{\varepsilon}_{c0}$	quasi-statische Dehngeschwindigkeit des Betons (Druckbeanspruchung)
ε_{c3}	Hauptverzerrung des Betons
$\dot{\varepsilon}_{ct}$	Dehngeschwindigkeit des Betons auf Zug
$\dot{\varepsilon}_{ct0}$	quasi-statische Dehngeschwindigkeit des Betons (Zugbeanspruchung)
ε_{cu}	Betonbruchstauchung
ε_{ij}, ε_{ji}	Verzerrungstensor
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Verzerrungsgeschwindigkeit

ε_{ij}^{d}	plastische (irreversible) Verzerrungen
ε_{ij}^{k}	kinematisch zulässiger Verzerrungszustand
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{k}$	kinematisch zulässige Verzerrungsgeschwindigkeit
ε_{ij}^{p}	plastische Verzerrungen
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$	plastische Verzerrungsgeschwindigkeit
ε_{ij}^{q}	elastische (reversible) Verzerrungen
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{u}$	mit der Traglast verträgliche Verzerrungsgeschwindigkeit
ε_{m}	mittlere Dehnung
$\dot{\varepsilon}_{n}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *n*-Richtung
$\dot{\varepsilon}_{n}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *n*-Richtung
$\dot{\varepsilon}_{n0}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *n*-Richtung in Plattenmitte
ε_{s}	Dehnung des Betonstahls
$\dot{\varepsilon}_{s}$	Dehngeschwindigkeit des Betonstahls
ε_{sm}	mittlere Dehnung des Stahlbetonzugglieds
ε_{smu}	mittlere Dehnung des Stahlbetonzugglieds beim Erreichen der Zugfestigkeit
ε_{smy}	mittlere Dehnung des Stahlbetonzugglieds beim Erreichen der Fliessfestigkeit
$\varepsilon_{sr,\max}$	maximale Stahldehnung im Riss
ε_{su}	Bruchdehnung des Betonstahls
ε_{sy}	Fliessdehnung des Betonstahls
$\dot{\varepsilon}_{t}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *t*-Richtung
ε_{x}, ε_{y}	Dehnung (Verzerrung) in *x*- respektive *y*-Richtung
$\dot{\varepsilon}_{x}$, $\dot{\varepsilon}_{z}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *x*- respektive *z*-Richtung
$\dot{\varepsilon}_{x0}$, $\dot{\varepsilon}_{xy0}$	Verzerrungsgeschwindigkeit in *x*- respektive *xy*-Richtung auf Höhe der Plattenmittelebene
$\dot{\varepsilon}_{1}$, $\dot{\varepsilon}_{2}$, $\dot{\varepsilon}_{3}$	Hauptverzerrungsgeschwindigkeiten
ζ	Lagekoordinate des plastischen Gelenks (ausgehend von der Lasteinleitungsstelle); Dämpfungsrate; Verhältnis Verformungsarbeit zu Dissipationsenergie
ζ_{Q}	Verhältnis Verformungsarbeit zu Dissipationsenergie bei quasi-statischer Belastung
η	Lastintensitätsfaktor; totale Entropie in lokaler Form
η_{t}	Beiwert zur Erhöhung der Betondruckfestigkeit für stossartige Einwirkungen
θ	absolute Temperatur; Rotationswinkel, Neigung des Betondruckspannungsfelds
θ_{pl}	plastischer Rotationswinkel (Verformungsvermögen)
$\theta_{pl,erf}$	erforderlicher plastischer Rotationswinkel
$\dot{\theta}_{1}$, $\dot{\theta}_{2}$	Rotationsgeschwindigkeit eines Balkens an der Stelle 1 respektive 2
$\dot{\theta}_{\alpha}$	Rotationsgeschwindigkeit eines Balkens an der Stelle α
κ	Proportionalitätsfaktor
κ_{k}	kinematisch zulässiger Lastfaktor (Proportionalitätsfaktor)
κ_{s}	statisch zulässiger Lastfaktor (Proportionalitätsfaktor)

κ_u	Proportionalitätsfaktor der Traglast
λ	Schranke für Rissabstand; Verhältnis Dissipations- zu kinetischer Energie
$\dot{\lambda}$	Skalierungsfaktor des Fliessgesetzes, in [m/s]
λ_A	Verhältnis Dissipations- zu kinetischer Energie bei analytischer Lösung
λ_e	Verhältnis von Einspannungs-Biegewiderstand und positivem Biegewiderstand von Platten
λ_I	Verhältnis Dissipations- zu kinetischer Energie bei Impulsbelastung
λ_i	Verhältnis von negativem und positivem Biegewiderstand von Platten
$\dot{\lambda}_m$	Skalierungsfaktor des Fliessgesetzes für Fliessflächen mit Singularitäten, in [m/s]
μ	Kontaktreibungswinkel; Masse pro Flächeneinheit (Platte); Duktilität; Verhältnis der positiven Biegemomente in *y*- und *x*-Richtung
μ'	Verhältnis der negativen Biegemomente in *y*- und *x*-Richtung
μ_B	Masse der Stahlbetonplatte pro Flächeneinheit
μ_K	Masse der Kieseindeckung pro Flächeneinheit
μ^*_K	zu μ_K äquivalente Masse der Kieseindeckung
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte; Bewehrungsgehalt; Hauptkrümmungsradius
$\rho_{\min}$	minimaler Bewehrungsgehalt
$\rho_{\min,z}$	minimaler Querkraftbewehrungsgehalt
ρ_t	Feuchtdichte
ρ_s	Dichte der granularen Partikel
ρ_x, ρ_z	Bewehrungsgehalt der Biegebewehrung in *x*-Richtung respektive der Querkraftbewehrung
$\rho \dot{v}_i^d$	Trägheitskräfte (dynamisches System)
σ	eindimensionale Normalspannung
$\dot{\sigma}$	eindimensionale Änderungsrate der Normalspannung
σ_c	Spannung des Betons
$\sigma_{c,\max}$	maximale Druckfestigkeit des Betons
σ_{c3}	Betonhauptspannung (Druckspannung)
σ_d	dynamische Druckfestigkeit des Betons
σ_{ij}, σ_{ji}	Spannungstensor
σ_i, σ_j, σ_k	Hauptspannungen
$\dot{\sigma}_{ij}$	Änderungsrate der Spannung
σ_{ij}^d	plastische Spannungen; dynamisch zulässiger Spannungszustand
σ_{ij}^k	ein mit dem kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verträglicher Spannungszustand
σ_{ij}^s	beliebiger, statisch zulässiger Spannungszustand, der nirgends die Fliessgrenze verletzt
σ_{ij}^u	ein der Traglast zugeordneter Spannungszustand

σ_{ij}^{*}	Spannungstensor: beliebiger, nicht verträglicher Spannungszustand an der Fliessfläche oder im aplastischen Bereich
σ_n^i, σ_n^{ii}	Normalspannungen an einer Diskontinuitätslinie in *n*-Richtung
σ_s	Spannung des Betonstahls
σ_{sr}	Stahlspannung am Riss
σ_{sz}	Bemessungsspannung der Querkraftbewehrung in *z*-Richtung
σ_t^i, σ_t^{ii}	tangentiale Normalspannungen an einer Diskontinuitätslinie
σ_y	Fliessgrenze
σ_1, σ_2, σ_3	Hauptspannungen
τ	Zeit; Schubspannung
τ_b	Verbundschubspannung
τ_{b0}, τ_{b1}	Verbundschubspannungsniveaus
$\dot{\tau}_b$	Verbundschubspannungsgeschwindigkeit
$\tau_{b,dyn}$	dynamische Verbundschubspannung
$\dot{\tau}_{b,dyn}$	dynamische Verbundschubspannungsgeschwindigkeit
$\tau_{b,\max}$	maximale Verbundschubspannung
τ_{c0}	Hauptschubspannung im Plattenkern
τ_{tn}^i, τ_{tn}^{ii}	Schubspannungen an einer Diskontinuitätslinie in *t*-Richtung
φ	Winkel der inneren Reibung; Winkel; Stossfaktor eines linear elastisch reagierenden Masse-Feder-Modells
φ_n, φ_u, φ'_u	Winkel der Richtung von Fliessgelenklinien
φ_0, φ_1	Winkel der Hauptrichtungen der Hauptquerkräfte respektive Hauptmomente
$\dot{\chi}_n$	verallgemeinerte Verzerrungsgeschwindigkeiten
χ_x, χ_y	(elastische) Krümmung in *x*- respektive *y*-Richtung
χ_{xy}	(elastische) Krümmung in *xy*-Richtung
$\dot{\chi}_x$, $\dot{\chi}_y$	(plastische) Krümmungsinkremente in *x*- respektive *y*-Richtung
$\dot{\chi}_{xy}$	(plastische) Krümmungsinkremente in *xy*-Richtung
ω	mechanischer Bewehrungsgehalt; Eigenkreisfrequenz
$\dot{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit
$\dot{\omega}_{in}$	relative Winkelgeschwindigkeit in der *i*-ten Fliessgelenklinie
$\dot{\omega}_n$	relative Winkelgeschwindigkeit
$\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$	plastischer Rotationswinkel um die *x*- respektive *y*-Achse

Griechische Grossbuchstaben

Δ	Laplace-Operator; Differenz
$\Delta_{\max}$	maximale Abweichung
ΔF_s	Zunahme der Schubkontaktkraft
ΔT	Verlust an Bewegungsenergie (kinetische Energie)
Δt	Zeitschritt
ΔU_s	Zunahme der Überlappung in tangentiale Richtung
$\Delta\sigma_s$	Spannungsänderung in der Bewehrung

$\Delta_0(t)$	Differenz der kinetischen Energien aus dem initialen Geschwindigkeitsfeld und dem impulsartig aufgebrachten, wirklichen Geschwindigkeitsfeld
Λ, Λ', Λ'_y	Verhältniszahlen
ϕ	innerer Reibungswinkel (makromechanischer Parameter)
$\phi_i^*(x_j)$	Formfunktion (Modalform oder Eigenform)
$\phi_i^k(x_j)$	zeitunabhängige Formfunktion (Näherungsverfahren von Kaliszky)
ϕ_μ	innerer Reibungswinkel (mikromechanischer Parameter)

Operatoren

∇	Gradient
$_{,x}$ $_{,y}$	partielle Ableitung nach *x* respektive *y*
$_{,i}$ $_{,j}$	partielle Ableitung nach *i* respektive *j*

Sonderzeichen

Ø	Durchmesser des Bewehrungsstabes
1, 2, 3	Hauptrichtungen
I, II	charakteristische Richtungen

Teil B: Probabilistische Betrachtungen und überarbeitetes Bemessungskonzept

8 Einleitung

Der Schutz vor Steinschlag sowohl auf den Verkehrsachsen als auch im Siedlungsraum ist für eine sichere Nutzung alpiner Gebiete notwendig. Das Auftreten von Steinschlag ist jeweils sehr lokal und kann zerstörerische Energien aufbringen, vor der Bevölkerung und Infrastruktur geschützt werden müssen. Eine Schutzmöglichkeit für Verkehrswegen sind Steinschlagschutzgalerien, die gegen mittelgrosse Ereignisse (200-3000 kJ Einschlagenergie, [ASTRA 2008]) Schutz bieten. Der Bestand von Steinschlagschutzgalerien an den Schweizer Verkehrswegen wurde von [Schellenberg 2008] auf 347 Objekten geschätzt. Einzelne Galerien sind über hundert Jahre alt, der grösste Teil wurde jedoch in den 1960er bis 1980er Jahren gebaut.

8.1 Einschlägiges Norm- und Richtlinienwerk

Grundlage für die Bemessung von Tragwerken in der Schweiz sind die SIA Tragwerksnormen. Für Galerietragwerke sind insbesondere [SIA 260 2013], [SIA 261 2014], [SIA 262 2013] und [SIA 269 2011] relevant. Die Norm SIA 260 beschreibt die Projektierungsgrundlagen, die Norm SIA 261 definiert Einwirkungen auf Tragwerke, wobei derzeit keine Methode zur Bestimmung der Steinschlageinwirkungen vorgeschlagen wird. Die Norm SIA 262 beschreibt die Bemessung von Betontragwerken. Bei der Überprüfung von bestehenden Galerien kann die Norm SIA 269 eingesetzt werden.

Im Verantwortungsbereich des Bundesamts für Strasse (ASTRA) gilt seit 1998 eine Richtlinie in der die Bestimmung der Steinschlageinwirkung detailliert behandelt wird. Die Richtlinie wurde im Jahr 2008 überarbeitet und in die heute gültige Version gebracht: ASTRA 12006 «Einwirkungen infolge Steinschlag auf Schutzgalerien» [ASTRA 2008]. Sie stellt eine Konkretisierung zur Norm SIA 261 für Steinschlagschutzgalerien dar. Für Galerien auf dem Nationalstrassennetz ist die Richtlinie ASTRA 12006 bindend und hat Vorrang vor der Norm SIA 261. Ausserhalb des Nationalstrassennetzes (also z.B. für Kantonstrassen) ist die Richtlinie ASTRA 12006 nicht bindend; die Anwendung ist ein Bauherrenentscheid.

8.2 Zielsetzung

Die Richtlinie ASTRA 12006 ist eine Anpassung der ursprünglichen ASTRA Richtlinie aus dem Jahr 1998 [ASTRA/SBB 1998] an die neuen SIA-Tragwerksnormen der 260er-Generation. Sie basiert weitgehen auf dem Wissenstand von Mitte der 1990er Jahren. Seither wurde jedoch in einigen Forschungsarbeiten (z.B. [Schellenberg et al. 2011], [Schubert et al. 2010], [Schellenberg et al. 2011], [Straub & Schubert 2008]) das Grundwissen zu Steinschlag und zur Interaktion zwischen Stein, Erdeindeckung und Galerietragwerk entscheidend weiterentwickelt. In diesen Arbeiten wurden auch einige Versuchsserien durchgeführt.

Das erste Ziel dieses Berichtes ist deshalb, das Bemessungskonzept der Richtlinie ASTRA 12006 in Bezug zu diesen Versuchen zu setzen. Insbesondere wird die dynamische Einwirkung gemäss ASTRA 12006 mit den Versuchsergebnissen verglichen.

Das zweite Ziel ist, die Konstruktionsbeiwerte mit dem heutigen Wissensstand zu beleuchten.

Das dritte Ziel befasst sich mit Probabilistik. Die heutigen Tragwerksnormen werden als semi-probabilistisch bezeichnet. Das bedeutet, dass das angestrebte Sicherheitsniveau gewährleistet wird, indem Tragwerkswiderstand und Einwirkung mit Teilsicherheitsbeiwerten skaliert werden. Die Teilsicherheitsbeiwerte werden jeweils aus expliziten probabilistischen Überlegungen abgeleitet. Solche Überlegungen zur Steinschlageinwirkung wurden bisher nicht gemacht und werden hier erarbeitet.

Das vierte Ziel ist ein überarbeitetes Bemessungskonzept vorzuschlagen, das:

- möglichst nah dem heutigen Bemessungskonzept folgt, und
- ein angemessenes Sicherheitsniveau für alle Galerien sicherstellt.

Widerstandseitig wird das Bemessungskonzept auf die SIA-Tragwerksnormen abgestützt; die nachfolgenden Ausführungen konzentrieren sich deshalb vor allem auf die Modellierung der Einwirkung.

Das in Teil A in Kapitel 7.1.3 vorgeschlagene starr-plastische Näherungsverfahren ist in diese Überlegungen noch nicht eingeflossen, da es als Alternative lediglich das globale duktile Versagen abdeckt, nicht aber das lokale spröde. Zudem gibt es noch zu wenig Praxis und Erfahrungswerte um eine Analyse durchzuführen, wie sie im Teil B für das konventionelle Verfahren durchgeführt wurde.

8.3 Vorgehen

Der erste Schritt ist die Analyse der Richtlinie ASTRA 12006 (Kapitel 9): das Bemessungskonzept und seine Entstehung werden beschrieben. Die Einwirkung nach ASTRA 12006 wird mit den angesprochenen Versuchsergebnissen verglichen und die so genannten Konstruktionsbeiwert werden untersucht. Zudem wird das Sicherheitsniveau einer Galerie, die mit den heutigen Normen und Richtlinien bemessen wurde, abgeschätzt. Aus diesen Untersuchungen wird Handlungsbedarf bezüglich einer Überarbeitung des Bemessungskonzeptes abgeleitet.

Um dem Handlungsbedarf nachzukommen, müssen einige Aspekte im Detail modelliert werden (Kapitel 10). Insbesondere werden

- die Unsicherheiten in der dynamischen Einwirkung explizit modelliert,
- ein angemessenes Sicherheitsniveau für Steinschlagschutzgalerien ermittelt und
- Teilsicherheitsbeiwerte bestimmt, die es erlauben, das angestrebte Sicherheitsniveau bei jeder Bemessungssituation einzuhalten.

Auf der Basis dieser Modelle wird ein überarbeitetes Bemessungskonzept vorgeschlagen (Kapitel 11). Ein Anwendungsbeispiel des Bemessungskonzepts wird im Kapitel 12 präsentiert. Im Kapitel 13 wird das heutige und das überarbeitete Bemessungskonzept verglichen, bevor im Kapitel 14 offene Fragen und Handlungsempfehlungen dargelegt werden.

9 Richtlinie ASTRA 12006

In diesem Kapitel wird die Richtlinie ASTRA 12006 untersucht. Die Kapitel 9.1 und 9.2 beschreiben die Richtlinie und deren Entstehung. In Kapitel 9.3.2 wird die Einwirkungsberechnung nach ASTRA 12006 mit Versuchsergebnissen verglichen. In Kapitel 9.3.3 werden die Konstruktionsbeiwerte untersucht. In Kapitel 9.3.4 wird das Sicherheitsniveau einer Galerie, die mit der Richtlinie bemessen ist, abgeschätzt. In Kapitel 9.4 wird eine Standortbestimmung gemacht und Handlungsbedarf erörtert.

9.1 Bemessung nach Richtlinie ASTRA 12006

Mit der Richtlinie ASTRA 12006 kann der Bemessungswert der Steinschlageinwirkung als statische Ersatzlast bestimmt werden, die Richtlinie ist somit eine Ergänzung zur Norm [SIA 261 2014] Bei der Bemessung einer Galerie wird sie zusammen mit den SIA-Tragwerksnormen den 260er Generation verwendet. Das Bemessungsprinzip, das dabei zum Einsatz kommt, ist das Konzept der Teilsicherheitsbeiwerte (auch «*Load-Resistance Factor Design*» genannt), siehe z.B. [Faber & Sørensen 2003], welches bei vielen anderen modernen Normwerken ebenfalls Anwendung findet. Dabei werden für jeden Versagensmechanismus zuerst charakteristische Werte des Widerstands und der Einwirkung bestimmt. Daraus werden durch Multiplikation/Division mit einem Sicherheitsfaktor γ die Bemessungswerte bestimmt.

Nachfolgend ist das Bemessungskonzept der Richtlinie zusammengefasst (Zitate aus der Richtlinie ASTRA 12006 sind *kursiv* mit Angabe des jeweiligen Richtlinienabsatzes).

Steinschlag wird gemäss Norm SIA 261, SIA261/1 als aussergewöhnliche Einwirkung behandelt (Absatz 2.1.6). *Der Steinschlag ist eine aus einer Naturgefahr resultierende Einwirkung infolge von Anprall.* […] *Der Bemessungswert der Auswirkung ist gemäss Norm SIA 260 zu ermitteln* (Richtlinienabsatz 3.2).

Der Bauherr legt das Schutzziel, die Nutzung und das massgebende Szenario fest (Absatz 3.3). Mit der Festlegung des Schutzziels kann der Bauherr das Sicherheitsniveau der Galerie steuern. In diesem Schritt sollte (zumindest implizit) die Konsequenzen eines Galerieversagen berücksichtigt werden.

Steinblöcke fallen meist nicht einzeln auf die Galerie, sondern als Teil einer Gesteinsmasse. Bei einer Bemessung wird […] *der massgebende Einzelblock als dynamische Einwirkung erfasst. Die Steinschlag-begleitende Gesteinsmassen werden als statische Einwirkung betrachtet und als Flächenlast behandelt. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass nicht alle Gesteinsblöcke gleichzeitig auf der Galerieeindeckung auftreffen* (Richtlinienabsatz 5.1).

Der Steinschlagexperte bestimmt die generelle Gefahrensituation infolge Steinschlag im Bereich der Galerie und bestimmt die Grössen m_k (charakteristischer Werte der Masse des Steinblocks) *und v_k* (charakteristischer Wert der Aufprallgeschwindigkeit) (Absatz 8.2). Daraus wird die dynamische Einwirkung F_k bestimmt: *Die Kraft F_k* […] *wird wie folgt ermittelt* (Richtlinienabsatz 6.7):

$$F_k = 2.8 \cdot e^{-0.5} \cdot r^{0.7} \cdot M_{E,k}^{0.4} \tan \varphi_k \left(\frac{m_k \cdot v_k^2}{2} \right)^{0.6} \tag{9.1}$$

wobei F_k der charakteristische Wert der Einwirkung am Aufprallort ist, r der Radius der Ersatzkugel, e die Schichtstärke der Eindeckung, $M_{E,k}$ der charakteristische Wert des statischen Zusammendrückungsmoduls des Eindeckungsmaterial und φ_k charakteristische Wert des Reibungswinkels des Eindeckungsmaterials.

Die dynamische Einwirkung F_k des Steinschlags wird mit dem Bemessungswert einer statischen Ersatzkraft A_d berücksichtigt, welche mit Hilfe eines Konstruktionsbeiwertes C ermittelt wird (Richtlinienabsatz 6.1). Der Bemessungswert A_d der Ersatzkraft bestimmt sich durch Multiplikation der dynamischen Einwirkung F_k und dem Konstruktionsbeiwert C (Richtlinienabsatz 7)*:*

$$A_d = C \cdot F_k \tag{9.2}$$

Der Wert des Konstruktionsbeiwertes ist bei duktilem Bruchverhalten C = 0.4 und bei sprödem Bruchverhalten C = 1.2.

Auf der Widerstandseite sind die Bemessungswerte für statische Belastungen zu verwenden. Die Erhöhung der Bemessungsbeiwerte für die Bemessungssituation Anprall ist in C berücksichtigt. Die Ziffern 4.2.1.4 und 4.2.2.3 in der Norm SIA 262 sind somit nicht anzuwenden (Richtlinienabsatz 7).

Der Reduktionsbeiwert ψ_2 gemäss SIA 260 Art 4.4.3.5 […] *ist für alle Galerien zu null anzunehmen* (Richtlinienabsatz 5.2).

In der Richtlinie sind keine Angaben über Teilsicherheitsbeiwerte γ_F für Einwirkungen gemacht. Gemäss Norm SIA 260 ist für aussergewöhnliche Anpralleinwirkung γ_F = 1 einzusetzen. Somit ist die Bemessungseinwirkung durch die Gleichungen (9.1) und (9.2) definiert.

9.2 Rückblick: Entstehung der Richtlinie ASTRA 12006

Um die Richtlinie ASTRA 12006 und deren Bemessungsprinzipien besser untersuchen zu können, und insbesondere auch das darin implizite Sicherheitsniveau beurteilen zu können, werden die Grundlagendokumente der Richtlinie untersucht. Dazu gehören [Montani & Descoedres 1996], [Bucher 1997] sowie [ASTRA/SBB 1998]. In den ersten beiden Dokumenten wurden experimentelle und theoretische Grundlagen erarbeitet, beim dritten Dokument handelt es sich um die Vorgänger-Richtlinie.

[Montani & Descoedres 1996] hat zum Ziel, die Grundlagen zur Berechnung der Steinschlageinwirkung auf Schutzbauten zu erarbeiten. Der wichtigste Beitrag der Arbeit sind ungefähr 80 Versuchsserien auf einer mit Schuttmaterial eingedeckten und für die Messung der dynamischen Einwirkung und Verschiebungen ausgerüsteten Decke. Daraus wird eine halb-empirische Formeln abgeleitet, die es erlaubt, die dynamische Kraft aufgrund der Einschlagenergie zu bestimmen.

[Bucher 1997] baut direkt auf [Montani & Descoedres 1996] auf: die Versuche von Montani werden mit numerischen Simulationen ergänzt und daraus die Formulierung einer Ersatzkraft für die dynamische Steinschlageinwirkung abgeleitet:

$$F = 1.25 \cdot e^{-0.3} \cdot r^{0.5} \cdot \left(m \cdot v^2\right)^{0.6} \left(M_E \tan\varphi\right)^{0.4} \tag{9.3}$$

Zur Berücksichtigung der erhöhten Baustofffestigkeiten und des dynamischen elasto-plastische Verhaltens des Tragwerks schlägt Bucher einen Bemessungsbeiwert C_d vor. Die Bemessungskraft ist dann $A_d = C_d \cdot F$. Die Werte C_d sind bei [Bucher 1997] aus einem Antwortspektrum in Funktion des Tragwerk-Plastifizierungsgrads und des Verhältnisses t_d/T

abgelesen, wobei t_d die Einwirkungsdauer und T die Eigenschwingperiode der Galerie ist. Bucher schlägt die Werte C = 0.4 für Duktilversagen und C = 1.2 für Sprödversagen vor.

Bucher macht keine Angaben zu Sicherheitsgedanken, die die Formulierung und Parametrisierung von F und C_d beeinflusst hätten. Es wird deshalb vorerst davon ausgegangen, dass Bucher F und A_d als einen Mittelwert (oder Median) der Einwirkung, die in Wirklichkeit bei gegebenem Ereignis und Erdeindeckung auftritt, angegeben hat.

Basierend auf den Arbeiten von [Montani & Descoedres 1996] und [Bucher 1997] wurde die Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] entwickelt. Die statische Ersatzkraft wird im Vergleich zu Bucher leicht abgeändert übernommen:

$$F = 2.8 \cdot e^{-0.5} \cdot r^{0.7} \cdot M_E^{0.4} \tan\varphi \left(\frac{m \cdot v^2}{2} \right)^{0.6} \tag{9.4}$$

Numerische Vergleiche der Gleichungen (9.3) und (9.4) haben gezeigt, dass für die meisten Parameter-Werte die letztere konservativer ist als jene von Bucher (mehr dazu in Kapitel 9.2.1). Die Konstruktionsbeiwerte C_d wurden ohne Änderung von Bucher übernommen. Gemäss der Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] können Steinschlagschutzgalerien mit einem normalen Ereignis bemessen werden (Wiederkehrperiode 30 Jahre) oder mit dem ausserordentlichen Ereignis (Wiederkehrperiode ≥ 100 Jahre). Für die Bemessung mit dem normalen Ereignis ist ein Lastbeiwert γ = 1.3 vorgeschrieben; bei der Bemessung mit dem ausserordentlichen Ereignis kommt kein Lastbeiwert zur Anwendung (γ = 1). Es ist Aufgabe des Bauherrn aufgrund von Risikoüberlegungen zu entscheiden, ob und wie das aussergewöhnliche Steinschlagereignis zu berücksichtigen ist.

Im Anhang der Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] sind einige Angaben zur Eintretenswahrscheinlichkeit des charakteristischen und des Bemessungsereignisses gegeben. Demnach ist bei einer Bemessung mit dem Normalereignis davon auszugehen, dass die Bemessungslast Q_d im Mittel alle 1500 Ereignisse überschritten wird.

Die Richtlinie ASTRA 12006 [ASTRA 2008] ist eine Weiterentwicklung der Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] und ersetzt diese. ASTRA 12006 ist insbesondere eine Anpassung der ursprünglichen Richtlinie an die neuen SIA-Tragwerksnormengeneration. Die charakteristische Einwirkung und die Konstruktionsbeiwerte wurden direkt übernommen. Wie bereits erwähnt wurde jedoch auf eine Definition der Bemessungsereignisse verzichtet und dem Bauherr überlassen, der somit über die Ereigniswahl das Sicherheitsniveau der Galerie beeinflussen kann. Die Steinschlageinwirkung wird als aussergewöhnliche Bemessungssituation gemäss Norm SIA 261 definiert. Entsprechend sind Lastbeiwerte und Reduktionsbeiwerte gemäss Norm SIA 260 Art. 4.4.3.5 γ = 1 und ψ_i = 0.

Ein wichtiger Unterschied zwischen den beiden ASTRA-Richtlinien [ASTRA 2008] und [ASTRA/SBB 1998] ist bei Wortwahl und Definitionen auszumachen. Insbesondere ist die Einwirkung F in der Richtlinie aus 1998 als «statische Ersatzlast» definiert, während in der neuen ASTRA 12006 F_k als «dynamische Einwirkung» bezeichnet ist. Trotz der unterschiedlichen Wortwahl dürfte dasselbe gemeint sein. Weiter ist in ASTRA 12006 von charakteristischen Werten die Rede (der Einwirkung, aber auch der Parameter, die in Gleichung (9.1) einfliessen). Gemäss Definition in der Norm SIA 261 kann unter charakteristische Werte «Mittelwert, oberer bzw. unterer Wert oder als Nennwert» verstanden werden. In der Norm SIA 261 wird für unterschiedliche Einwirkungskategorien angegeben was als charakteristischen Wert zu verstehen ist. Eine solche Angabe fehlt für in der Richtlinie ASTRA 12006, es ist somit nicht eindeutig was unter «charakteristischen Wert» zu verstehen ist.

9.2.1 Vergleich der Einwirkungen nach ASTRA 12006 und nach Bucher

In der Richtlinie ASTRA 12006 [ASTRA 2008] wurde die Formulierung der statischen Ersatzkraft von [Bucher 1997] abgeändert übernommen. Es stellt sich die Frage, wie sich die Änderung auf die berechnete Einwirkung auswirkt, ob dadurch eine systematische Abweichung (Bias) entsteht, und wenn ja, ob diese Abweichung konservativ oder nicht-konservativ ist. Dieser Fragestellung wurde nachgegangen und es konnte gezeigt werden, dass für die grosse Mehrheit der relevanten Parametrisierungen Gleichung (9.3) von Bucher kleinere Einwirkung ergibt als Gleichung (9.4) aus ASTRA 12006; das heisst die Formulierung in der Richtlinie ist konservativ im Vergleich zur Formulierung von Bucher. Nur wenn die Erdeindeckung sehr mächtig ist (e > 1.5 m) und der Reibungswinkel sehr klein ($\varphi < 25°$) kann die Formulierung von Bucher konservativer sein.

Auf Grund dieser Beobachtung darf vermutet werden, dass für relevante Parameter die ASTRA-Formulierung eine systematische konservative Verschiebung (Bias) aufweist. Das heisst die Einwirkung, die nach der Richtlinie berechnet wird, hat eine systematische, konservative Abweichung von den Werten, die in der Wirklichkeit zu erwarten sind. In Kapitel 9.3.2 wird dieser Vermutung nachgegangen, in dem die Einwirkung nach ASTRA 12006 mit experimentellen Versuchsresultaten verglichen wird.

9.3 Beurteilung der Richtlinie ASTRA 12006

Bei der Beurteilung der Richtlinie steht eine Frage im Vordergrund: Ist das Sicherheitsniveau einer Galerie, die mit Hilfe der Richtlinie ASTRA 12006 bemessen wurde, angemessen? Zur Beantwortung diese Frage müssen einige Untersuchungen gemacht werden.

- Basiert das Bemessungskonzept auf expliziten probabilistischen Modellierungen?
- Ist die charakteristische Einwirkung F_k konservativ?
- Ist der Konstruktionsbeiwert C konservativ?

Diese drei Fragen werden in den nachfolgenden Kapiteln 9.3.1, 9.3.2 respektive 9.3.3 untersucht. Im darauffolgenden Kapitel 9.3.4 wird das Sicherheitsniveau von Galerien abgeschätzt.

9.3.1 Probabilistik in der heutigen Richtlinie

Eine probabilistische Interpretation der Bemessungswerte der Einwirkung ist im Anhang der Vorgänger-Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] beschrieben. Dabei wird insbesondere auf die Bemessung mit dem 30-jährigen Ereignis eingegangen. Der charakteristische Wert der Einwirkung wird als 95 %-Quantil bezeichnet, wobei darauf hingewiesen wird, dass der genaue p-Fraktilwert (die jährliche Unterschreitungswahrscheinlichkeit) von Verteilungstyp und Streuung abhängt. Der Bemessungswert sei so zu verstehen, dass er ein einziges Mal pro 1500 Ereignisse überschritten wird. Die Ausführungen im Anhang von [ASTRA/SBB 1998] geben einen Einblick in die Überlegung, die gemacht wurden, können aber ohne weitere Dokumente nicht vollständig nachvollzogen werden. Eine Untersuchung zum Einfluss der einzelnen Parameter auf die Unsicherheiten ist nicht ersichtlich, ebenso wenig die Herleitung der Teilsicherheitsbeiwerte.

In der Richtlinie ASTRA 12006 kann das Bemessungsereignis frei gewählt werden. Je nach Wahl entspricht der charakteristische Wert der Einwirkung einem unterschiedlichen p-Fraktilwert. Welcher p-Fraktilwert dies ist, ist aber nicht eindeutig. Der Zusammenhang zwischen Bemessungsereignis und Sicherheitsniveau wird in der Praxis mehrheitlich nur qualitativ verstanden, es ist deshalb davon auszugehen, dass das Sicherheitsniveau auch nur qualitativ auf die Konsequenzen eines Versagens abgestimmt werden kann. Eine weitere offene Frage ist bereits in Kapitel 9.2 angesprochen: In der Richtlinie ASTRA 12006 ist von charakteristische Werten von einigen Eingangsparametern die Rede (z.B. die Steinmasse, die Aufprallenergie aber auch der Zusammendrückungsmodul und Reibungswinkel der

Erdeindeckung), es ist aber nicht definiert was der charakteristische Wert ist (d.h. welchem p-Fraktilwert er entspricht).

Soll ein überarbeitetes Bemessungskonzept auf probabilistische Modelle abgestützt werden, müssen die Unsicherheiten neu untersucht und modelliert werden. Dabei sollte sichergestellt werden, dass alle relevante Unsicherheiten berücksichtigt und korrekt propagiert werden.

9.3.2 Beurteilung des charakteristischen Wertes der Einwirkung

Seit den Arbeiten von [Montani & Descoedres 1996] wurden in verschiedenen Forschungsarbeiten Steinschlagversuche durchgeführt. Zur Beurteilung der charakteristischen Werte der Einwirkung nach ASTRA 12006 wird im Folgenden für jeden vorhandenen Steinschlagversuch die Einwirkung nach Gleichung (9.1) berechnet und mit der experimentell gemessenen Einwirkung verglichen.

Zu vier Versuchsserien stehen detaillierte Daten und Auswertungen zur Verfügung. Die Versuchsserien sind:

- Lochezen [Schellenberg 2008]
- Ebetsu, Rahmen [Röthlin et al. 2015], Testserie A
- Ebetsu, Platten [Röthlin et al. 2015], Testserie B
- Pardè [Volkwein 2016]

Die Daten aus einer weiteren Versuchsserie (Impaktversuche WSL, [Gerber 2008]) wurden nicht berücksichtigt, weil bei den Versuchen der Zusammendrückungsmodul nicht gemessen wurde, es lässt sich somit keine Einwirkung nach ASTRA 12006 berechnen. Die Versuche aus [Montani & Descoedres 1996] wurde nicht berücksichtigt, weil sie in einem Energiebereich liegen, bei dem kein Versagen der Steinschlagschutzgalerien erwartet wird.

Bei den Versuchsserien Lochezen und Pardè (Tab. 9.1 respektive Tab. 9.4) sind sämtliche Parameter bekannt, die zur Berechnung der Einwirkung in Gleichung (9.1) benötigt werden. Insbesondere wurde vor jedem einzelnen Steinschlagversuch eine Messung des Zusammendrückungsmoduls M_E durchgeführt. Bei der Versuchsserien Ebetsu Rahmen und Ebetsu Platten, wurde nur eine einzelne Messung des Zusammendrückungsmoduls M_E für eine Kies-Erdeindeckung durchgeführt. In den nachfolgenden Vergleichen können somit nur die Versuche auf eine Kies-Erdeindeckung berücksichtigt werden, die Versuche auf Sand und das *three-layer absorbing system* (*TLAS*) jedoch nicht, da für diese keine M_E-Messung vorhanden ist.

Bevor gemessene und berechnete Kräfte verglichen werden können, wird sichergestellt, dass der Vergleich zulässig ist: die Einwirkung nach ASTRA 12006 bezieht sich auf die Kraft die an der Einschlagstelle auf das Tragwerk wirkt. Das heisst, es sind nur Vergleiche mit Versuchen zulässig, bei denen die Einwirkung an der Einschlagstelle gemessen wurden (und nicht z.B. an den Auflagern). Bei allen vorhandenen Versuchsserien wurde die Aufprallkraft direkt von der Bremsbeschleunigung des Fallkörpers abgeleitet; somit handelt es sich um die Bremskraft, die auf den Fallkörpern wirkt. Die gleichgrosse Kraft wird auf das Bauwerk[1] wirken, der Vergleich mit der Einwirkung nach ASTRA 12006 ist somit zulässig.

In der nachfolgenden Tab. 9.1, Tab. 9.2, Tab. 9.3 und Tab. 9.4 werden die Eckdaten zu den vier Versuchsserien zusammengefasst. In den Abb. 9.1, Abb. 9.2, Abb. 9.3 und Abb. 9.4 werden die gemessenen Aufprallkräfte der Einwirkung nach ASTRA 12006 gegenübergestellt.

[1] Ganz korrekt ist, dass die gleich grosse Kraft auf die Erdeindeckung wirkt.

Tab. 9.1 *Information zu den Steinschlagversuchen in Lochezen [Schellenberg 2008]*

Testkörper	2m x 2m Betonplatte mit Kies oder Sand Eindeckung
Kraftmessung	Über die Bremsbeschleunigung am Stein
Anzahl Versuche	22

Beschreibung	Parameter	Einheit	Wert
Masse Fallkörper	m	[kg]	800-4'000
Fallhöhe	h	[m]	2-15
Aufprallgeschwindigkeit	v	[m/s]	6.2-17.2
Zusammendrückungsmodul	M_E	[kN/m²]	Vor jedem Versuch wurde eine M_E-Messung durchgeführt
Schichtstärke der Eindeckung	e	[m]	Gemessen
Reibungswinkel	φ	[deg]	Gemessen
Radius der Ersatzkugel	r	[m]	Berechnet

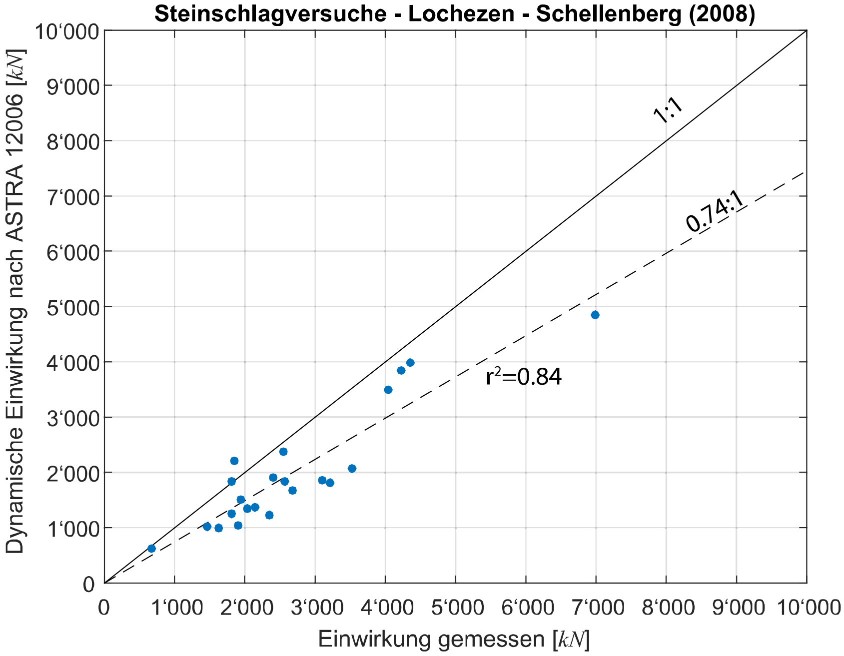


Abb. 9.1 *Vergleich der gemessenen und nach ASTRA 12006 berechneten Einwirkung für die Versuchsserien Lochezen (Quelle: [Schellenberg 2008]).*

Tab. 9.2 *Information zu den Steinschlagversuchen auf Galerierahmen in Ebetsu (Testserie A gemäss [Röthlin et al. 2015Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.], nur Kieseindeckung).*

Testkörper	Galerieprofile in Echtgrösse mit Kieseindeckung
Kraftmessung	Über die Bremsbeschleunigung am Stein
Anzahl Versuche	12

Beschreibung	**Parameter**	**Einheit**	**Wert**
Masse Fallkörper	*m*	[kg]	2'000-10'000
Fallhöhe	*h*	[m]	1-30
Aufprallgeschwindigkeit	*v*	[m/s]	4.4-24.2
Zusammendrückungsmodul	M_E	[kN/m^2]	Eine einzige Messung
Schichtstärke der Eindeckung	*e*	[m]	Gemessen
Reibungswinkel	φ	[deg]	Gemessen
Radius der Ersatzkugel	*r*	[m]	Berechnet

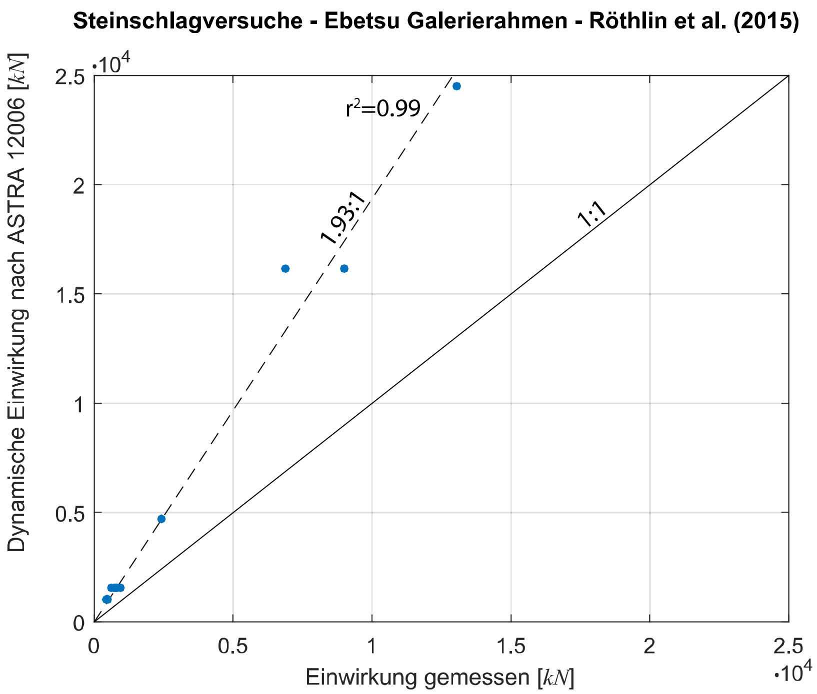


Abb. 9.2 *Vergleich der gemessenen und nach ASTRA 12006 berechneten Einwirkung für die Versuchsserie Ebetsu Galerierahmen (Quelle: [Röthlin et al. 2015]).*

Tab. 9.3 *Information zu den Steinschlagversuchen auf Stahl-Beton Verbundplatten in Ebetsu (Testserie B [Röthlin et al. 2015]).*

Testkörper	Stahl-Beton Verbundplatten mit Kieseindeckung
Kraftmessung	Über die Bremsbeschleunigung am Stein
Anzahl Versuche	14

Beschreibung	**Parameter**	**Einheit**	**Wert**
Masse Fallkörper	*m*	[kg]	2'000-10'000
Fallhöhe	*h*	[m]	2-10
Aufprallgeschwindigkeit	*v*	[m/s]	6.2-14.0
Zusammendrückungsmodul	M_E	[kN/m²]	Eine einzige Messung
Schichtstärke der Eindeckung	*e*	[m]	Gemessen
Reibungswinkel	φ	[deg]	Gemessen
Radius der Ersatzkugel	*r*	[m]	Berechnet

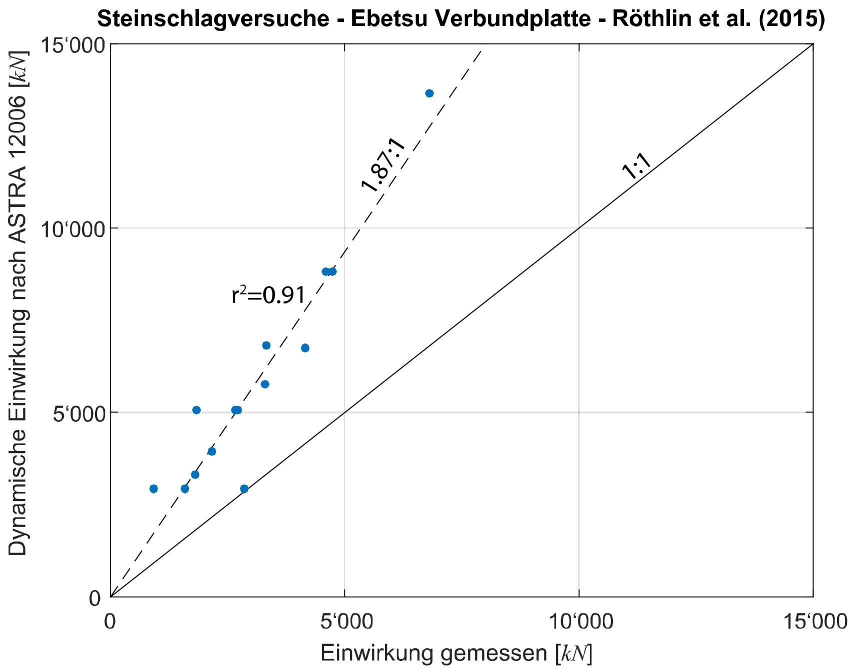


Abb. 9.3 *Vergleich der gemessenen und nach ASTRA 12006 berechneten Einwirkung für die Versuchsserie Ebetsu Verbundplatten (Quelle: [Röthlin et al. 2015]).*

Tab. 9.4 *Information zu den Steinschlagversuchen an der Galerie Pardè [Volkwein 2016].*

Testkörper	Galerie Pardè an der Oberalppassstrasse (GR). Die Galerie wurde im Jahr 1940 erstellt.
Kraftmessung	Über die Bremsbeschleunigung am Stein
Anzahl Versuche	5

Beschreibung	Parameter	Einheit	Wert
Masse Fallkörper	m	[kg]	800-3'240 kg
Fallhöhe	h	[m]	10-25 m
Aufprallgeschwindigkeit	v	[m/s]	13.8-22.4
Zusammendrückungsmodul	M_E	[kN/m^2]	Vor jedem Versuch wurde eine M_E Messung durchgeführt
Schichtstärke der Eindeckung	e	[m]	Gemessen
Reibungswinkel	φ	[deg]	Gemessen
Radius der Ersatzkugel	r	[m]	Berechnet

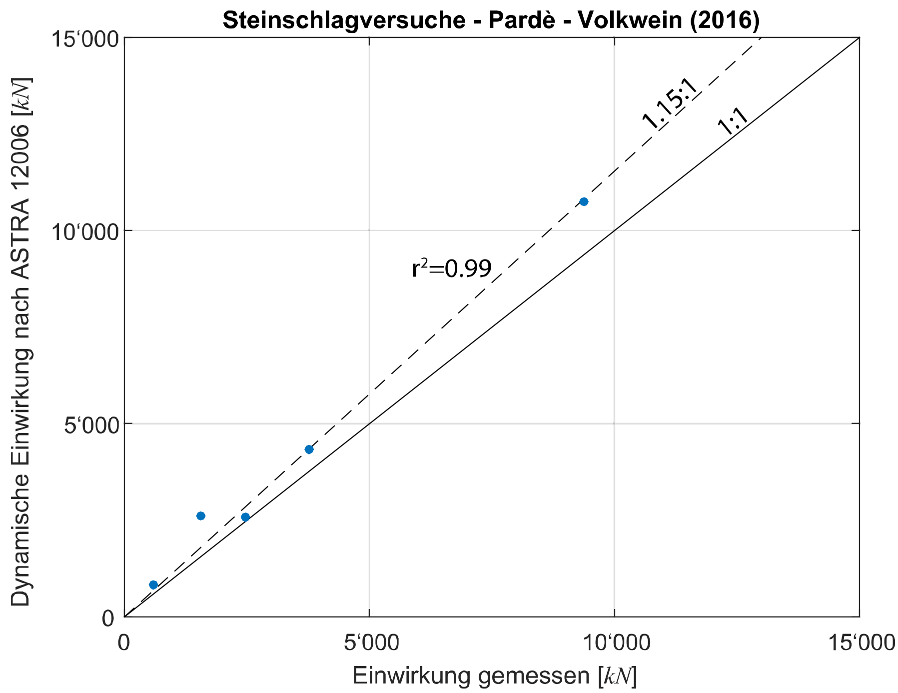


Abb. 9.4 *Vergleich der gemessenen und nach ASTRA 12006 berechneten Einwirkung für die Versuchsserie Pardè (Quelle: [Volkwein 2016]).*

Abb. 9.1 bis Abb. 9.4 zeigen die Gegenüberstellung der experimentell gemessenen Aufprallkräfte und die nach ASTRA 12006 berechnete Einwirkung. Bei allen Versuchsserien zeigt sich ein linearer Zusammenhang zwischen gemessenen und berechneten Kräften nach ASTRA 12006. Aus den Punkten wurde mittels linearer Regression jeweils eine lineare Funktion geschätzt. Die Regressionen ergeben grosse Bestimmtheitsmasse r^2 (r^2 = 0.84 für Lochezen, r^2 = 0.96 für Ebetsu Galerierahmen, r^2 = 0.91 für Ebetsu Verbundplatte und r^2 = 0.99 für Pardè), die den linearen Zusammenhang bestätigen. Anderseits ergeben sich aus den Regressionsgeraden ganz unterschiedliche Steigungen c (c = 0.74 für Lochezen, c = 0.93 für Ebetsu Galerierahmen, c = 1.87 für Ebetsu Verbundplatte und c = 1.15 für Pardè).

Die grossen Bestimmtheitsmasse deuten darauf hin, dass Gleichung (9.1) eine gültige Form hat und die Einflüsse der einzelne Parameter angemessen berücksichtigt werden.

Anderseits deuten die sehr unterschiedlichen Regressionssteigungen *c* darauf hin, dass ein systematischer Fehler vorhanden ist, der innerhalb einer Versuchsserie konstant ist, aber zwischen Versuchsserien unterschiedlich. Dies kann z.B. durch systematische Abweichungen bei Parametermessungen entstehen (z.B. des Zusammendrückungsmodul, Radius der Ersatzkugel) oder durch zusätzlichen Einflussgrössen, die in Gleichung (9.1) nicht berücksichtigt sind (z.B. Tragwerksteifigkeit, Steinform).

Zur weiteren Einordnung und Begründung der systematischen Unterschieden zwischen Versuchsserien sind weitere Informationen notwendig, die nicht zur Verfügung stehen. In Kapitel 10.5.1 wird Gleichung (9.1) so angepasst, dass sie im Mittel mit den gemessenen Kräften übereinstimmt[2].

9.3.3 Beurteilung der Konstruktionsbeiwerte

Neben der charakteristischen Einwirkung F_k wird die Bemessungslast in der Richtlinie ASTRA 12006 durch die Konstruktionsbeiwerte *C* bestimmt. Diese werden nachfolgend untersucht.

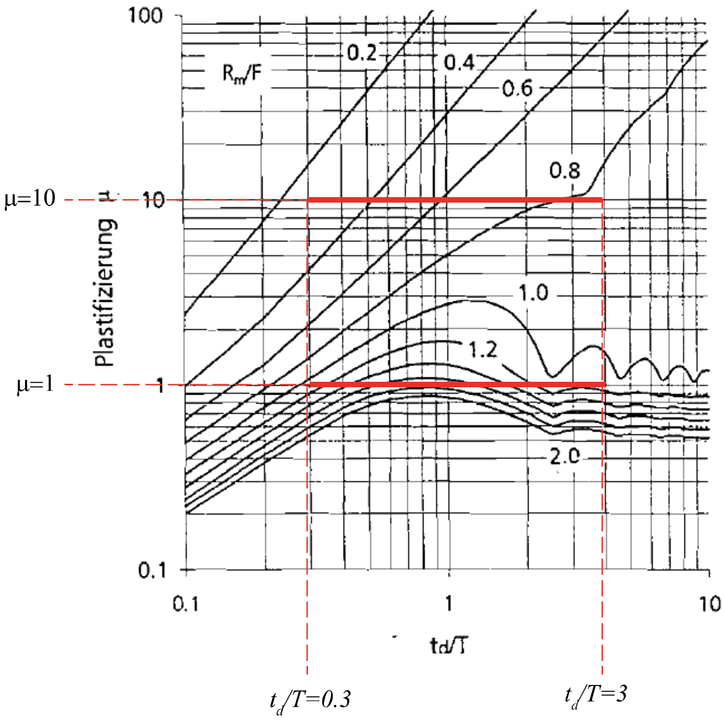


Abb. 9.5 *Antwortspektrum für elasto-plastische Antwort auf einen sinusförmigen Kraftstoss [Bucher 1997].*

Gemäss [Bucher 1997] sind in den Konstruktionsbeiwerten zwei Aspekte berücksichtigt worden:

1. **Die dynamische Baustofffestigkeit** – «In der Dynamik ist grundsätzlich immer mit den effektiven Kennwerten der Baustoffe und der Konstruktion zu arbeiten d.h. mit den Mittelwerten der dynamischen Baustofffestigkeiten […] Vergleicht man die Tragwerkwiderstände aufgrund des Unterschieds zwischen den dynamischen und den statischen Rechenwerten der Norm, die sich auf Mindestwerte beziehen, und berücksichtig man auch den Widerstandsbeiwert, ergibt sich für Biegung und Schub ein Bemessungsbeiwert C_d = 0.65 … » [Bucher 1997]

[2] Die Ergebnisse zeigen, dass es hier noch Forschungsbedarf gibt und der unbekannte Einfluss zukünftig untersucht werden sollte.

2. **Nichtlineares Tragwerksverhalten** – Bei der Umrechnung von einer dynamischen zu einer statischen Antwort müssen allfällige Plastifizierungen des Tragwerks berücksichtigt werden. Das Verhältnis des Tragwerkswiderstands und der Belastungsspitze R_m/F wird in Funktion der Plastifizierungsgrad μ und des Verhältnisses t_d/T (t_d ist die Dauer der Einwirkung und T die Eigenschwingzeit des Tragwerks) aus dem Diagramm in Abb. 9.5 abgelesen. Der relevante Bereich für t_d/T ist als $0.3 \leq t_d/T \leq 3$ angegeben. Gemäss Abb. 9.5 ist bei Sprödversagen ($\mu = 1$) $R_m/F = 0.85...1.8$ und bei Duktilversagen ($\mu = 10$) $R_m/F = 0.25…0.8$, siehe Abb. 9.5. Bucher legt jedoch für die beiden Versagensmodi deterministische Werte fest: $R_m/F = 0.6$ für Duktilversagen und $R_m/F = 1.6$ für Sprödversagen.

Der Konstruktionsbeiwert C ist das Produkt von C_d und R_m/F:

- Für Duktilversagen: $C = C_d \cdot R_m/F = 0.65 \cdot 0.6 \approx 0.4$
- Für Sprödversagen: $C = C_d \cdot R_m/F = 0.65 \cdot 1.6 \approx 1.05$

In der Richtlinie ASTRA 12006 wurden die Konstruktionsbeiwerte für Duktilversagen übernommen, jener für Sprödversagen leicht erhöht: $C = C_d \cdot R_m/F = 0.65 \cdot 1.8 \approx 1.2$. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass der Konstruktionsbeiwert für Sprödversagen vermutlich leicht konservativ ist, jener für Duktilversagen vermutlich nicht. Die Streuung der Konstruktionsbeiwerte ist bei Bucher, sowie in diesem Bericht, nicht berücksichtigt.

Nichtlineare Effekte und der dynamischen Baustofffestigkeit mit Konstruktionsbeiwerten zu berücksichtigen entspricht nach wie vor dem Wissenstand; auch zur Bestimmung der Konstruktionsbeiwerte ist nichts Grundsätzliches einzuwenden. Zur weiteren Einordnung der Konstruktionsbeiwerte wäre eine vertiefte Untersuchung notwendig, insbesondere zur Form des Kraftstosses und zu den t_d/T-Werten die in der Praxis auftreten.

Die Form des Kraftstosses wird hier nicht weiter untersucht, es wird weiterhin davon ausgegangen, dass Steinschlageinwirkung sinusförmig Kraftstösse verursachen und, dass somit das Antwortspektrum in Abb. 9.5 weiterverwendet werden kann. Bei einer Überarbeitung der Richtlinie sollte auch die Gültigkeit der der Annahme einer sinusförmigen Belastung geprüft werden.

Da der Einfluss von t_d/T gross ist, würde es Sinn ergeben, das Antwortspektrum in die Richtlinie aufzunehmen und den Konstruktionsbeiwert für jede Bemessungssituation in Funktion der Eigenschwingzeit des Tragwerks T zu bestimmen. Bei Neubauten ist dies jedoch mit beträchtlichen Mehraufwand verbunden und würde bedeuten, dass die Konstruktionsbeiwerte iterativ bestimmt werden müssen. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, dass der Konstruktionsbeiwert nur bei bestehenden Bauten über Antwortspektren bestimmt wird; bei neuen Steinschlagschutzgalerien können die Konstruktionsbeiwerte C der Richtlinie ASTRA 12006 beibehalten werden.

9.3.4 Sicherheitsniveau der bestehenden Richtlinie ASTRA 12006

In diesem Kapitel wird untersucht, welches Sicherheitsniveau eine Galerie hat, die mit den heutigen Richtlinien und den SIA-Tragwerksnormen bemessen wurde. Konkret geht es um die Frage, wie oft mit einem Versagen einer Galerie, die nach den derzeitigen Normen und Richtlinien bemessen ist, zu rechnen ist. Diese Frage wird in der Richtlinie/Normen zwar nicht explizit beantwortet, es ist jedoch klar, dass das Sicherheitsniveau direkt aus dem Bemessungskonzept und allfälligen Sicherheitsbeiwerten hervorgeht.

Zur Bestimmung des Sicherheitsniveaus müssen zwei Punkte untersucht werden:

- Erstens, was ist die jährliche Wahrscheinlichkeit $P[F \geq F_k]$ eines Ereignisses mit $F \geq F_k$ auftritt[3]? (Mit anderen Worten was ist die Wiederkehrperiode $R(F_k) = 1/P[F \geq F_k]$ eines Ereignisses $F \geq F_k$?).
- Zweitens, wie wahrscheinlich ist es, dass bei einem entsprechenden Ereignis die Galerie versagt?

Die Überschreitungswahrscheinlichkeit $P[F \geq F_k]$, ist der Kehrwert der Wiederkehrperiode $R(F_k) = 1/P[F \geq F_k]$ der charakteristischen Einwirkung.

Zur Untersuchung des ersten Punktes ist das Bemessungsereignis, die charakteristische Einwirkung F_k gemäss Gleichung (9.1) und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung F benötigt. Letztere wird gemäss Kapitel 10.5. bestimmt. Insbesondere wird die Einwirkung F mit der neuen Gleichung (10.2) bestimmt, die im Mittel mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmt[4].

Da das Bemessungsereignis in der Richtlinie ASTRA 12006 nicht vorgegeben ist, wird $P[F \geq F_k]$ bzw. $R(F_k)$ für drei in der Praxis übliche Bemessungsereignisse bestimmt. Die berücksichtigten Bemessungsereignisse sind:

- **Fall 1**: Steinmasse des 30-jährigen Ereignis und dem 95 %-Quantil der Einschlaggeschwindigkeit,
- **Fall 2**: Steinmasse des 100-jährigen Ereignis und dem 95 %-Quantil der Einschlaggeschwindigkeit,
- **Fall 3**: 95 %-Quantil der kinetischen Einschlagenergie.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Variationskoeffizienten sämtlicher Parameter in Gleichung (9.1) werden wie folgt angenommen[5]: die Steinmasse M, die Aufprallgeschwindigkeit v und der Zusammendrückungsmodul M_E sind lognormalverteilt; die Erdeindeckung e, der Reibungswinkel φ und die Steindichte ρ (die zusammen mit der Steinmasse M, den Radius r bestimmt) sind normalverteilt. Es werden folgende Variationskoeffizienten verwendet: $CoV_e = 0.1$, $CoV_\varphi = 0.1$, $CoV_{ME} = 0.5$ und $CoV_\rho = 0$. Die Variationskoeffizienten der Steinmasse CoV_m und der Aufprallgeschwindigkeit CoV_v hängen stark von der lokalen Geologie und Hanggeometrie ab. Die Wiederkehrperiode $R(F_k)$ wird deshalb in den nachfolgenden Abbildungen als explizite Funktion von CoV_m und CoV_v dargestellt. Abb. 9.6, Abb. 9.7 und Abb. 9.8 zeigen die Wiederkehrperioden von F_k für die untersuchten Bemessungsereignisse in Funktion von CoV_m und CoV_v .

Die graue Fläche in den Abbildungen zeigt den Bereich, in dem die Variationskoeffizienten CoV_m und CoV_v erfahrungsgemäss liegen. Es ist ersichtlich, dass für die ersten beiden Bemessungsereignisse die effektive Wiederkehrperiode von F_k im grauen Bereich etwa das 6- bis 10-fache der Wiederkehrperiode des Bemessungsereignisses entspricht. Für das dritte Bemessungsereignis (95 %-Quantil der kinetischen Einschlagenergie) ergeben sich viel kleinere Wiederkehrperioden.

[3] Die Rechnung könnte auch mit dem Bemessungswert A_d durchgeführt werden. Da die Variabilität des Konstruktionsbeiwertes C nicht berücksichtigt wird, und A_d nur eine lineare Skalierung von F_k ist, wären die Resultate gleich.

[4] Es mag seltsam erscheinen, dass die charakteristische Einwirkung F_k wird mit Gleichung (10.1) bestimmt wird, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung F jedoch mit Gleichung (10.2). Der Grund: die charakteristische Einwirkung F_k wird mit Gleichung (9.1) bestimmt weil dies die Gleichung ist, die heute zur Bemessung verwendet wird; die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung F wird mit Gleichung (10.2) bestimmt, weil sie im Mittelwert mit der Realität übereinstimmt. Nur so kann bestimmt werden wie oft die charakteristische Einwirkung in der Realität auftritt.

[5] Für die Begründung der Annahmen wird auf Kapitel 10.5.2 verwiesen.

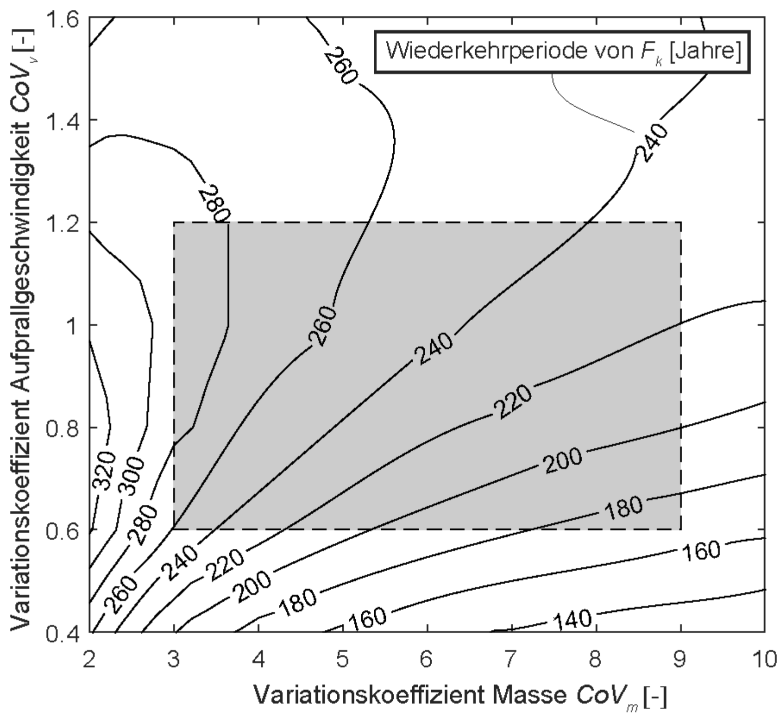


Abb. 9.6 *Wiederkehrperioden $R(F_k)$ der charakteristischen Einwirkung F_k, wenn das 30-Jährige Steinschlagereignis zur Bemessung verwendet wird (Fall 1). Das graue Rechteck zeigt den Bereich an, in dem erfahrungsgemäss die Variationskoeffizienten CoV_m und CoV_v liegen.*

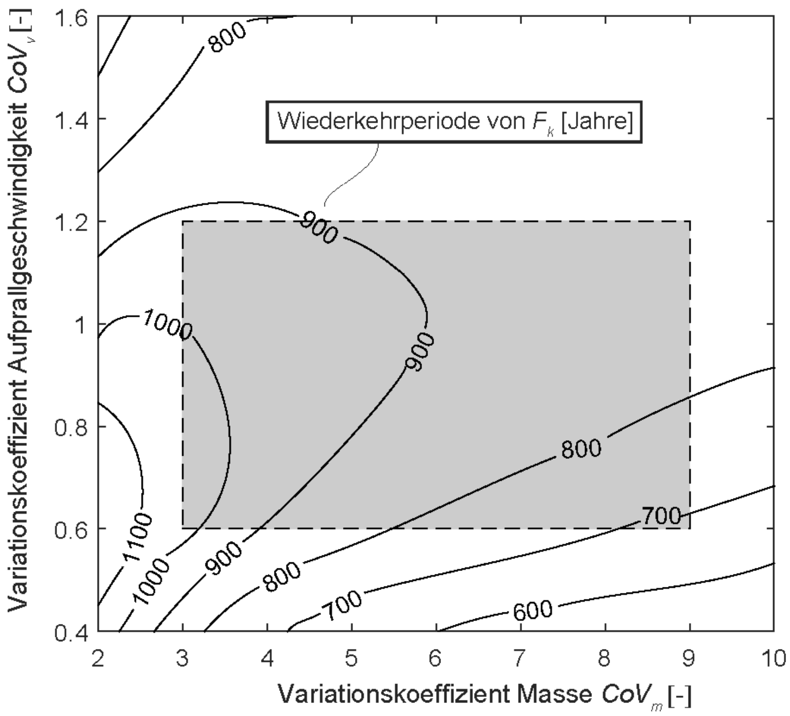


Abb. 9.7 *Wiederkehrperioden der charakteristischen Einwirkung F_k, wenn das 100-Jährige Steinschlagereignis zur Bemessung verwendet wird (Fall 2). Das graue Rechteck zeigt den Bereich an, in dem erfahrungsgemäss die Variationskoeffizienten CoV_m und CoV_v liegen.*

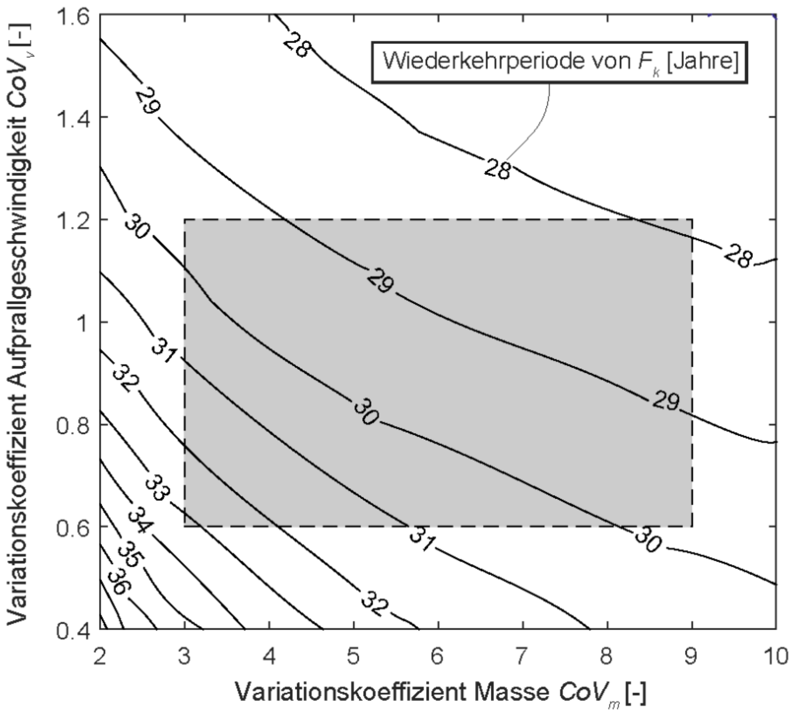


Abb. 9.8 *Wiederkehrperioden der charakteristischen Einwirkung F_k, wenn das Bemessungsereignis durch das 95 %-Quantil der Aufprallenergie definiert ist (Fall 3). Das graue Rechteck zeigt den Bereich an, in dem erfahrungsgemäss die Variationskoeffizienten CoV_m und CoV_v liegen.*

Als zweites muss nun bestimmt werden, wie gross die Versagenswahrscheinlichkeit der Galerie bei einer Einwirkung $F \geq F_k$ ist. Es wird angenommen, dass bei einem Ereignis mit Einwirkung $F > F_k$ die Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerks P_f = 10 % beträgt[6]. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Galerie bei einem Ereignis $F < F_k$ versagt, wird vernachlässigt.

Aus diesem Wert und den Abb. 9.6 und Abb. 9.7 lassen sich die jährlichen Versagenswahrscheinlichkeiten ermitteln, siehe Tab. 9.5.

Tab. 9.5 *Abschätzung der Versagenswahrscheinlichkeit einer Steinschlagschutzgalerie die nach heutigen Normen bemessen wird.*

Bemessungs-ereignis	**Effektive Wiederkehr-periode von F_k**	**Versagens-wahrscheinlichkeit gegeben $F \geq F_k$**	**Versagen alle…**	**Versagens-wahrscheinlichkeit**
$R(m_k)$=**30** Jahre v_k ist das 95 % Quantil	180-280 Jahre	10 %	**1'800-2'800 Jahre**	**$5.6x10^{-4}$ – $3.6x10^{-4}$ 1/Jahr**
$R(m_k)$=**100** Jahre v_k ist das 95 % Quantil	700-1'000 Jahre	10 %	**7'000-10'000 Jahre**	**$1.4x10^{-4}$ – $1x10^{-4}$ 1/Jahr**
95 %-Quantil der Aufprallenergie	28-33 Jahre	10 %	**280-330 Jahre**	**$3.6x10^{-3}$-$3x10^{-3}$ 1/Jahr**

Bei modernen Tragwerksnormen wird in der Regel von jährlichen Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten im Bereich 10^{-5} … 10^{-6} ausgegangen. Die Versagenswahrscheinlichkeiten

6 Dies ist eine grobe Annahme die nur hier zur Abschätzung des Sicherheitsniveaus verwendet wird und keinen Einfluss auf die weiteren Ausführungen im Bericht hat.

in Tab. 9.5 liegen etwas darüber, was bei Schutzmassnahmen gegen Naturgefahren durchaus akzeptabel sein kann.

Das ASTRA (z.B. [ASTRA 2003] Anhang 6, [ASTRA 2012]) legt Grenzwert und Überprüfungskriterium für Risiken auf Nationalstrassen als individuelle Todesfallrisiken fest: die Todesfallwahrscheinlichkeit für die Person, die die Infrastruktur am häufigsten benutzt (z.B. ein Pendler oder Postautochauffeur) darf durch die Benutzung der Infrastruktur um maximal 10^{-5}/Jahr zunehmen. Wird eines die ersten beiden Bemessungsereignisse verwendet, ist dieser Grenzwert in jedem Normalfall eingehalten. Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Grenzwert beim dritten Bemessungsereignis nur dann eingehalten ist, wenn sich die massgebende Person weniger als 4 Minuten pro Tag in der Schutzgalerie aufhält. Der Grenzwert kann somit bei Stau nicht immer eingehalten werden.

Aufgrund dieser Abschätzung kann festgehalten werden, dass das Sicherheitsniveau der Richtlinie ASTRA 12006 in der Grössenordnung angemessen ist, wenn eines der ersten beiden Bemessungsereignisse verwendet wird.

9.4 Standortbestimmung und Handlungsbedarf

Die obigen Ausführungen ergeben folgende Standortsbestimmung:

- Der Vergleich der Einwirkung *F* nach Gleichung (9.1) mit Versuchsergebnissen hat gezeigt, dass Gleichung (9.1) eine gültige Form hat, jedoch auch systematische Abweichung aufweist, die innerhalb einer Versuchsserie konstant sind, zwischen Versuchsserien aber variieren.
- Die Herleitung der Konstruktionsbeiwerte *C* wurde dargelegt und untersucht. In einem überarbeiten Bemessungskonzept können die Konstruktionsbeiwerte für die Bemessung von neuen Galerien gleich belassen werden; bei der Überprüfung von bestehenden Galerien können Konstruktionsbeiwerte bauwerkspezifisch von einem Antwortspektrum abgelesen werden. Der Kraft-Zeit Verlauf, der im Antwortspektrum verwendet wird sollte überprüft und ggfs. angepasst werden.
- Eine probabilistische Interpretation der Vorgänger-Richtlinie [ASTRA/SBB 1998] ist vorhanden. Sie ist ohne weitere Dokumentation nicht vollständig nachvollziehbar und lässt sich nicht einfach auf ein überarbeitetes Bemessungskonzept übertragen. Die Bedeutung der charakteristischen Werte der Parameter, die in Gleichung (9.1) berücksichtigt werden, ist derzeit nicht definiert.
- Eine Galerie, die mit den heutigen Richtlinien und Normen bemessen wird, hat in der Regel ein akzeptables Sicherheitsniveau, das Sicherheitsniveau wird jedoch massgebend durch die Wahl des Bemessungsereignisses durch den Bauherrn beeinflusst. Der Zusammenhang zwischen Bemessungsereignis und Sicherheitsniveau wird in der Praxis mehrheitlich nur qualitativ verstanden; es ist deshalb davon auszugehen, dass das Sicherheitsniveau auch nur qualitativ auf die Konsequenzen eines Versagens abgestimmt werden kann.

Daraus wird folgender Handlungsbedarf abgeleitet:

- Das Bemessungsereignis sollte klar definiert werden.
- Die Gleichung zur Bestimmung der charakteristischen Einwirkung F_k sollte angepasst werden, damit sie im Mittelwert der Wirklichkeit entspricht.
- Um bei jeder Steinschlagschutzgalerie ein angebrachtes Sicherheitsniveau zu haben, sollte das Sicherheitsniveau über Teilsicherheitsbeiwerte γ gesteuert werden, die in Funktion von Expositionsparametern (z.B. der *DTV*) und der Einwirkung festgelegt sind.

Im nachfolgenden Kapitel 10 wird die Modellierung beschrieben, die zum Erreichen dieser Ziele notwendig ist. Das Bemessungsereignis ist in Kapitel 10.4 definiert. Eine neue Gleichung zur Bestimmung der charakteristischen Einwirkung wurde bereits erarbeitet und wird in Kapitel 10.5.1 vorgestellt. Neue Teilsicherheitsbeiwerte sind in Kapitel 10.7.5 angegeben. Das überarbeitete Bemessungskonzept ist in Kapitel 11 beschrieben.

10 Modellierung

Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 9.4 werden einige Modelle erstellt, die als Grundlage der Weiterentwicklung des Bemessungskonzepts der Richtlinie ASTRA 12006 dienen sollen. Insbesondere ist das Ziel, ein probabilistisches Model zu erstellen und davon Teilsicherheitsbeiwerte abzuleiten, die in jeder Bemessungssituation eine angemessene Sicherheit gewährleisten.

10.1 Grundlagen und Ziele der Modellierung

Auch eine überarbeitete Richtlinie würde in Zukunft zusammen mit den SIA-Tragwerksnormen verwendet werden. Es ist deshalb eine Randbedingung für das überarbeitete Bemessungskonzept, dass es nach dem «*Load-Resistance Factor Design*» Format entwickelt wird; das bedeutet, dass zuerst eine charakteristische Einwirkung bestimmt wird, die dann mit einem Teilsicherheitsbeiwert γ_F skaliert wird, um die Bemessungseinwirkung zu erhalten.

Um die Teilsicherheitsbewerte zu bestimmen, müssen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Tragwerkwiderstandes *R* und der Einwirkung *F* bekannt sein. Zudem sollten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von *R* und *F* den üblichen statistischen Gesetzmässigkeiten folgen und mit gängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert werden können. Bei Steinschlageinwirkung ist dies nicht immer der Fall: Es kommt oft vor, dass die Steinschlaggefährdung von unterschiedlichen Steinablösungszonen ausgehen, die durch unterschiedliche Wiederkehrperioden und Fallhöhen charakterisiert sind. Daraus resultiert dann eine multimodale Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung (*mixture model*), siehe Abb. 10.1, die nicht mit einer gängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert werden kann.

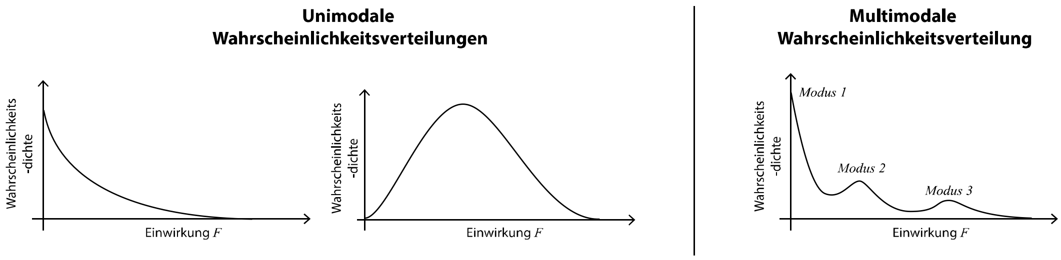


Abb. 10.1 *Unimodale und multimodale Wahrscheinlichkeitsverteilungen.*

Aus diesem Grund wird im überarbeitetem Bemessungskonzept der Berghang über der Schutzgalerie in unterschiedliche Steinablösungszonen unterteilt, sogenannte Homogenbereiche, die dadurch gekennzeichnet sind, dass die Wahrscheinlichkeit einer Steinablösung über den ganzen Homogenbereich konstant ist (siehe Kapitel 10.3). Für jeden Homogenbereich wird eine Bemessungskraft bestimmt und erst im letzten Schritt die massgebende Bemessungskraft für die Galerie daraus abgeleitet, siehe Abb. 10.2. Durch Stochastizität im Fallprozess kann die Einwirkungsverteilung aus einem einzelnen Homogenbereichs ebenfalls multimodal sein. Da jedoch für die Versagenswahrscheinlichkeit der Schwanzbereich der Verteilung relevant ist, ist eine Modellierung im Rahmen einer Richtlinie mit einer eindimensionalen Verteilung vertretbar.

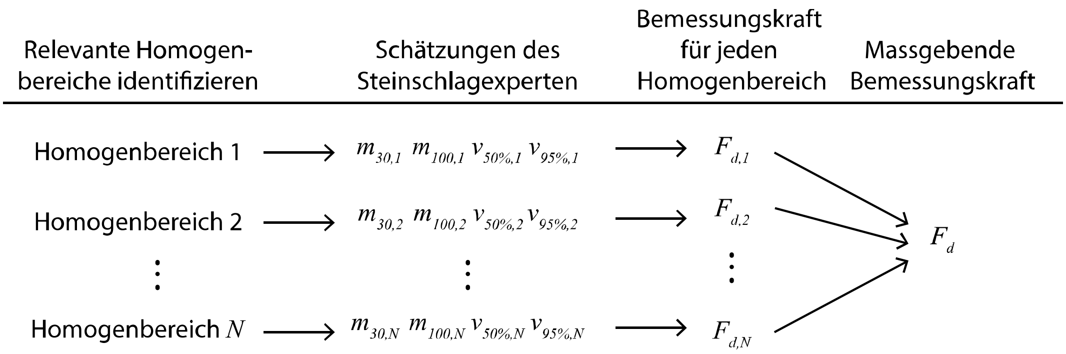


Abb. 10.2 *Vorgehen im überarbeiteten Bemessungskonzept: Der Hang über einer Strasse wird in Homogenbereiche aufgeteilt; der Steinschlagexperte schätzt die Steinmassen für das 30-jährige und das 100-jährige Ereignis sowie die Aufprallgeschwindigkeiten für jeden Homogenbereich. Daraus wird jeweils eine Bemessungseinwirkung pro Homogenbereich bestimmt, bevor zum Schluss die massgebende Bemessungseinwirkung berechnet wird.*

Aufgrund dieser Auslegeordnung werden nun konkrete Ziele für die Modellierung definiert:

a) Der Begriff Homogenbereich muss definiert werden (Kapitel 10.3)
b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Steinschlageinwirkung *F* muss bestimmt werden. Dazu werden die Unsicherheiten von sämtlichen Parametern bestimmt und propagiert (Kapitel 10.5).
c) Die Ziel-Zuverlässigkeit einer Steinschlagschutzgalerie muss bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden die Konsequenzen eines Tragwerkversagens (Kapitel 10.6.1) und die Sicherheitskosten (die zusätzlichen Baukosten, die notwendig sind um die Sicherheit zu erhöhen, Kapitel 10.6.2) bestimmt und daraus die Ziel-Zuverlässigkeit abgeleitet (Kapitel 10.6.4).
d) Teilsicherheitsbeiwerte für die Einwirkung müssen bestimmt werden, die es erlauben bei gegebener Einwirkung *F* die angestrebte Ziel-Zuverlässigkeit einzuhalten (Kapitel 10.7).
e) Die Bemessungseinwirkungen der einzelne Homogenbereiche müssen zu einer massgebenden Bemessungseinwirkung kombiniert werden, die dann für die eigentliche Bemessung verwendet werden kann (Kapitel 10.8).

Aufgrund der Resultate aus diesen Untersuchungen wird in Kapitel 11 das überarbeitete Bemessungskonzept vorgeschlagen. Darin ist eine Neuerung enthalten. Die grosse Mehrheit der Normen legen Teilsicherheitsbeiwerte in Abhängigkeit der Bauwerksklassen fest. Ein ähnliches Vorgehen wird auch hier vorgeschlagen. Die Anforderungen an Steinschlagschutzgalerien hängen aber stark von den lokalen Gegebenheiten ab. In diesem Bericht wird deshalb wie folgt vorgegangen:

- Die Ziel-Zuverlässigkeit wird als explizite Funktion der Verkehrsstärke festgelegt.
- Die Teilsicherheitsbeiwerte sind eine Funktion der Ziel-Zuverlässigkeit und des Variationskoeffizienten der Einwirkung.

Dieser Ansatz bringt zwar einen geringfügigen Mehraufwand für den planenden Ingenieur mit sich, hat aber auch grosse Vorteile. Mit den Differenzierungen können die örtlichen Gegebenheiten angemessen berücksichtigt und Steinschlagschutzgalerien so sicher wie möglich und nötig geplant werden. Bei der Erarbeitung des neuen Bemessungskonzepts wird darauf geachtet, dass sich der Mehraufwand bei der Bemessung in Grenzen hält.

In der nachfolgenden Abb. 10.3 sind die massgebenden Zusammenhänge in der Modellierung – von den projektspezifischen Eingangsgrössen zur Bestimmung des Teilsicherheitsbeiwertes – dargestellt. Auf der obersten Ebene stehen die Eingangsparameter, die projektspezifisch bestimmt werden müssen; auf der untersten Ebene das Resultat: der projektspezifische Teilsicherheitsbeiwert. Die Zwischenebenen werden nachfolgend modelliert, um den funktionalen Zusammenhang zwischen Input und Output herzustellen, sie sind für den projektierenden Ingenieur aber nicht mehr sichtbar.

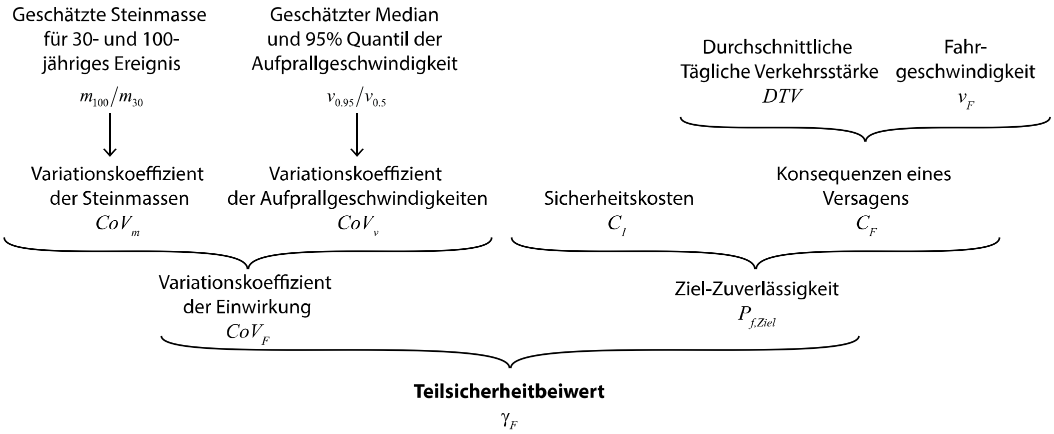


Abb. 10.3 *Darstellung der massgebenden Zusammenhänge zur Bestimmung des Teilsicherheitsbeiwertes*

10.2 Abgrenzung

Die jetzige Richtlinie ASTRA 12006 wird überarbeitet und auf ein explizites probabilistisches Modell abgestützt. Grundlage für die Modellierung sind folgende Annahmen:

- Die charakteristische Einwirkung wird mit der modifizierten Gleichung (10.2) bestimmt.
- Die Konstruktionsbeiwerte in der heutigen Richtlinie weisen keine systematische Abweichung zur Wirklichkeit auf, das heisst sie stimmen im Mittel mit der Wirklichkeit überein.

Wird die charakteristische Einwirkung in Zukunft anders bestimmt, muss die nachfolgende Modellierung angepasst werden. Das Vorgehen zur Bestimmung von Teilsicherheitsbeiwerte bleibt gleich, die Zahlen werden sich jedoch ändern.

10.3 Homogenbereiche

Ein homogener Steinablösungsbereich ist dadurch gekennzeichnet, dass die Wahrscheinlichkeit einer Steinablösung in diesem Bereich konstant ist. Um das Konzept zu illustrieren wird nachfolgende ein Beispiel im Kanton Graubünden dargestellt: Abb. 10.4 zeigt den Hang oberhalb der Steinschlagschutzgalerie Rieinertobel an der Valserstrasse, der in drei Homogenbereiche eingeteilt wurde: «Obere Steilwand», «Untere Steilwand» und «oben Bewachsen». Die 30-jährigen und 100-jährigen Ereignisse für die drei Homogenbereiche wurden vom Geologen geschätzt, siehe Tab. 10.1.

Tab. 10.1 *Die geschätzten Steinvolumina für die drei Homogenbereiche über der Steinschlagschutzgalerie Rieinertobel an der Valserstrasse (GR, Quelle: [BauGrundRisk 2016].*

Homogenbereich	30-jähriges Ereignis	100-jähriges Ereignis
Oben Bewachsen (OB)	0.1 m^3	0.2 m^3
Obere Steilwand (OS)	0.2 m^3	0.4 m^3
Untere Steilwand (US)	1 m^3	3 m^3

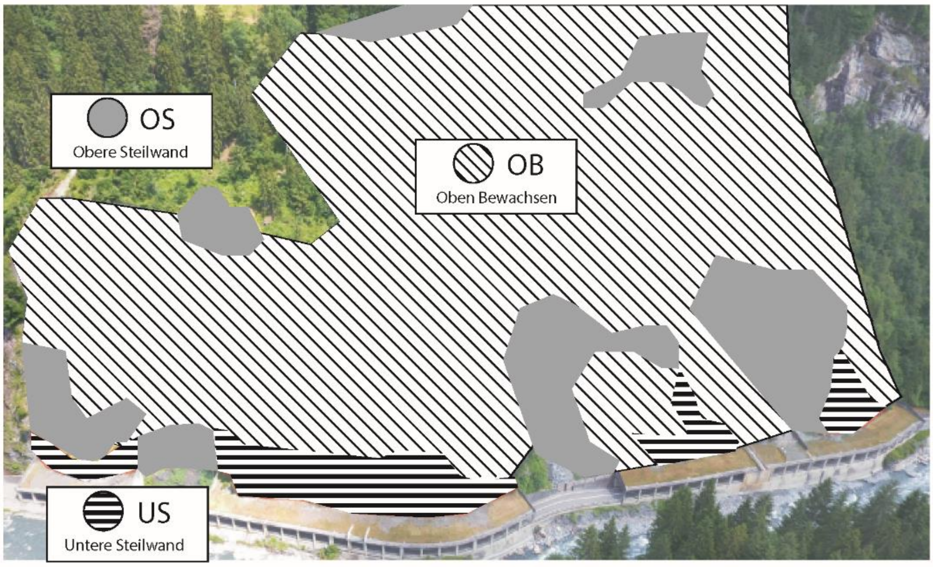


Abb. 10.4 *Der Hang über der Steinschlagschutzgalerie Rieinertobel an der Valserstrasse (GR), in drei Homogenbereiche aufgeteilt, Quelle: [BauGrundRisk 2016].*

Auf dieser Grundlage kann für jeden Homogenbereich eine Bemessungseinwirkung bestimmt werden. In den nachfolgenden Kapiteln 10.4 bis 10.7 wird jeweils die Modellierung von **einem** Homogenbereich beschrieben (ohne dies jeweils explizit zu wiederholen). Die Kombination der Bemessungseinwirkungen aus unterschiedlichen Homogenbereichen ist in Kapitel 10.8 beschrieben.

10.4 Eingangsgrössen

Es ist Ziel dieses Berichts, auf die bestehende Richtlinie aufzubauen. Entsprechend werden die Eingangsgrössen der heutigen Richtlinien weitgehend übernommen, mit einigen Zusätzen.

Die Liste der Eingangsgrössen zur Bestimmung der Einwirkung und der projektspezifischen Teilsicherheitsbeiwerte ist:

- m_{30} und m_{100} Steinblock Masse des 30- respektive 100-jährigen Ereignisses.
- $v_{0.5}$ und $v_{0.95}$ Median und 95 %-Quantil der Aufprallgeschwindigkeit.
- r Radius der Ersatzkugel.
- e Schichtstärke der Eindeckung.
- M_E Statischer Zusammendrückungsmodul des Eindeckungsmaterials.
- φ Innerer Reibungswinkel des Eindeckungsmaterials.
- *DTV* Durchschnittliche tägliche Verkehrsstärke.
- v_{car} Fahrgeschwindigkeit.

Die charakteristischen Werte sind wie folgt definiert:

- m_k ist die Masse des Steinblocks eines 100-jährigen Ereignis m_{100}
- v_k ist das 95 %-Quantil der Aufprallgeschwindigkeit $v_{0.95}$
- $M_{E,k}$ ist der Erwartungswert des Zusammendrückungmoduls: $M_{E,k} = E[M_E]$[7]
- φ_k ist der Erwartungswert des Reibungswinkels: $\varphi_k = E[\varphi]$

[7] $E[.]$ ist der Erwartungswertoperator. Der Erwartungswert entspricht dem Mittelwert und der Erwartungswertoperator entspricht der Formel zur Ermittlung des Mittelwerts.

10.5 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Steinschlageinwirkung *F*

Um die Zuverlässigkeit einer Galerie bestimmen zu können, muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung *F* bekannt sein, also die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkungen aus allen möglichen Ereignissen, die in der Lebensdauer der Galerie vorkommen können. Insbesondere müssen Verteilungstyp, Variationskoeffizient und der *p*-Fraktilwert von F_k ermittelt werden, siehe Abb. 10.5.

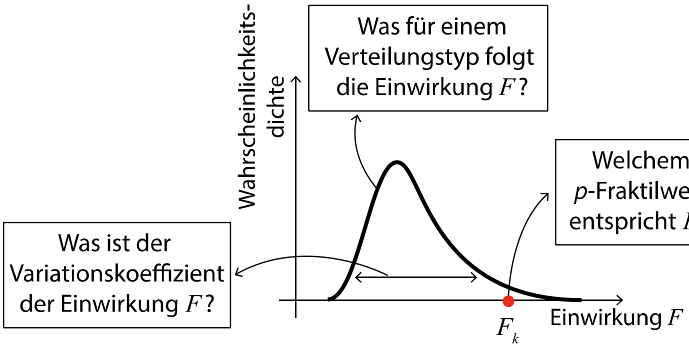


Abb. 10.5 *Fragenstellung, die zur Steinschlageinwirkung F beantwortet werden müssen.*

Um das Modell von *F* zu erstellen, wird ein Umweg in Kauf genommen: zuerst wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung sämtlicher Parameter in Gleichung (9.1) bestimmt (Kapitel 10.5.2). Danach werden Realisationen der Parameter generiert und in die neue Gleichung der charakteristischen Einwirkung eingesetzt (Gleichung (10.2), um so Realisationen der Einwirkung *F* zu bekommen (Kapitel 10.5.3). Daraus lassen sich dann die Fragenstellungen in Abb. 10.5 beantworten.

Bevor die Unsicherheiten bestimmt werden, wird in Kapitel 10.5.1 übersichtshalber die neue Gleichung zur Bestimmung der charakteristischen Einwirkung angegeben.

10.5.1 Charakteristische Einwirkung F_k

In Kapitel 9.3.2 wird gezeigt, dass die charakteristische Einwirkung gemäss Gleichung (9.1) eine gültige Form hat, aber auch einen systematischen Fehler beinhaltet, der innerhalb einer Versuchsserie konstant ist, aber zwischen Versuchsserien unterschiedlich.

Gleichung (9.1) wird angepasst, damit die charakteristische Einwirkung im Mittel mit den gemessenen Kräften übereinstimmt[8]. Dazu wird die Formulierung der charakteristischen Einwirkung *F* nach Richtlinie ASTRA 12006 durch den Mittelwert $\bar{c}$ der Regressionskoeffizienten aus Kapitel 9.3.2 geteilt:

$$\bar{c} = \frac{c_{Lochezen} + c_{Ebetsu\ GR} + c_{Ebetsu\ VP} + c_{Pardè}}{4} = \frac{0.74 + 1.93 + 1.87 + 1.15}{4} \cong 1.43 \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} F_{neu} &= \frac{F}{\bar{c}} = \frac{1}{1.43} 2.8 \cdot e^{-0.5} \cdot r^{0.7} \cdot M_E^{0.4} \tan\phi \left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right)^{0.6} \\ &= 1.95 \cdot e^{-0.5} \cdot r^{0.7} \cdot M_E^{0.4} \tan\phi \left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right)^{0.6} \end{aligned} \tag{10.2}$$

---

[8] Die Ergebnisse zeigen, dass es hier noch Forschungsbedarf gibt und der unbekannte Einfluss zukünftig untersucht werden sollte.

Im Vergleich mit Gleichung (9.1), ergibt Gleichung (10.2) um rund 30 % reduzierte Einwirkungen. Der Vergleich zwischen den experimentell gemessenen Einwirkungen und den berechneten Einwirkungen F_{neu} ist in Abb. 10.6 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die berechnete Einwirkung F_{neu} im Mittel mit den experimentell gemessenen Einwirkungen übereinstimmt.

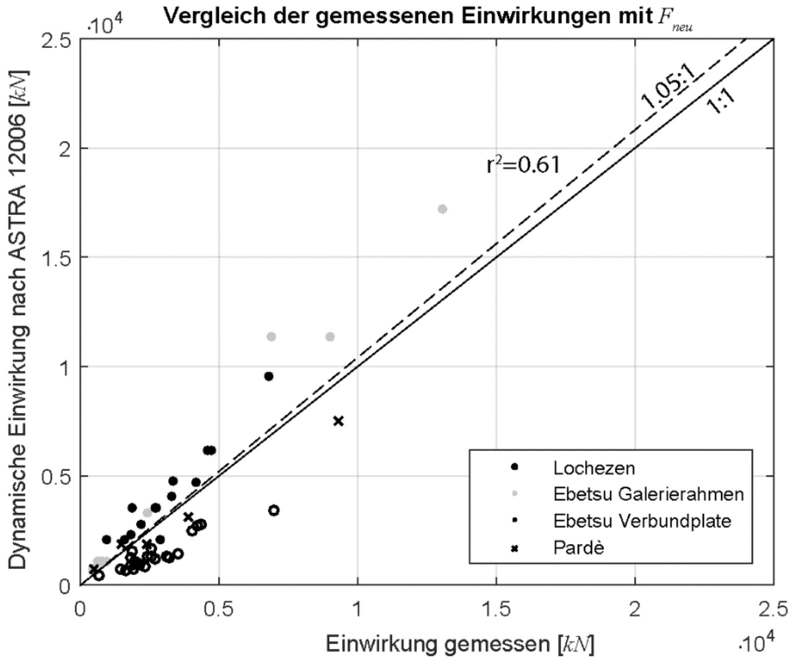


Abb. 10.6 *Vergleich der experimentell gemessenen Einwirkung und der berechneten charakteristischen Einwirkung F_{neu} gemäss Gleichung (10.2)*

Wird anhand aller Datenpunkte in Abb. 10.6 eine lineare Regression gemacht, ergibt sich ein Regressionskoeffizient c = 1.05 und Bestimmtheitsmass r^2 = 0.61. Der Grund für $c \neq 1$ trotz der Anpassung in Gleichung (10.2) ist, dass die vier berücksichtigten Versuchsserien unterschiedliche Anzahl Versuche beinhalten, dies aber bei der Berechnung von $\bar{c}$ in Gleichung (10.1) nicht berücksichtigt ist: es wird davon ausgegangen, dass die systematische Abweichung innerhalb der Versuchsserie konstant ist, die Anzahl der Versuche pro Versuchsserie darf in Gleichung (10.1) deshalb nicht berücksichtigt werden. Das Bestimmtheitsmass ist kleiner r^2 = 0.61, das heisst, die Punkte streuen stärker um Gleichung (10.2). Diese Unsicherheit wird in Kapitel 10.5.4 thematisiert.

10.5.2 Bestimmung der Unsicherheiten der Eingangsparameter der Einwirkungsgleichung

Die Unsicherheiten in den Eingangsparametern werden mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert. Bei der Bestimmung wird eine Unterscheidung vorgenommen:

- Die Variationskoeffizienten in der Steinmasse m und der Aufprallgeschwindigkeit v sollten projektspezifisch bestimmt werden, weil diese lokal stark variieren.
- Bei den Parametern ρ, e ,φ und M_E wird angenommen, dass die Variationskoeffizienten in jeder Bemessungssituation gleich sind und nicht von den lokalen Gegebenheiten abhängen.

Nachfolgend wird für jeden Parameter eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorgeschlagen.

Steinmasse *m*

Die Steinmasse ist einer der wichtigsten Parameter zur Bestimmung der Steinschlageinwirkung. An dieser Stelle sind zwei Typen Unsicherheiten zu berücksichtigen (siehe auch [Schubert et al. 2010]):

1. Die natürliche Variabilität der Steinschlagereignisse (aleatorische Unsicherheit).
2. Die Variabilität in der Schätzung des Steinschlagexperten der 30-jährigen m_{30} und 100-jährigen m_{100} Steinmasse (epistemische Unsicherheit).

Die natürliche Variabilität der Steinmasse hängt stark von den spezifischen lokalen Gegebenheiten ab und muss jeweils für die spezifische Situation bestimmt werden. Grundlage dazu sind die Schätzungen des Steinschlagexperten für das 30-jährige m_{30} und das 100-jährige m_{100} Ereignis. Daraus lässt sich, unter der Annahme einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, der Variationskoeffizient bestimmen. Dies wird im überarbeiteten Bemessungskonzept, aber nicht einmal nötig sein: der Einfachheit halber wird im Bemessungskonzept die Variabilität der Steinmasse direkt mit dem Verhältnis m_{100}/m_{30} berücksichtigt. Zudem wird aufgrund von vergangener Projekterfahrung angenommen, dass die ablösende Steinmasse mit einer Lognormalverteilung beschrieben werden kann.

Die Variabilität in der Schätzung kommt davon, dass jeder Experte mehr oder weniger unterschiedliche Schätzungen macht. Zur Berücksichtigung dieser Variabilität wird angenommen, dass die Steinmasse m_{30} einer Normalverteilung mit Variationskoeffizient 0.3 folgt (siehe [Custer et al. 2017] für detaillierte Beschreibung der Modellierung).

Aufprallgeschwindigkeit *v*

Die Variabilität der Aufprallgeschwindigkeit hängt ebenfalls stark von den örtlichen Gegebenheiten ab und muss im überarbeiteten Bemessungskonzept projektspezifisch bestimmt werden. Analog zur Steinmasse schätzt der Steinschlagexperte zwei Werte: den Median $v_{0.5}$ und das 95 %-Quantil $v_{0.95}$ der Aufprallgeschwindigkeit, woraus sich der Variationskoeffizient bestimmen lässt (in der Anwendung des Bemessungskonzepts wird dies ebenfalls nicht nötig sein: die Variabilität der Aufprallgeschwindigkeit wird mit dem Verhältnis $v_{0.5}/v_{0.95}$ berücksichtigt). Auch die Aufprallgeschwindigkeit wird mit der Lognormalverteilung beschrieben.

In Wirklichkeit kann die Aufprallgeschwindigkeit nicht unendliche Werte annehmen und ist jeweils durch einen Maximalwert begrenzt, was einer Trunkierung der lognormalen Wahrscheinlichkeitsverteilung gleichkäme. Der Einfluss einer Trunkierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von *v* auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung *F* wurde untersucht. Der Einfluss ist klein, es wird deshalb auf eine Trunkierung verzichtet.

Zusammendrückungsmodul M_E

Der Zusammendrückungsmodul M_E ist ein Mass für die Bodensteifigkeit und wird mit einem standardisierten Instrument und Verfahren gemessen. Um die Unsicherheiten im M_E-Wert zu modellieren, wird auf [Hofmann 2015] zurückgegriffen. Darin wurden auf 15 unterschiedlichen Böden insgesamt 108 Messungen des dynamischen Verformungsmoduls durchgeführt, aus dem dann das Zusammendrückungsmodul bestimmt werden kann. Pro Bodentyp und Bodenfeuchtigkeit stehen 5 bis 15 Messungen zur Verfügung. Daraus lässt sich für jeden Boden ein Variationskoeffizient des Zusammendrückungsmodul bestimmen, siehe Tab. 10.2.

Es wird festgehalten, dass Erdeindeckungen «konstruierte» Böden sind, die eine bekannte und kontrollierte Zusammensetzung aus Kies und Sand aufweisen, und somit nicht vollständig vergleichbar mit natürlichen Böden in [Hofmann 2015] sind. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Mehrheit der Unsicherheiten bei Erdeindeckungen und natürlichen Böden ähnlich verhalten (Messunsicherheiten, Einfluss der Witterung). Erkenntnisse zu den Unsicherheiten des Zusammendrückungsmodul bei natürlichen

Böden können somit auf die Zusammendrückungsmodule der Erdeindeckungen übertragen werden.

Tab. 10.2 Statistiken aus Zusammendrückungsmodul-Messungen. Messdaten aus [Hofmann 2015].

		Zusammendrückungsmodul M_E			
Bodentyp	**Feuchtigkeitsgehalt**	**Anzahl Messungen**	**Mittelwert** [kN/m²]	**Standardabweichung** $\sqrt{kN/m^2}$	***CoV*** [-]
Humus-Karbonatgestein Boden	trocken	5	27'460	6'638	0.24
Humus-Karbonatgestein Boden	feucht	10	13'514	4'522	0.33
Humus-Karbonatgestein Boden	trocken-feucht	10	14'835	8'557	0.58
Regosol	trocken	5	19'439	8'858	0.46
Regosol	feucht	10	9'867	5'501	0.56
Regosol	trocken-feucht	10	10'825	3'355	0.31
Braunerde	trocken	5	20'501	4'837	0.24
Braunerde	feucht	10	5'573	1'951	0.35
Braunerde	trocken-feucht	10	11'019	3'985	0.36
Kalkbraunerde	trocken	5	13'346	4'733	0.35
Saure Braunerde	trocken	5	13'18	3'614	0.26
Fahlgley	trocken	5	14'040	3'530	0.25
Forstweg	trocken	6	58'507	32'268	0.55
Landwirtschaftsland	feucht	6	7'215	2'502	0.35
Landwirtschaftsland	feucht	6	6'449	3'350	0.52

Die Variationskoeffizienten in Tab. 10.2 zeigen eine Bandbreite zwischen 0.24 und 0.58 auf, wobei sich die Bandbreite auf 0.31-0.58 reduziert, wenn nur die *CoV*-Werte berücksichtigt werden, die auf 10 Messungen basieren (und somit eine kleinere statistische Unsicherheit aufweisen). Aufgrund dieser Beobachtungen wird für die weitere Modellierung wird angenommen, dass der Variationskoeffizient des Zusammendrückungsmoduls CoV_{ME} = 0.5 beträgt. In Anlehnung an die Daten die in [Hofmann 2015] wird weiter angenommen, dass das Zusammendrückungsmodul lognormalverteilt ist.

Generell zeigt sich, dass die Bestimmung des Zusammendrückungsmodul mit grossen Unsicherheiten verbunden ist und dass hier noch Forschungsbedarf besteht.

Schichtstärke der Erdeindeckung am Aufprallort *e*

Bei der Planung einer neuen Galerie kann die Schichtstärke festgelegt werden, bei einer existierenden Galerie kann sie gemessen werden; die Unsicherheiten in der Bestimmung der Erdeindeckung ist deshalb relativ klein. Die Schichtstärke kann über die Zeit leicht variieren, z.B. durch Stein und Erdablagerungen oder Erosion. Bei korrekt entworfener Galerie und angemessenen Unterhalt dürfte die Schwankungen in der Schichtstärke jedoch klein bleiben. Es wird von einem Variationskoeffizienten von CoV_e = 0.15 ausgegangen und es wird angenommen, dass *e* einer Normalverteilung folgt (siehe [JCSS 2001]).

Reibungswinkel φ des Einwirkungsmaterials

Der Reibungswinkel ist eine charakteristische Eigenschaft eines Bodens, die in der Regel gut gemessen werden kann. Auch hier kann der Feuchtegehalt des Bodens eine Rolle spielen. Es wird deshalb von einem Variationskoeffizienten $CoV_\varphi = 0.1$ ausgegangen. Es wird weiter angenommen, dass φ normalverteilt ist (beide Annahmen, siehe [Schubert et al. 2010]).

Steinradius *r*

Der Steinradius r wird in der Regel als Funktion der Steinmasse m bestimmt. Es wird deshalb neu die Steindichte ρ als unabhängige Variable eingeführt. Der Steinradius des idealisierten kugelförmigen Steins ist dann $r = \sqrt[3]{3m/4\rho\pi}$. Da m in Tonnen angegeben ist, wird die Steindichte ρ die Grösse [t/m^3] haben. Die Variabilität von r wird nicht direkt modelliert, sondern in Funktion der Unsicherheiten von m (bereits definiert) und Steindichte ρ berücksichtigt; bei gegebenem Gesteinstyp ist die Varianz der Steindichte klein. Es wird von einem Variationskoeffizienten von $CoV_\rho = 0.05$ ausgegangen. Auch bei der Steindichte wird eine Normalverteilung angenommen.

10.5.3 Steinschlageinwirkung *F*

Mit Gleichung (9.2) und Modellierungsangaben zu den einzelnen Parametern in Kapitel 10.5.2 können Verteilungstyp, Variationskoeffizient der Einwirkung F, sowie der p-Fraktilwert von F_k hergeleitet werden.

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einwirkung *F*

Aus theoretischen Überlegungen (Produkt von Zufallsvariablen) wird davon ausgegangen, dass die Einwirkung F der Lognormalverteilung folgt. Dies wird nachfolgend numerisch überprüft. Sämtliche Parameter werden gemäss den Angaben in Kapitel 10.5.2 in einer Monte Carlo Simulation modelliert und in Gleichung (9.2) eingesetzt, um so Realisationen der Einwirkung F zu erhalten. Die Realisationen werden auf ein lognormales Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen, siehe Abb. 10.7. Die Realisationen liegen auf einer Gerade, was die Wahl der Lognormalverteilung bestätigt.

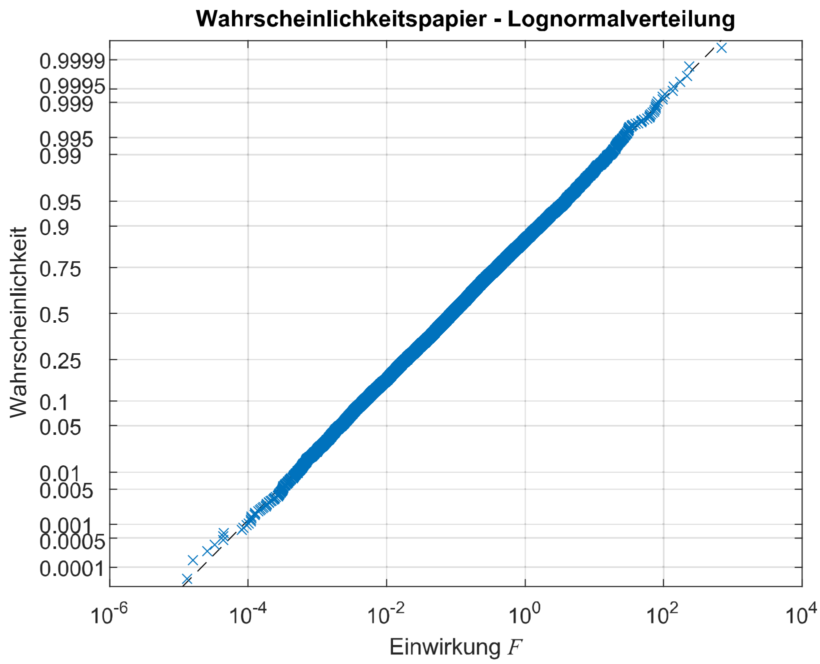


Abb. 10.7 Wahrscheinlichkeitspapier der Lognormalverteilung für die Einwirkung F.

Die Untersuchung in Abb. 10.7 wurde für unterschiedliche Annahmen der charakteristischen Werte der Parameter durchgeführt. Die Lognormalverteilung repräsentiert die Einwirkung gut.

Variationskoeffizient der Einwirkung *F*

Als zweites muss der Variationskoeffizient CoV_F der Einwirkung F in Funktion der projektspezifischen Variationskoeffizienten der Steinmasse und Einschlaggeschwindigkeit bestimmt werden. Die Variationskoeffizienten aller anderen Parameter fliessen ebenfalls ein, aber da sie nicht projektspezifisch festgelegt werden, ist der CoV_F nicht deren explizite Funktion. Die numerisch bestimmten Variationskoeffizienten CoV_F sind in Tab. 10.3 Funktion von m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ angegeben. Nach der Tabelle ist ein Lesebeispiel gegeben.

Tab. 10.3 *Variationskoeffizient der Einwirkung CoV_F in Funktion von m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$*

		$v_{0.95}/v_{0.5}$				
		1.2	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
m_{100}/m_{30}	**1.5**	0.9	0.9	1.1	1.3	1.4
	2	1.8	1.9	2.1	2.3	2.5
	2.5	3.4	3.5	3.7	4.0	4.7
	3	5.5	5.5	6.4	7.0	7.2
	3.5	9.5	10.1	10.4	11.1	11.6
	4	15.8	17.2	18.3	20.4	21.4

Lesebeispiel:
Wird in der Praxis eine Galerie mit m_{100}/m_{30} = 2 und $v_{0.95}/v_{0.5}$ = 2.5 bemessen, so kann von einem Variationskoeffizienten der Einwirkung CoV_F = 2.3 ausgegangen werden.

p-Fraktilwert von F_k

Tab. 10.4 *Unterschreitungswahrscheinlichkeit von F_k in Funktion von m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$.*

		$v_{0.95}/v_{0.5}$				
		1.2	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
$v_{0.95}/v_{0.5}$	**1.5**	0.993	0.996	0.997	0.997	0.997
	2	0.993	0.995	0.997	0.997	0.998
	2.5	0.992	0.995	0.996	0.997	0.998
	3	0.992	0.994	0.996	0.997	0.997
	3.5	0.992	0.994	0.996	0.997	0.997
	4	0.992	0.994	0.995	0.996	0.997

Zur Bestimmung der Teilsicherheitsbeiwerte muss der *p*-Fraktilwert von F_k ebenfalls bekannt sein. Der *p*-Fraktilwert entspricht der jährlichen Unterschreitungswahrscheinlichkeit $P[F<F_k]$ der charakteristischen Einwirkung (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die charakteristische Einwirkung F_k in einem Jahr nicht überschritten wird). In Normen ist der *p*-Fraktilwert der charakteristischen Werte oft vorgeschrieben, dies ist hier aber nicht möglich: je nach den Werten von m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ entspricht F_k einem unterschiedlichen *p*-Fraktilwert. Auf eine analytische Herleitung wird hier verzichtet. Numerisch ermittelte *p*-Fraktilwerte sind in Tab. 10.4 in Funktion von m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ angegeben. Die Unterschiede der *p*-Fraktilwerte mögen klein erscheinen, haben jedoch einen grossen Einfluss auf die Teilsicherheitsbeiwerte.

Tab. 10.3 und Tab. 10.4 werden zur Berechnung der Teilsicherheitsbeiwerte verwendet. In einem überarbeiteten Bemessungskonzept sind sie für den planenden Ingenieur nicht mehr sichtbar.

10.5.4 Modellunsicherheit

In Kapitel 10.5.3 noch nicht berücksichtigt ist die Modellunsicherheit. Gleichung (9.2) ist so formuliert, dass die berechneten Einwirkungen im Mittelwert mit der in der Wirklichkeit auftretenden Einwirkung übereinstimmen. Es ist jedoch klar, und in Abb. 10.6 ersichtlich, dass die Einwirkung um diesen Mittelwert streut. Es wird die Modellunsicherheit X_F

$$F^* = F_{neu} X_F \tag{10.3}$$

wobei F^* die Einwirkung unter Berücksichtigung der Modellunsicherheiten ist. Aufgrund der Daten in Abb. 10.6 wird X_F als Lognormalverteilung modelliert, mit Mittelwert $E[X_F] = 1$ und Varianz $VAR[X_F] = 0.5$.

In einem überarbeiteten Bemessungskonzept kann zur Berechnung der charakteristische Einwirkung Gleichung (10.2) verwendet werden; Gleichung (10.3) wird ausschliesslich zur Bestimmung der Teilsicherheitsbeiwerte (Kapitel 10.7) verwendet.

10.6 Ermittlung des optimalen Sicherheitsniveaus

Sicherheit kostet Geld; ein angemessenes Sicherheitsniveau für Steinschlagschutzgalerien wird als Abwägung (und Kompromiss) zwischen dem Wunsch nach mehr Sicherheit und den Ressourcen, die zur Verfügung stehen, verstanden. Hierzu müssen die Konsequenzen eines Tragwerksversagens sowie die Sicherheitskosten für Steinschlagschutzgalerien (also die zusätzlichen Baukosten, um die Sicherheit der Galerie zu erhöhen) berücksichtigt werden. Im Zusammenspiel von Konsequenzen und Sicherheitskosten kann ermittelt werden, welche Investitionen sinnvoll sind, und welche nicht. Das Sicherheitsniveau wird als jährliche Versagenswahrscheinlichkeit (oder Zuverlässigkeit) ausgedrückt. Das erforderliche Sicherheitsniveau ist entsprechend als Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit (oder Ziel-Zuverlässigkeit) ausgedrückt und wird nach [JCSS 2001] ermittelt.

Als nächstes werden in Kapitel 10.6.1 die Konsequenzen eines Galerieversagen in Funktion des durchschnittlichen täglichen Verkehrs *DTV* und Fahrgeschwindigkeit v_{car} modelliert. In Kapitel 10.6.2 werden die Sicherheitskosten näher untersucht. In den Kapiteln 10.6.3 und 10.6.4 wird die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten für Steinschlagschutzgalerien hergeleitet.

10.6.1 Abschätzung der Konsequenzen eines Galerieversagens

Im Falle eines Galerieversagens einer Steinschlagschutzgalerie müssen die folgenden direkten Konsequenzen berücksichtigt werden:

- Todesfälle von Verkehrsteilnehmern,
- Wiederherstellungskosten der Galerie,
- Aufräumkosten.

Die Konsequenzen werden nachfolgend für den Fall einer Steinschlagschutzgalerie auf dem Nationalstrassennetz ermittelt. Die Berechnungen können sinngemäss auf Steinschlagschutzgalerien im Netz der SBB übertragen werden. Dabei ist zu beachten, dass die Konsequenzen vom Nationalstrassennetz nicht direkt auf das Bahnnetz übertragt werden können. Konkret müssten Personenschäden, Schäden an der Infrastruktur, Betriebsunterbrüche, etc. separat bestimmt werden. Die Teilsicherheitsbeiwerte können dann für Bahnen anders sein, als im Folgenden angegeben.

Die Berechnung der Konsequenzen erfolgt analog zum ASTRA Bericht 639 [Schubert et al. 2010]. Indirekte Konsequenzen, zum Beispiel die Sperrung der Strasse im Ereignisfall, werden nicht berücksichtigt. Einige ASTRA-Dokumente berücksichtigen indirekte Konsequenzen, z.B. RoadRisk [ASTRA 2016]; andere verzichten hierauf, z.B. die ASTRA Richtlinie 19004 [ASTRA 2014a]. Eine Diskussion der Thematik ist in [Schubert & Faber 2009] zu finden.

Die Konsequenzen C_T eines Ereignisses werden demnach wie folgt berechnet:

$$C_T = C_W \cdot (1 + 0.1) + E_T \cdot GK \tag{10.4}$$

Die Wiederherstellungskosten einer Galerie C_W sind in der Regel mit den Baukosten einer neuen Galerie gleichzusetzten. Für die Aufräumkosten wird vereinfacht ein prozentualer Aufschlag auf die Wiederherstellungskosten von 10 % angenommen. Das Personenrisiko E_T (erwartete Anzahl Todesfälle bei Galerieversagen) kann mit Hilfe des Grenzkostenprinzips monetarisiert werden: hierbei wird ein Grenzwert für die Kosten der Rettung eines Menschenlebens festgelegt, bis zu dem eine Sicherheitsinvestition als sinnvoll erachtet wird. Im Folgenden wird mit Grenzkosten von GK = 5 Mio. CHF gerechnet, die auch in anderen ASTRA-Dokumente verwendet wird (z.B. [ASTRA 2012] und [ASTRA 2014b], siehe [Custer et al. 2016] für einen Überblick). Der Erwartungswert der Todesfälle im Falle eines Ereignisses E_T kann nach [Schubert et al. 2010] in Funktion des DTV, der Fahrgeschwindigkeit v_{car} und weiterer Parametern (siehe Tab. 10.5), bestimmt werden:

$$E_T = \beta \cdot p_T \tag{10.5}$$

Dabei ist p_t die Wahrscheinlichkeit, dass es bei einem Ereignis zu einem Todesfall kommt und β der durchschnittliche Besetzungsgrad eines Fahrzeuges. Bei der Berechnung von p_t werden sowohl Todesfälle von direkten Treffern und indirekten Treffer (Auffahrt-Unfälle) berücksichtigt:

$$p_T = p_{direkt} \cdot p_{T|direkt} + p_{indirekt} \cdot p_{T|indirekt} \tag{10.6}$$

wobei p_{direkt} und $p_{indirekt}$ die Wahrscheinlichkeiten eines direkten, respektive indirekten Treffer sind, und $p_{T|direkt}$ und $p_{T|indirekt}$ die entsprechenden Todesfallwahrscheinlichkeiten im Falle eines Treffers. Die Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten wird nachfolgend beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit eines direkten Treffers ist

$$p_{direkt} = \frac{(B + L) \cdot DTV}{v_{car} \cdot 1000[\mathrm{m/km}] \cdot 24[\mathrm{h/d}]} \tag{10.7}$$

wobei B die Einsturzlänge des Galeriedachs ist, L die Fahrzeuglänge, DTV der durchschnittliche tägliche Verkehr und v_{car} die signalisierte Geschwindigkeit[9]. Es wird angenommen, dass bei einem direkten Treffer immer alle Fahrzeuginsassen versterben:

$$p_{T|direkt} = 1 \tag{10.8}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines indirekten Treffers ist:

---

[9] Es wird angenommen, dass die Fahrgeschwindigkeit gleich der signalisierten Geschwindigkeit ist.

$$p_{indirekt} = \frac{\left(\frac{v_{car} \cdot T}{3.6} + \frac{v_{car}^2}{25.2 \cdot a}\right) \cdot DTV}{v_{car} \cdot 1000 \cdot 24} \tag{10.9}$$

wobei T die Reaktionszeit und a die Bremsbeschleunigung ist. Zur Bestimmung der Todesfallwahrscheinlichkeit gegeben indirektem Treffer wird auf ein empirisches Modell aus [Schubert et al. 2010] zurückgegriffen. Zuerst wird die Fahrgeschwindigkeit v_{impact} beim Aufprall bestimmt, daraus dann die Todesfallwahrscheinlichkeit $p_{T|indirekt}$.

$$v_{impact} = \begin{cases} v_{car} & T \cdot v_{car} < W \\ v_{car} - \sqrt{\left(W - T \cdot v_{car} \frac{1}{3.6}\right) \cdot 2 \cdot a} & T \cdot v_{car} < W < S_H \end{cases} \tag{10.10}$$

Dabei ist W die Distanz zwischen Fahrzeug und Einschlagort und S_H der Bremsweg, der wie folgt berechnet werden kann:

$$S_H = v_{car} \cdot T \cdot \frac{1}{3.6} + \frac{v_{car}}{25.92 \cdot a} \tag{10.11}$$

Bei gegebener Aufprall-Geschwindigkeit v_{impact} berechnet sich dann die Todesfallwahrscheinlichkeit $p_{T|indirekt}$ aus einer empirischen Gleichung als:

$$p_{T|indirekt} = \min\left(e^{\lambda \ln(v_{impact}) + \kappa}, 1\right) \tag{10.12}$$

λ und κ sind Regressionsparameter, die normalverteilt mit Mittelwerten $\mu_\lambda = 4.52$ respektive $\mu_\kappa = -21.336$ und der folgenden Kovarianz-Matrix Ψ modelliert werden:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1.97 & -8.06 \\ -8.06 & 33.52 \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

Bei diesen Berechnungen wird davon ausgegangen, dass die Strasse das ganze Jahr geöffnet ist und dass der Verkehr nie gestaut ist. In der nachfolgende Tab. 10.5 werden die angenommen Eingangsgrössen zur Berechnung der Gleichungen (10.4) bis (10.13) angegeben.

Tab. 10.5 *Eingangsgrössen für die Berechnung des Personenrisikos*

Eingangsgrösse	**Parameter**	**Einheit**	**Wert**
Durchschlagbreite	B	[m]	6
Wiederherstellungslänge	L_W	[m]	18
Durchschnittlicher täglicher Verkehr	DTV	[Fz./d]	projektabhängig
Besetzungsgrad	β	[Pers./Fz.]	2
Signalisierte Geschwindigkeit	v_{car}	[m/s]	projektabhängig
Fahrzeuglänge	L	[m]	4
Reaktionszeit	T	[s]	1.25
Bremsbeschleunigung	a	[m/s^2]	7.5
Wiederherstellungskosten	C_W	[CHF]	30’000
Grenzkosten	GK	[CHF]	5 Mio.

Aus den berechnet Gesamtkosten C_T eines Versagens wird die Konsequenz-Quotient ρ als Verhältnis zwischen den Gesamtkosten und den Wiederherstellungskosten ermittelt:

$$\rho = \frac{C_T}{C_W} = \frac{C_W \cdot 1.1 + E_T \cdot GK}{C_W} \tag{10.14}$$

[JCSS 2001] definiert drei Konsequenz-Klassen in Funktion des Konsequenz-Quotients ρ, die in der Schweizer Norm SIA 269 ebenfalls Anwendung finden:

- $\rho < 2$: Kleine Konsequenzen,
- $2 < \rho < 5$: Mittlere Konsequenzen,
- $5 < \rho < 10$: Grosse Konsequenzen.

Mit dem beschriebenen Berechnungsmodell, lässt sich die projektspezifische Konsequenz-Klasse in Funktion des *DTV* und der Fahrzeuggeschwindigkeit v_{car} bestimmen, siehe Tab. 10.6.

Tab. 10.6 *Durchschnittlicher täglicher Verkehr DTV für verschiedene Konsequenz-Klassen in Abhängigkeit der signalisierten Geschwindigkeit (Konsequenz-Klassen nach [SIA 269 2011])*

Signalisierte Geschwindigkeit	**Konsequenz-Klassen nach Norm SIA 269**		
	Klein: ρ < 2	**Mittel: 2 < ρ < 5**	**Gross: 5 < ρ < 10**
v_{car} = 60km/h	*DTV* < 6'000	*DTV* = 6'000 – 26'000	*DTV* = 26'000 – 60'000
v_{car} = 80km/h	*DTV* < 5'000	*DTV* = 5'000 – 22'000	*DTV* = 22'000 – 50'000
v_{car} = 100km/h	*DTV* < 3'500	*DTV* = 3'500 – 15'000	*DTV* = 15'000 – 35'000
v_{car} = 120km/h	*DTV* < 3'000	*DTV*= 3'000 – 12'500	*DTV* = 12'500 – 28'000

10.6.2 Sicherheitskosten

Die Sicherheitskosten beschreiben, wie teuer es ist, die Zuverlässigkeit eines Tragwerks zu erhöhen. Die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit wird aus der Optimierung der Lebenszykluskosten des Bauwerks (inklusive Wiederaufbaukosten und Kosten im Falle eines Versagensereignisses) ermittelt.

Ein einfaches Modell zur Modellierung der Sicherheitskosten ist in [Rackwitz 2000] beschrieben. Darin wird angenommen, dass die Baukosten C_B mit einer linearen Funktion beschrieben werden können

$$C_B = C_0 + C_1 \cdot p \tag{10.15}$$

wobei C_0 die fixen Baukosten (nicht von dem Sicherheitsniveau abhängig) und C_1 die Sicherheitskosten bezeichnen. Der globale Sicherheitsfaktor $p = E[R]/E[F]$ ist das Verhältnis zwischen dem Erwartungswert des Tragwerkswiderstands R und dem Erwartungswert der Einwirkung F. Somit sind die Baukosten als lineare Funktion des Tragwerkswiderstands $E[R]$ definiert. Quantitative Annahmen zu C_0 und C_1 sind schwierig, insbesondere muss C_1 jeweils in Berücksichtigung von üblichen Werten für p bestimmt werden.

Ein plausibler Weg, einen Wert für C_1 herzuleiten, wird nachfolgend erarbeitet. Dabei wird angenommen, dass bei einer üblichen Bemessung, die durch p' gekennzeichnet ist, der Anteil der fixen Baukosten C_0 für Steinschlagschutzgalerien ca. 90 % der gesamten Baukosten beträgt, das heisst $C_0/C_B \approx 0.9$, siehe Abb. 10.8, und $C_1 \cdot p' \approx 0.1$. Ist der ungefähre

Wert von p' bekannt, kann zurückgerechnet werden wie gross das Verhältnis C_1/C_0 sein muss, damit die Sicherheitskosten $C_1 \cdot p$ etwa 10 % der Gesamtkosten C_B ausmachen. Diese Rechnung wird weiter unten für den Bemessungsfall Steinschlageinwirkung auf Schutzgalerien durchgeführt.

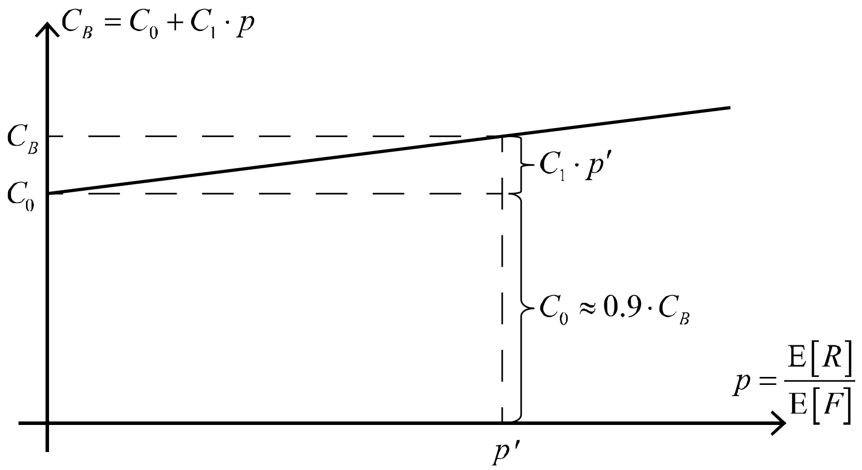


Abb. 10.8 *Illustration des Vorgehens zur Abschätzung der relativen Sicherheitskosten C_1/C_0 auf Basis von Gleichung (10.15).*

Der übliche Bemessungsfall Steinschlageinwirkung wird wie folgt definiert: Der Tragwerkwiderstand R folgt der Lognormalverteilung mit Variationskoeffizient CoV_R = 0.15; die Einwirkung F ist ebenfalls lognormalverteilt mit Variationskoeffizient im Bereich CoV_F = 2-8[10]. Durch den grossen CoV_F wird der globale Sicherheitsfaktor p' auch sehr gross: Für CoV_F = 2 ist der Wert des globalen Sicherheitsfaktors ca. p' =10, für CoV_F = 8 liegt er bei ca. p' =100. Entsprechend kann ausgerechnet werden, dass für Steinschlagschutzgalerien der Quotienten C_1/C_0 in der Grössenordnung von 10^{-2} – 10^{-3} liegt.

10.6.3 Wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit

Die Lebenszeitkosten des Bauwerks berechnen sich wie folgt

$$C_L(p) = C_B + P_f(p) \cdot C_T = C_0 + C_1 \cdot p + P_f(p) \cdot C_T \tag{10.16}$$

wobei $P_f(p)$ die Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerks ist. Durch Minimierung von Gleichung (10.16) kann die wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit ermittelt werden[11]. Diese Methode zur Bestimmung von Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten ist aus der Literatur bekannt (siehe z.B. [JCSS 2001]) und erlaubt es z.B. die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten in der [SIA 269 2011], Tabelle 2 im Anhang B nachzurechnen, siehe auch [Rackwitz 2000].

Zur Berechnung werden die «*obsolescence rate*» ω = 0.01 (Kehrwert der durchschnittlichen Nutzungsdauer, entspricht einer durchschnittlichen Nutzungsdauer von 100 Jahren) und den (gesellschaftlichen) Diskontierungszinssatz i = 0.02 angenommen. Sämtliche

[10] Der Bereich der Variationskoeffizienten in Tab. 10.3 ist noch grösser. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass in den meisten Praxisfällen CoV_F = 2-8 ist.

[11] Optimale Versagenswahrscheinlichkeit bezieht sich somit einzig auf die Minimierung von Gleichung (10.16). Es ist klar, dass in einem gesellschaftlichen und politischen Kontext noch weitere Aspekte berücksichtigt werden müssen, die nicht in Gleichung (10.16) berücksichtigt sind.

Kosten in Gleichung (10.16) werden durch Diskontierung auf eine Jahresbasis gebracht. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist ebenfalls auf ein Jahr bezogen.

Aus der Minimierung von Gleichung (10.16) geht die wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit $P_{f,opt}$ hervor, die in Abb. 10.9 in Abhängigkeit des Konsequenz-Quotients ρ und des Quotienten C_1/C_0 dargestellt ist. Zur Einordnung sind die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten des JCSS Probabilistic Model Codes [JCSS 2001] für die drei Kosten-Kategorien «Large Costs», «Normal Costs» und «Small Costs» ebenfalls dargestellt. Sie stellen die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten dar, die heute in den Normen verwendet werden (z.B. auch in der Norm SIA 269).

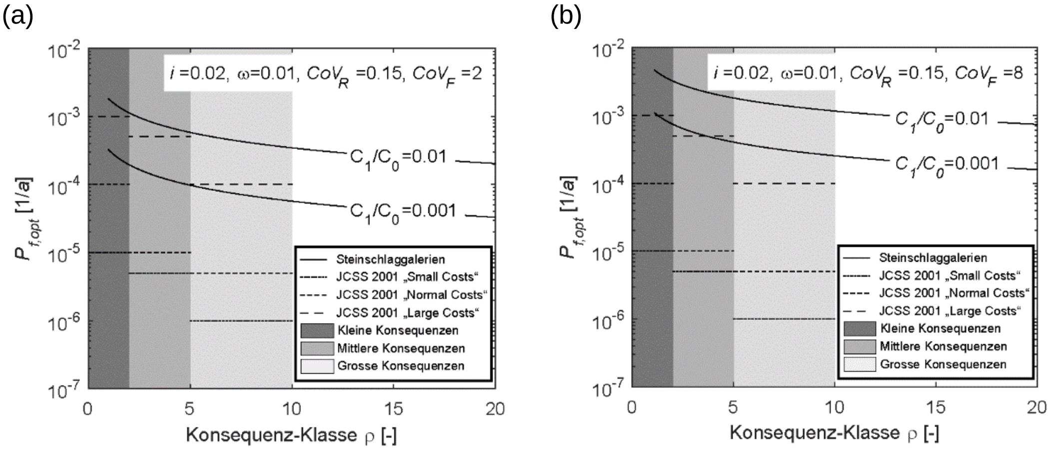


Abb. 10.9 *Wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeiten;*
(a) für $CoV_F = 2$;
(b) *für* $CoV_F = 8$.

Aus Abb. 10.9 ist sichtbar, das beim Bemessungsfall Steinschlag die wirtschaftlich optimalen Versagenswahrscheinlichkeiten im Bereich der Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten des JCSS Probabilistic Model Codes [JCSS 2001] für «Large costs» liegen, und zum Teil darüber. Dies ist insbesondere auf den grösseren CoV_F bei der Steinschlageinwirkung zurückzuführen. Grosse CoV_F bedeuten, dass der «Verteilungsschwanz» von F sehr lang ist und entsprechend mit verhältnismässig vielen grossen Ereignissen zu rechnen ist. Eine Galerie so auszulegen, dass sie diesen grossen Ereignissen standhält, ist sehr teuer und nicht wirtschaftlich (das heisst, die erwarteten Konsequenzen eines Versagens sind nicht gross genug um die hohen Kosten zu rechtfertigen), entsprechend werden grosse Versagenswahrscheinlichkeiten in Kauf genommen.

10.6.4 Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit

Aus den Ausführungen in Kapitel 10.6.2 muss nun eine Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit abgeleitet werden. Da die wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit am oberen Ende (und zum Teil ausserhalb) des heute akzeptierten und normierten Versagenswahrscheinlichkeitsbereichs liegt, kann sie nicht ohne weiteres als Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit übernommen werden.

Als erstes wird untersucht, ob bei den ermittelten wirtschaftlich optimalen Versagenswahrscheinlichkeiten Grenzwerte des Individualrisikos überschritten werden. Als Individualrisiko bezeichnet man das Todesfellrisiko, dem ein Individuum durch eine Aktivität ausgesetzt ist, in diesem Fall die Durchfahrt durch die Steinschlagschutzgalerie. In der Schweiz ist es üblich sicherzustellen, dass das Todesfallrisiko einer Aktivität nicht massgebend zu der natürlichen Todesfallwahrscheinlichkeit beiträgt. Ein üblicher Grenzwert für das Individualrisiko ist eine jährliche Todesfallwahrscheinlichkeit von 10^{-5} (z.B. [ASTRA 2003], [ASTRA 2012]).

Es wird nun zurück gerechnet, wie gross die Versagenswahrscheinlichkeit einer Galerie maximal sein darf, damit dieser Grenzwert eingehalten wird. Bei dieser Rechnung ist das Individuum massgebend, das die Galerie am häufigsten durchfährt. Dies dürfte vielerorts ein Postauto-Chauffeur sein, der eine Strasse bis zu 8 Mal pro Tag passiert (Annahme, Freizeit nicht berücksichtigt). Im Ereignisfall kann die Todesfallwahrscheinlichkeit $P_{T,Chauffeur}$ eines Postauto-Chauffeur mit den Gleichungen (10.5) bis (10.9) und den Angaben in Tab. 10.5 berechnet werden (der durchschnittliche Besetzungsgrad $\beta = 1$ und $DTV = 8$ müssen angepasst werden). Der Grenzwert des Individualrisikos ist eingehalten, wenn die Versagenswahrscheinlichkeit der Steinschlagschutzgalerie folgendes erfüllt:

$$P_{f,zulässig} < \frac{10^{-5}}{P_{T,Chauffeur}} \tag{10.17}$$

In Tab. 10.7 werden $P_{T,Chauffeur}$ und $P_{f,zulässig}$ für unterschiedliche signalisierte Geschwindigkeiten v_{car} berechnet.

Tab. 10.7 *Todesfallwahrscheinlichkeit für die massgebende Person und daraus abgeleitete maximal zulässige jährliche Versagenswahrscheinlichkeit zur Einhaltung des Individualrisiko Grenzwertes 10^{-5} pro Jahr.*

v_{car} [km/h]	$P_{T,Chauffeur}$ [pro Ereignis]	$P_{f,zulässig}$ [pro Jahr]
40	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.117
60	$5.8 \cdot 10^{-4}$	0.172
80	$4.5 \cdot 10^{-4}$	0.223
100	$3.7 \cdot 10^{-4}$	0.269
120	$3.2 \cdot 10^{-4}$	0.309

Gemäss den Berechnungen, die in Tab. 10.7 zusammengefasst sind, kann das jährliche Individualrisiko von 10^{-5} auch bei sehr grossen Versagenswahrscheinlichkeiten $P_f > 10\,\%$ eingehalten werden. Es kann somit mit Sicherheit festgehalten werden, dass das **Individualrisiko** für die Festsetzung der Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit **nicht massgebend** sein wird.

Somit bleiben zwei Möglichkeiten, die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit zu bestimmen, das wirtschaftliche Optimum aus Kapitel 10.6.3 zu übernehmen oder einen Wert zu postuliert, der von der Gesellschaft als angemessen betrachtet wird. Letzteres bedeutet normalerweise, dass man sich an der jetzigen Praxis orientiert.

Da die berechnete wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit nur wenig über den gesellschaftlich akzeptierten Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten des JCSS für «Large costs» liegen, werden letztere als Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten für Steinschlagschutzgalerien gewählt, siehe Tab. 10.8.

Tab. 10.8 *Gewählte Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Konsequenz-Klassen.*

		Konsequenz-Klassen		
		$\rho < 2$	**$2 < \rho < 5$**	**$5 < \rho < 10$**
Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit	[1/Jahr]	$P_f \approx 10^{-3}$	$P_f \approx 5 \cdot 10^{-4}$	$P_f \approx 10^{-4}$
Ziel-Zuverlässigkeitsindex	[-]	$\beta = 3.1$	$\beta = 3.3$	$\beta = 3.7$
Wiederkehrperiode eines Versagens	[Jahre]	≈ 1'000	≈ 2'000	≈ 10'000

Der Ziel-Zuverlässigkeitsindex β ist ein bewährtes Zuverlässigkeitsmass und wird nachfolgend zur Identifizierung der unterschiedlichen Sicherheitsniveaus verwendet. Sind der *DTV* und die Fahrgeschwindigkeit v_{car} bekannt, kann mit Tab. 10.6 und Tab. 10.8 die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit für eine Steinschlagschutzgalerie berechnet werden. Mit den hier postulierten Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten werden im nächsten Kapitel Teilsicherheitsbeiwerte berechnet.

10.6.5 Betrachtungen für die Überprüfung von bestehenden Galerien

In der heutigen Schweizer Praxis ist bei bestehenden Tragwerken eine niedrigere Zuverlässigkeit als bei Neubauten zulässig, wenn keine effizienten Instandsetzungsmassnahmen zur Verfügung stehen. Die Ziel-Zuverlässigkeit in Kapitel 10.6.4 wurde für Neubauten ermittelt und es fragt sich, ob bei bestehenden Galerien gegebenenfalls eine niedrigere Zuverlässigkeit akzeptiert werden kann. Es ist wahrscheinlich, dass die wirtschaftlich optimale Ziel-Zuverlässigkeit für bestehende Schutzbauwerke kleiner ist als jene in Tab. 10.8. Die Diskussion über eine minimale Ziel-Zuverlässigkeit von Schutzbauten sollte in Zukunft aufgenommen werden.

10.7 Kalibrierung Teilsicherheitsbeiwerte

Teilsicherheitsbeiwerte werden nach [JCSS 2001] und [Faber & Sørensen 2003] so kalibriert, dass bei gegebenen projektspezifischen Werte für m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ die vorgegebene Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit eingehalten wird. In dem nachfolgenden Kapitel 10.7.1 bis 10.7.4 werden die Grundlagen für die Teilsicherheitsbeiwert-Kalibrierung erläutert. In Kapitel 10.7.5 werden die Teilsicherheitsbeiwerte bestimmt.

10.7.1 Betrachteter Grenzzustand

Im Fokus der Normenkalibrierung steht der Grenzzustand der Tragfähigkeit. Die Norm SIA 260 unterscheidet vier Typen von Grenzzuständen:

- Typ 1: Gesamtstabilität des Tragwerks
- Typ 2: Erreichen des Tragwiderstands des Tragwerks oder eines seiner Teile
- Typ 3: Erreichen des Tragwiderstands des Baugrunds
- Typ 4: Erreichen der Ermüdungsfestigkeit des Tragwerks

Für die Bemessung von Steinschlagschutzgalerien bzw. die Festlegung der Steinschlageinwirkungen ist vor allem Einwirkung **Typ 2** relevant.

10.7.2 Definition einer allgemeinen Grenzzustandsfunktion

Für die Untersuchung der Tragwerkszuverlässigkeit wird die folgende Grenzzustandsfunktion $g(\boldsymbol{X})$ verwendet:

$$g(\mathbf{X}) = X_R \cdot R - X_E \cdot E = X_R \cdot R - X_E \cdot (G + F) \tag{10.18}$$

Hierin bezeichnet R den Tragwiderstand, E die Ein- bzw. Auswirkung (Summe aus ständiger Last G und variabler Last F) und X_R, X_E Modellunsicherheiten. Die Höhe des Widerstands (d.h. der Mittelwert der Zufallsvariablen R) wird durch den projektierenden Ingenieur während der Bemessung festgelegt.

Durch Verwendung der mit dem Erwartungswert μ_R bzw. μ_E normalisierten Variablen $R' = R/\mu_R$ und $E' = E/\mu_E$ lässt sich die Grenzzustandsfunktion wie folgt umformulieren:

$$g(\mathbf{X}) = \frac{\mu_R}{\mu_E} \cdot X_R \cdot R' - X_E \cdot E' = p \cdot X_R \cdot R' - X_E \cdot E' \qquad (10.19)$$

Die Variable $p = \mu_R/\mu_E$ bezeichnet das Verhältnis zwischen dem Mittelwert des Widerstandes μ_R und der Last μ_E. Sie ergibt sich aus der Bemessung; je konservativer die Bemessung, desto grösser wird p, was zu einer hohen Tragwerkszuverlässigkeit führt.

Um die Grenzzustandsfunktion weiter zu verallgemeinern, können auch die Zufallsvariablen G und F (ständige und variable Last) normalisiert werden:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= p \cdot X_R \cdot R' - X_E \cdot \left\{ \frac{\mu_G}{\mu_E} \cdot G' + \left(1 - \frac{\mu_G}{\mu_E}\right) \cdot F' \right\} \\ &= p \cdot X_R \cdot R' - X_E \cdot \{\alpha \cdot G' + (1-\alpha) \cdot F'\} \end{aligned} \qquad (10.20)$$

Mit Hilfe der Variablen $\alpha = \mu_R/\mu_E$ können auf einfache Weise verschiedene Bemessungssituationen untersucht werden: Hohe Werte für α bezeichnen einen grossen Anteil der ruhenden Last an der Gesamteinwirkung und umgekehrt.

Eine Aufstellung aller in der Grenzzustandsfunktion verwendeter Variablen findet sich in Tab. 10.9.

Tab. 10.9 *Variablendefinition für die Grenzzustandsfunktion. Grossbuchstaben bezeichnen Zufallsvariablen, Kleinbuchstaben deterministische Grössen. Normalisierte Zufallsvariablen werden in Gleichung (10.19) und (10.20) mit einem Strich bezeichnet, z.B. R' = R/µR.*

X_R	Modellunsicherheit (Widerstand)	G	Ständige Einwirkung
R	Tragwiderstand	F	Veränderliche Einwirkung, $F = F_1 + F_2$
X_E	Modellunsicherheit (Einwirkung)	F_1	Leiteinwirkung
E	(Totale) Einwirkung, $E = G + Q$	α	Ständige/totale Einwirkung, $\alpha = \mu_R/\mu_E$
p	Bemessungsvariable, $p = \mu_R/\mu_E$	α_F	Anteil der Leiteinwirkung, $\alpha_F = \mu_{F1}/\mu_F$

10.7.3 Definition einer allgemeinen Bemessungsgleichung

Analog zum Vorgehen im vorherigen Abschnitt lässt sich auch die Bemessungsgleichung in allgemeiner Form definieren. Ausgangspunkt ist die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= R_d - E_d = R_d - \{G_d + F_d\} \\ &= R_k/\gamma_M - \{G_k \cdot \gamma_G + F_k \cdot \gamma_F\} \\ &= \mu_R \rho_R/\gamma_M - \{\mu_G \rho_G \gamma_G + \mu_G \rho_G \gamma_F\} \end{aligned} \qquad (10.21)$$

Die Bemessungswerte R_d und E_d (bzw. G_d und F_d) werden durch Division bzw. Multiplikation der charakteristischen Werte R_k, E_k und F_k mit den Teilsicherheitsbeiwerten γ_M, γ_G und γ_F bestimmt. Die charakteristischen Werte sind hierbei als untere bzw. obere Fraktilwerte der Zufallsvariablen R, G und F definiert. Bei bekanntem Verteilungstyp und Variationskoeffizient können diese Quantile als Vielfaches der Mittelwerte μ_R, μ_G und μ_F ausgedrückt werden. Die Faktoren ρ_R, ρ_G und ρ_F müssen hierfür für jede Variable individuell bestimmt werden. Durch Normierung mit dem Erwartungswert der Einwirkung, $\mu_E = \mu_G + \mu_F$ wird Gleichung (10.21) in dasselbe Format gebracht wie die allgemeine Grenzzustandsfunktion in Gleichung (10.20):

$$g_d(\mathbf{X}_d) = p \cdot \rho_R/\gamma_M - \{\alpha \cdot \rho_G \gamma_G + (1-\alpha) \cdot \rho_F \gamma_F\} \tag{10.22}$$

Gleichung (10.22) wird im Rahmen der Normenkalibrierung genutzt, um die Bemessungsvariable p zu bestimmen. Hierfür wird angenommen, dass der projektierende Ingenieur optimal bemisst, d.h. $R_d = E_d$ bzw. $g_d(\boldsymbol{X}_d) = 0$. Der aus dieser Annahme resultierende Wert für p dient als Input für die Berechnung der Tragwerkszuverlässigkeit mit Hilfe der Grenzzustandsfunktionen (10.20). Die Zuverlässigkeitsbetrachtung kann so von einem konkreten Tragwerk losgelöst betrachtet werden. Zur Beschreibung der verschiedenen Bemessungssituationen werden lediglich die folgenden Angaben benötigt:

- Definition der charakteristischen Werte sowie Verteilungstyp und Variationskoeffizient aller Zufallsvariablen zur Berechnung der Faktoren ρ_R, ρ_G und ρ_F.
- Teilsicherheitsbeiwerte fürs Material (γ_M) sowie für die Einwirkungen (γ_G, γ_F).
- Verhältnis der ständigen und veränderlichen Einwirkungen α.

Die Berechnung der Tragwerkszuverlässigkeit bzw. Versagenswahrscheinlichkeit aus diesen Angaben erfolgt in zwei Schritten:

- Ermittlung der Bemessungsvariablen p mit Hilfe von Gleichung (10.22) unter der Annahme einer optimalen Bemessung ($g_d(\boldsymbol{X}_d) = 0$).
- Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = P[g(\boldsymbol{X}) \leq 0]$ mit Hilfe der Grenzzustandsgleichung (10.20).

Das beschriebene Vorgehen erlaubt die Berechnung der Tragwerkszuverlässigkeit für verschiedene Bemessungssituationen in Abhängigkeit der Teilsicherheitsbeiwerte. Umgekehrt kann aber auch ein bestimmter Sicherheitsbeiwert (z.B. γ_F) so festgelegt werden, dass eine zuvor festgelegte Ziel-Zuverlässigkeit erreicht wird. Genau dies wird nachfolgend gemacht.

10.7.4 Probabilistische Modelle für die einzelnen Zufallsvariablen

Tab. 10.10 enthält eine Übersicht über die probabilistischen Modelle der einzelnen Zufallsvariablen, die für die folgenden Berechnungen angenommen werden. Die getroffenen Annahmen werden nachfolgend kurz diskutiert. Als Grundlage für die gewählten Verteilungen und Variationskoeffizienten dient der JCSS Probabilistic Model Code [JCSS 2001]. Die veränderliche Einwirkung wird gemäss Kapitel 10.5 projektspezifisch modelliert.

Tab. 10.10 *Übersicht über die angenommenen probabilistischen Modelle für die in Tab. 10.9 aufgeführten Zufallsvariablen (Verteilungstyp, Variationskoeffizient CoV) sowie Angaben zur Bestimmung des Bemessungswertes (Teilsicherheitsbeiwert γ, Fraktil q zur Festlegung der charakteristischen Werte).*

Zufallsvariable	**Verteilung**	***CoV***	**γ**	***q***
Widerstand R				
Druckfestigkeit Beton	Lognormal	0.15	1.5	0.05
Fliessgrenze Betonstahl	Normal	0.07	1.15	0.05
Einwirkung E = G + Q				
Ständige Einwirkungen *G*	Normal	0.15	1.35	0.5
Veränderliche Einwirkung *F*	Lognormal	CoV_F (projekt-spezifisch)	γ_F (projekt-spezifisch)	p_{Fk} (projektspezifisch)
Modellunsicherheiten X				
Widerstandsseite X_R	Lognormal	0.1	–	–
Einwirkungsseite X_E	Lognormal	0.15	–	–

Tragwiderstand des Materials

Die Zufallsvariable R berücksichtigt die natürliche Variabilität des Tragwiderstandes aufgrund der Streuung der Materialeigenschaften. Der charakteristische Wert des Tragwiderstandes R_k wird in der Regel als 5 %-Fraktil der jeweiligen Verteilung definiert.

Tragwiderstand – Stahlbeton

Für Stahlbetonbauten ist vor allem die Druckfestigkeit des Betons sowie die Fliessgrenze des Betonstahls relevant. Im Folgenden wird angenommen, das der Tragwiderstand beim Versagen jeweils von einer der beiden Materialeigenschaften dominiert wird.

Für ein Druckversagen des Betons in Stahlbetonbauten wird R als lognormalverteilte Zufallsvariable mit einem Variationskoeffizienten von $CoV_R = 0.15$ modelliert. Die Unsicherheiten in Bezug auf den Betonquerschnitt sind klein im Vergleich zur Streuung des Materials und können deshalb vernachlässigt werden.

Für ein Zugversagen des Betonstahls in Stahlbetonbauten wird R als normalverteilte Zufallsvariable mit einem Variationskoeffizienten von $CoV_R = 0.07$ modelliert. Dieser Wert beinhaltet bereits einen kleinen Aufschlag für geometrische Unsicherheiten (Querschnittsfläche und Anordnung der Bewehrung).

Als Teilsicherheitsbeiwert für die Materialseite (γ_M in Gleichung (10.21)) wird für Stahlbetonbauten gemäss Norm SIA 262 [SIA 262 2013] $\gamma_M = 1.5$ (Betondruckfestigkeit) bzw. $\gamma_M = 1.15$ (Fliessgrenze Betonstahl) angesetzt.

Ständige Einwirkung

Für Steinschlagschutzgalerien sind drei ständige Einwirkungen relevant: Das Eigengewicht des Tragwerks, die Erdauflast aus der Erdüberdeckung. Für die folgenden Untersuchungen werden der Einfachheit halber alle ständigen Einwirkungen in einer einzigen Zufallsvariable G zusammengefasst.

Die Unsicherheit des Eigengewichts ist relativ klein. Der Variationskoeffizient liegt für Betonbauten in der Grössenordnung von etwa 5 % inklusive geometrischer Unsicherheiten.

Bei der Berechnung der Erdlasten ist neben der Wichte des Bodens (Variationskoeffizient 5-10 %) auch das Volumen der Erdüberdeckung unsicher. Insgesamt ist dadurch für die Erdlasten mit einem Variationskoeffizienten von 20 % oder mehr zu rechnen. Bei bestehenden Bauten können die Unsicherheiten durch eine detaillierte Aufnahme der Erdüberdeckung deutlich reduziert werden.

Fasst man die Erdlast und das Eigengewicht zusammen, ergibt sich aufgrund der geringeren Unsicherheit des Eigengewichts ein etwas niedrigerer Variationskoeffizient. Für die folgenden Untersuchungen wird G deshalb als normalverteilte Zufallsvariable mit einem Variationskoeffizienten $CoV_G = 0.15$ modelliert.

Der charakteristische Wert der ständigen Einwirkung, G_k, entspricht dem Mittelwert der zugrundeliegenden Normalverteilung. Bei symmetrischen Verteilungen entspricht dieser dem Median (50 %-Fraktil). Der Teilsicherheitsbeiwert für die ständige Einwirkung wird gemäss [SIA 260 2013**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**] auf $\gamma_{G,sup} = 1.35$ festgelegt.

Veränderliche Einwirkung

Für die vorliegende Untersuchung werden veränderliche Einwirkungen aufgrund von Steinschlag betrachtet. Andere veränderliche Einwirkungen (z.B. Wasserdruck, Wind, Nutzlasten, Fahrzeuganprall) werden in der vorliegenden Untersuchung nicht berücksichtigt.

Die Steinschlageinwirkungen sind in Kapitel 10.5 näher untersucht. Für die allgemeine Zuverlässigkeitsbetrachtung wird von einer Lognormalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem projektspezifischem Variationskoeffizienten CoV_F modelliert (Tab. 10.3)

Der charakteristische Wert der veränderlichen Einwirkung, F_k, wird mit Gleichung (10.2) berechnet. Der p-Fraktilwert der charakteristischen Einwirkung wird ebenfalls projektspezifisch bestimmt (Tab. 10.4).

Modellunsicherheit

Zusätzlich zu den Bemessungsgrössen R, G und F enthält die Grenzzustandsfunktion (10.20) Modellunsicherheiten X. Letztere sind in der Bemessungsgleichung nicht explizit enthalten.

Die Modellunsicherheit X_R auf der Widerstandsseite wird als eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von $X_R = 1.0$ und einem Variationskoeffizienten von $CoV_{XR} = 0.1$ angenommen.

Die Modellunsicherheit X_E auf der Einwirkungsseite wird von der Modellunsicherheit X_F der Steinschlageinwirkung und der Modellunsicherheit X_G des Eigengewichts abgeleitet. Ersteres ist in Kapitel 10.5.4 behandelt: Demnach ist X_F lognormalverteilt mit Erwartungswert $E[X_F] = 1$ und $CoV_{XF} = 0.5$; die Modellunsicherheit X_G wird ebenfalls als lognormalverteilt angenommen, mit Erfahrungswert $E[X_G] = 1$ und Variationskoeffizient $CoV_{XG} = 0.1$. Daraus wird die Modellunsicherheit der Einwirkung numerisch hergeleitet: X_E ist eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von $E[X_E] = 1$ und einem Variationskoeffizienten $CoV_{XE} = 0.15$. Der Variationskoeffizient CoV_{XE} ist relativ klein, weil allgemein $E[F] < E[G]$ ist. Somit wird CoV_{XE} von CoV_{XG} dominiert.

10.7.5 Teilsicherheitsbeiwerte

Bei gegebenem probabilistischen Model und Bemessungsgleichung lässt sich ein Teilsicherheitsbeiwert γ_F bestimmen, der sicherstellt, dass die vorgegebene Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit eingehalten ist. Die Teilsicherheitsbeiwerte γ_F sind in Abb. 10.10 in Funktion der Ziel-Zuverlässigkeitsindex β (siehe Tab. 10.8), und der Verhältnisse m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ angegeben. Gemäss Kapitel 10.4 ist $m_k = m_{100}$ und $v_k = v_{0.95}$.

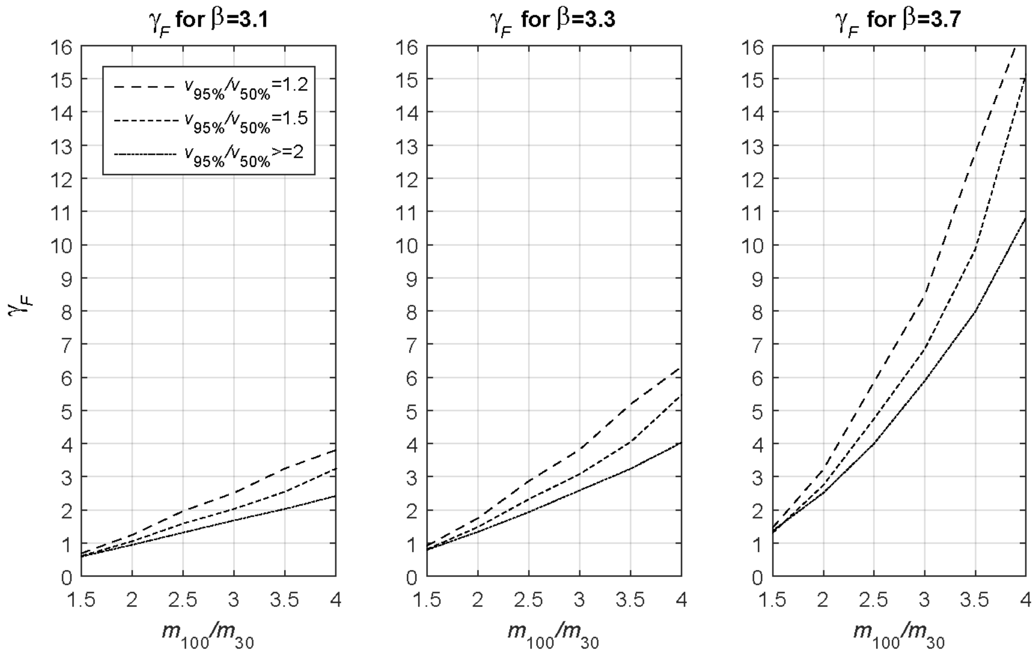


***Abb. 10.10** Teilsicherheitsbeiwerte in Funktion von Ziel-Zuverlässigkeitsindex β, Verhältnis m_{100}/m_{30} und Verhältnis $v_{0.95}/v_{0.5}$.*

Die Teilsicherheitsbeiwerte nehmen mit zunehmenden Verhältnis m_{100}/m_{30} ebenfalls zu. Es kann beobachtet werden, dass der Einfluss von m_{100}/m_{30} auf den Teilsicherheitsbeiwert grösser wird, wenn der Ziel-Zuverlässigkeitsindex β auch gross ist. Hingegen nimmt der Teilsicherheitsbeiwert γ_F bei zunehmenden Verhältnis $v_{0.95}/v_{0.5}$ ab. Dies mag überraschen, führt doch ein grosses $v_{0.95}/v_{0.5}$ zu einer Vergrösserung von CoV_F. Der Grund liegt bei dem p-Fraktilwert von F_k: Bei kleinen $v_{0.95}/v_{0.5}$ reduziert sich der p-Fraktilwert überproportional (siehe Tab. 10.4), was dann zu entsprechend grösseren Teilsicherheitsbeiwerten führen muss um die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit einzuhalten.

Bemerkenswert ist, wie untypisch gross die Teilsicherheitsbeiwerte werden, wenn m_{100}/m_{30} und die Ziel-Zuverlässigkeit β zunehmen. Dies hängt mit dem sehr grossen Variationskoeffizienten der Einwirkung CoV_F zusammen und damit verbunden mit den sehr langen Verteilungs-«Schwänzen». Aus dieser Beobachtung kann abgeleitet werden, dass es nicht immer realistisch ist, Personen und Infrastruktur durch Steinschlagschutzgalerien zu schützen. Ähnlich wie bei sehr grossen Steinschlag-Energien (>2500 kJ) müssen bei sehr grossen Variationskoeffizienten der Einwirkung ebenfalls andere Schutzlösungen berücksichtigt werden, z.B. Tunnel, Wannen oder verstärkte Dämme (siehe [ASTRA 2003]).

10.8 Ausweitung auf mehrere Homogenbereiche

Grundsätzlich werden für jeden Homogenbereich i die Steinmassen $m_{30,i}$ und $m_{100,i}$ sowie die Aufprallgeschwindigkeiten $v_{0.5,i}$ und $v_{0.95,i}$ geschätzt. Daraus werden die charakteristische Einwirkung $F_{k,i}$ und Teilsicherheitsbeiwerte $\gamma_{F,i}$ und schliesslich die Bemessungseinwirkung $F_{d,i} = F_{k,i} \cdot \gamma_{F,i}$ bestimmt. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Bemessungseinwirkungen der unterschiedlichen Homogenbereiche kombiniert werden können, um eine massgebende Bemessungseinwirkung für die ganze Galerie zu ermitteln.

Die Teilsicherheitsbeiwerte in Kapitel 10.7 wurden so bestimmt, dass die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit eingehalten wird, wenn die Steinschlaggefährdung von einem einzelnen Homogenbereich ausgeht. Ob die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit auch bei mehreren Homogenbereichen noch eingehalten ist, hängt davon ab, ob die Bemessungseinwirkungen $F_{d,i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ aus den einzelnen Homogenbereiche in einer ähnlichen Grössenordnung liegen. Nachfolgend wird beschrieben wie vorzugehen ist, wenn die Gefährdung von mehreren Homogenbereiche ausgeht:

1. Für jeden Homogenbereich $i = 1, 2, \ldots, N$ ist die Bemessungseinwirkung $F_{d,i} = F_{k,i} \cdot \gamma_{F,i}$ bestimmt worden.
2. Es wird die grösste Bemessungseinwirkung ermittelt:
   $F_{d,max} = \max\{F_{d,1}, F_{d,2}, \ldots, F_{d,i}, \ldots, F_{d,N}\}$
3. Es werden die Verhältnisse $\vartheta_i = F_{d,max}/F_{d,i}$ für $i = 1, 2, \ldots, N$ bestimmt.
4. Es wird die Anzahl n_ϑ der Homogenbereiche bestimmt, bei denen $\vartheta_i < 1.5$, $i = 1, 2, \ldots, N$ ist.
5. Die massgebende Bemessungseinwirkung F_d wird wie folgt in Funktion n_ϑ und $F_{d,max}$ bestimmt:
   - Wenn $n_\vartheta = 1$: $F_d = F_{d,max}$
   - Wenn $n_\vartheta = 2$: $F_d = 1.4 \cdot F_{d,max}$
   - Wenn $n_\vartheta > 2$: Eine probabilistische Analyse ist notwendig.

Es wird davon ausgegangen, dass in den meisten praxisrelevanten Fällen $n_\vartheta < 2$.

In Schritten 4 und 5 wurden zwei Werte verwendet, die erklärt werden müssen.

Der Grenzwert $\vartheta_i < 1.5$ wird wie folgt begründet: Wenn die Bemessungskraft $F_{d,i}$ eines Homogenbereichs viel kleiner als $F_{d,\mathrm{max}}$ ist, dann trägt der i-te Homogenbereich nicht wesentlich zur Versagenswahrscheinlichkeit bei und kann vernachlässigt werden. Sind die zwei grössten Bemessungskräfte vergleichbar gross (und haben somit $\vartheta_i < 1.5$), dann können Ereignisse aus beiden Homogenbereichen zur Versagenswahrscheinlichkeit beitragen. Die Grenze $\vartheta_i < 1.5$ muss in Berücksichtigung von CoV_F festgelegt werden[12]. Es wird davon ausgegangen, dass diese Grenze konservativ ist; dies sollte vor einer allfälligen Umsetzung in eine neue Richtlinie überprüft werden.

Der Faktor 1.4, mit dem $F_{d,\mathrm{max}}$ multipliziert wird, wenn $n_\vartheta = 2$, hat den folgenden Grund: Bei $n_\vartheta = 2$ sind die Bemessungseinwirkungen für zwei Homogenbereiche in einer ähnlichen Grössenordnung, das heisst Ereignisse aus beiden Homogenbereichen tragen zur Versagenswahrscheinlichkeit bei. Die Ziel-Versagenswahrscheinlichkeit ist dann sicher eingehalten, wenn die Versagenswahrscheinlichkeit pro Homogenbereich halbiert wird. Dies kann mit dem Faktor 1.4 bewirkt werden, denn er entspricht circa der Erhöhung der Teilsicherheitsbeiwerte die notwendig ist, um die Versagenswahrscheinlichkeit zu halbieren.

---

[12] Allgemein gilt, dass je grösser CoV_F, desto grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignisse aus unterschiedlichen Homogenbereichen zu der Versagenswahrscheinlichkeit beitragen, und entsprechend muss ein grösserer ϑ_i-Wert gewählt werden.

11 Bemessungskonzept

11.1 Übersicht

Auf der Grundlage der heutigen Richtlinie ASTRA 12006 und den Modellierungen in Kapitel 10 wird ein überarbeitetes Bemessungskonzept vorgeschlagen.

Randbedingungen für das Bemessungskonzept sind die einschlägigen SIA-Tragwerksnormen der 260er Generation, insbesondere die Normen SIA 260, SIA 261 und SIA 262. Das überarbeitete Bemessungskonzept wurde mit dem Ziel entwickelt, möglichst wenig an der heutigen Richtlinie zu ändern.

Das Bemessungskonzept folgt den folgenden Prinzipien:

- Die Bemessung erfolgt gemäss «*Load-Resistance Factor Design*».
- Einwirkungen und Widerstand werden statisch berechnet.
- Die Steinschlageinwirkung wird gemäss Norm SIA 261 als Lastfall «Anprall» behandelt.
- Die Ziel-Zuverlässigkeit ist neu eine Funktion des durchschnittlichen Tagesverkehrs *DTV* und der Fahrgeschwindigkeit v_{car}.
- Die Teilsicherheitsbeiwerte sind neu eine Funktion der Ziel-Zuverlässigkeit und der Verhältnisse m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$.

Nachfolgend wird auf die einzelnen Punkte eingegangen.

11.2 Bemessungssituation

Der Steinschlag ist eine aus einer Naturgefahr resultierende Einwirkung infolge von Anprall. Der Bemessungswert der Auswirkung ist gemäss Norm SIA 260 zu ermitteln (Zit. ASTRA 12006, Absatz 3.2)[13].

11.3 Ziel-Zuverlässigkeit

Tab. 11.1 *Definition der Konsequenz-Klassen (gemäss Norm SIA 269) in Abhängigkeit des durchschnittlichen täglichen Verkehres DTV und verschiedene der Fahrgeschwindigkeit v_{car}.*

Signalisierte Geschwindigkeit	**Durchschnittlicher täglicher Verkehr**		
v_{car} = 60km/h	*DTV* < 6'000	*DTV* = 6'000 – 26'000	*DTV* = 26'000 – 60'000
v_{car} = 80km/h	*DTV* < 5'000	*DTV* = 5'000 – 22'000	*DTV* = 22'000 – 50'000
v_{car} = 100km/h	*DTV* < 3'500	*DTV* = 3'500 – 15'000	*DTV* = 15'000 – 35'000
v_{car} = 120km/h	*DTV* < 3'000	*DTV* = 3'000 – 12'500	*DTV* = 12'500 – 28'000
	↓	↓	↓
Ziel-Zuverlässigkeits-index	$\beta = 3.1$	$\beta = 3.3$	$\beta = 3.7$

Die Ziel-Zuverlässigkeit des Tragwerkes wird in Funktion des *DTV* und der signalisierten Geschwindigkeit v_{car} festgelegt. Zuerst wird die Konsequenz-Klasse ρ in Funktion des *DTV*

[13] Steinschlag ist in der Norm SIA 261 und der Richtlinie ASTRA 12006 als aussergewöhnliche Einwirkung definiert, also eine Einwirkung die nur sehr selten vorkommt. Dies mag für normale Tragwerke angemessen sein, aber nicht für Steinschlagschutzgalerien, die einzig und alleine für den Schutz von Steinschlage bemessen sind. Deshalb wird die Steinschlageinwirkung hier nicht als «aussergewöhnlich» definiert.

und der signalisierten Geschwindigkeit v_{car} bestimmt, siehe Tab. 11.1. Ist die Konsequenz-Klasse ρ bestimmt, kann der Ziel-Zuverlässigkeitsindex β der [SIA 269 2011] entnommen werden.

Die Ziel-Zuverlässigkeit des Bauwerks ist nun bestimmt und es können als nächstes die entsprechenden Teilsicherheitsbeiwerte ermittelt werden.

11.4 Bemessungsereignisse und charakteristische Werte der Parameter

Der Geologe oder sachkundige Experte identifiziert homogene Steinablösungsbereiche. Ein Homogenbereich ist dadurch gekennzeichnet, dass die Wahrscheinlichkeit einer Steinablösung über die Bereichsfläche konstant ist. Für jeden Homogenbereich *i* wird eine charakteristische Einwirkung, ein Teilsicherheitsbeiwert und eine Bemessungseinwirkung bestimmt. Im letzten Schritt (Kapitel 11.7) werden die Werte aus allen Homogenbereichen kombiniert.

Für jeden Homogenbereich *i* werden folgende Werte geschätzt:

- Steinmasse des 30- und 100-jährigen Ereignis: $m_{30,i}$ und $m_{100,i}$.
- Median und 95 %-Quantil der Aufprallgeschwindigkeit: $v_{0.5,i}$ und $v_{0.95,i}$ (aus Trajektorienanalysen).

Der charakteristische Wert der Steinmasse ist als $m_{k,i} = m_{100,i}$ definiert. Der charakteristische Wert der Aufprallgeschwindigkeit ist als $v_{k,i} = v_{0.95,i}$ definiert.

Weiter muss der projektierende Ingenieur folgende Werte festlegen:

- Der charakteristische Wert des Reibungswinkels φ_k, der dem Erwartungswert $\varphi_k = E(\varphi)$ entspricht.
- Der charakteristische Wert des Zusammendrückungsmoduls $M_{E,k}$, der dem Erwartungswert $M_{E,k} = E[M_E]$ entspricht.

Der Radius r_i wird aus dem charakteristische Wert der Masse m_k berechnet: $r_i = \sqrt[3]{3m_{k,i}/4\rho\pi}$, wobei ρ die Steindichte ist.

11.5 Bemessungsgleichung

Der charakteristische Wert der Einwirkung für den i -ten Homogenbereich ist:

$$F_{k,i} = 1.95 \cdot e^{-0.5} \cdot r_i^{0.7} \cdot M_{E,k}^{0.4} \tan\varphi_k \left(\frac{m_{k,i} \cdot v_{k,i}^2}{2} \right)^{0.6} \quad (11.1)$$

Die Bemessungseinwirkung ist:

$$F_{d,i} = \gamma_{F,i} F_{k,i} \quad (11.2)$$

11.6 Teilsicherheitsbeiwert γ_F

Der Teilsicherheitsbeiwert wird in Funktion des Ziel-Zuverlässigkeitsindexes β und der Verhältnisse m_{100}/m_{30} und $v_{0.95}/v_{0.5}$ festgelegt und ist der nachfolgenden Abbildungen zu entnehmen.

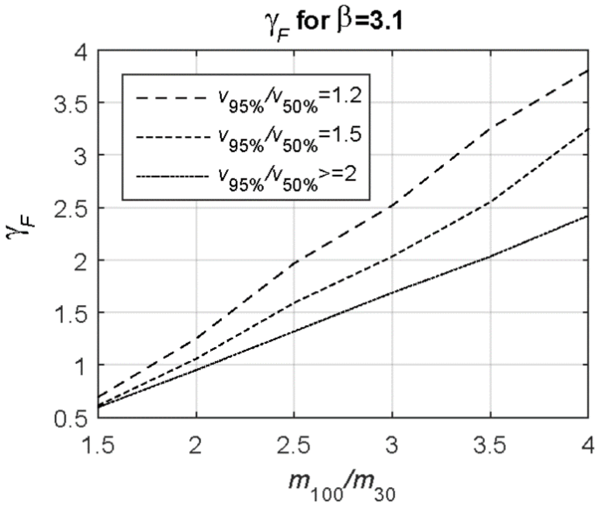


Abb. 11.1 *Teilsicherheitsbeiwerte für kleine Konsequenzen (ρ = 2, Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.1).*

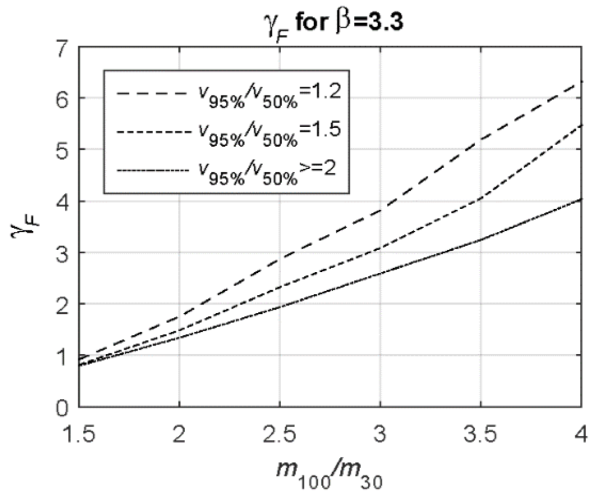


Abb. 11.2 *Teilsicherheitsbeiwerte für mittlere Konsequenzen (2 < ρ < 5, Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.3).*

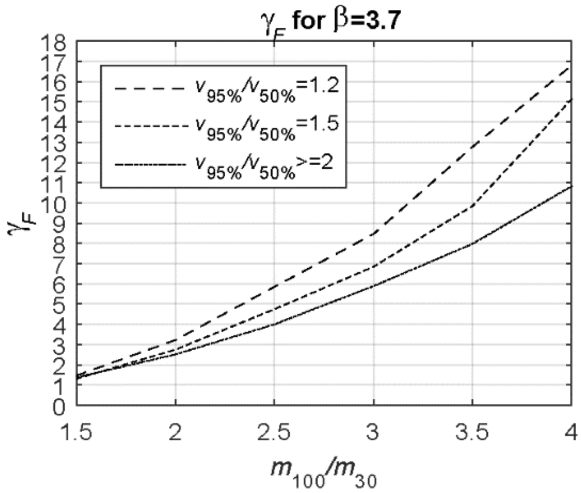


Abb. 11.3 *Teilsicherheitsbeiwerte für grosse Konsequenzen (5 < ρ < 10, Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.7).*

Ist das Verhältnis $m_{100}/m_{30} > 4$, sollte eine probabilistische Analyse durchgeführt werden.

11.7 Kombination der Einwirkungen aus mehreren Homogenbereichen

Für jeden Homogenbereich $i = 1, 2, \ldots, N$ ist die Bemessungseinwirkung $F_{d,i} = \gamma_{F,i} \cdot F_{k,i}$ bestimmt worden.

Die grösste Bemessungseinwirkung wird bestimmt: $F_{d,max} = \max\{F_{d,1}, F_{d,2}, \ldots, F_{d,i}, \ldots, F_{d,N}\}$.

Für jeden Homogenbereich $i = 1, 2, \ldots, N$ werden die Verhältnisse ϑ_i gebildet: $\vartheta_i = F_{d,max}/F_{d,i}$.

Es wird die Anzahl n_ϑ der Homogenbereiche bestimmt, bei denen $\vartheta_i < 1.5$, $i = 1, 2, \ldots, N$ ist.

Zum Schluss wird die massgebende Bemessungseinwirkung F_d wie folgt bestimmt:

Tab. 11.2 *Massgebende Bemessungseinwirkung*

Anzahl n_ϑ	**Massgebende Bemessungseinwirkung F_d**
1	$F_d = F_{d,max}$
2	$F_d = 1.4 \cdot F_{d,max}$
> 2	Eine probabilistische Analyse ist notwendig

11.8 Bemessungswert der statischen Ersatzlast

Der Bemessungswert der statischen Ersatzlast ist wie folgt definiert:

$$A_d = C \cdot F_d \tag{11.3}$$

Die Herleitung der Konstruktionsbeiwerte C wird nachfolgend beschrieben.

11.8.1 Neubauten

Die Konstruktionsbeiwerte C werden in Funktion des Versagensmechanismus bestimmt:

- Bei duktilem Bruchverhalten (Biegung): $C = 0.4$.
- Bei sprödem Bruchverhalten (Durchstanzen): $C = 1.2$.

Im Konstruktionsbeiwert sind sowohl die Plastifizierung des Tragwerks (Plastifizierungsgrad 10 bei Duktilbruch, Plastifizierungsgrad 1 bei Sprödbruch), wie auch die Erhöhung der Baustofffestigkeiten bei dynamischer Einwirkung berücksichtigt.

11.8.2 Überprüfung bestehender Galerien

Der Konstruktionsbeiwert C wird berechnet als

$$C = C_D \cdot \frac{R_m}{F} \tag{11.4}$$

wobei der Beiwert $C_D = 0.65$ ist und die dynamische Baustofffestigkeiten berücksichtigt. Das Verhältnis R_m/F des Tragwerkswiderstands und der Belastungsspitze wird in Funktion der Plastifizierung μ und des Verhältnisses t_d/T aus dem folgenden Antwortspektrum abgelesen. Die Eigenschwingzeit T des bestehenden Galerietragwerks muss bestimmt werden. Die Einwirkungsdauer $t_d = 0.04$ s wird angenommen. Bei Sprödversagen ist die Plastifizierung $\mu = 1$, bei Duktilversagen $\mu = 10$.

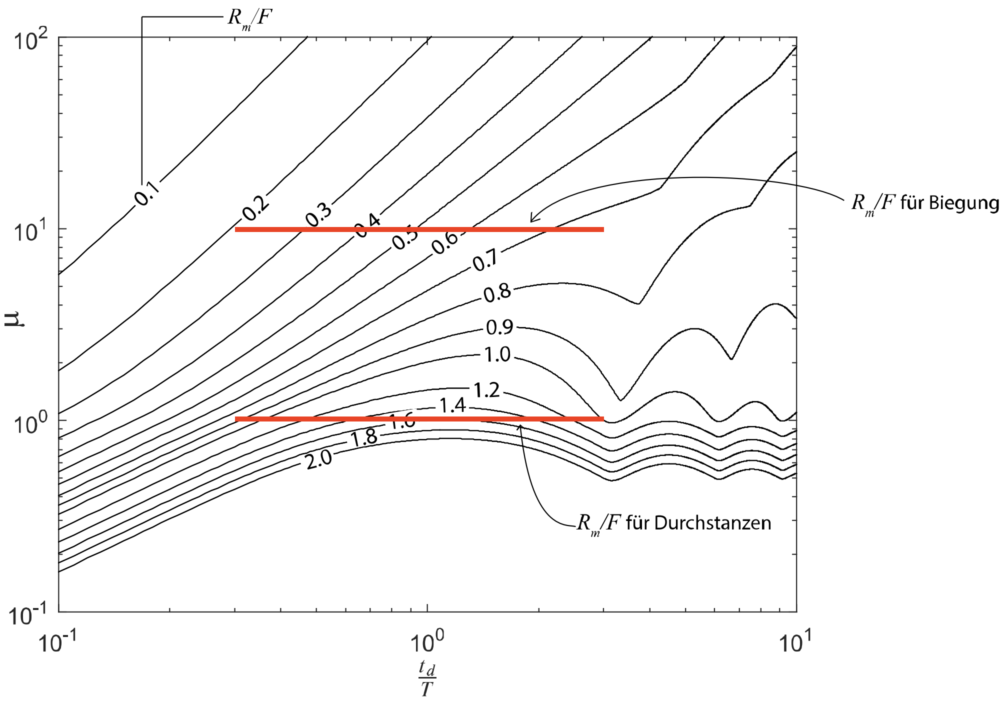


Abb. 11.4 *Antwortspektrum für elasto-plastische Antwort auf einen Sinusstoss (Berechnungsalgorithmus: siehe Kapitel 5.4.1 bzw. [Röthlin 2017])*

11.9 Tragwerkswiderstand

Auf der Widerstandsseite sind die Bemessungswerte, welche für statische Belastungen gelten, zu verwenden. Die Erhöhung der Bemessungswerte für die Bemessungssituation Anprall ist in C berücksichtigt. Die Ziffern 4.2.1.4 und 4.2.2.3 in der Norm SIA 262 sind somit nicht anzuwenden (wie bisher, Zit. ASTRA 12006, Kapitel 7).

12 Bemessungsbeispiel mit neuem Bemessungskonzept

Nachfolgend wird die Bemessungseinwirkung der Steinschlageinwirkung für ein fiktives Beispiel berechnet.

12.1 Eingangswerte

Daten zum Verkehr:

- Durchschnittlicher Tagesverkehr: DTV = 12'000 Fahrzeuge
- Fahrgeschwindigkeit: v_{car} = 60 km/h

Steinschlaggefährdung:

- Anzahl Homogenbereiche: 2 Bereiche

Tab. 12.1 *Beispielrechnung: Steinschlaggefährdung.*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
Steinmasse des 30-jährigen Ereignis:	m_{30} = 0.75 t	m_{30} = 0.2 t
Steinmasse des 100-jährigen Ereignis:	m_{100} = 2 t	m_{100} = 0.4 t
Median der Aufprallgeschwindigkeit:	$v_{0.5}$ = 8 m/s	$v_{0.5}$ = 13 m/s
95 %-Quantil der Aufprallgeschwindigkeit:	$v_{0.95}$ = 11 m/s	$v_{0.95}$ = 22 m/s

Geplante Galerieeigenschaften:

- Stärke der Erdeindeckung: e = 1 m
- Reibungswinkel der Erdeindeckung: φ = 35°
- Zusammendrückungsmodul der Erdeindeckung: M_E = 45 GPa

12.2 Charakteristische Werte

Gemäss Kapitel 11.4:

Tab. 12.2 *Beispielrechnung: charakteristische Werte.*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
Steinmasse:	$m_{k,1} = m_{100}$= 2 t	$m_{k,2} = m_{100}$= 0.4 t
Aufprallgeschwindigkeiten:	$v_{k,1} = v_{0.95}$ = 11 m/s	$v_{k,2} = v_{0.95}$ = 22 m/s
Erdeindeckung:	$e = e_k$ = 1 m	
Reibungswinkel:	$\varphi_k = \varphi$ = 35°	
Zusammendrückungsmodul:	$M_{E,k} = M_E$ = 45'000 kN/m^2	

Der charakteristische Wert der Einwirkung ist gemäss Gleichung (11.1):

Tab. 12.3 *Beispielrechnung: charakteristische Einwirkungen.*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
Charakteristische Einwirkung $F_{k,i}$	$F_{k,1}$ = 1'167 kN	$F_{k,2}$ = 701 kN

12.3 Ziel-Zuverlässigkeit und Teilsicherheitsbeiwert

Die Ziel-Zuverlässigkeit wird über die Konsequenz-Klasse mit Tab. 11.1 bestimmt.

- *DTV* = 12'000 Fahrzeuge und v_{car} = 60 km/h, ergibt aus Tab. 11.1 ein Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.3.

Bei einem Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.3 wird der Teilsicherheitsbeiwert aus Abb. 11.2 abgelesen. Dazu werden folgende Verhältnisse benötigt:

Tab. 12.4 *Beispielrechnung: Verhältnisse.*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
m_{100}/m_{30}	2.66	2
$v_{0.95}/v_{0.5}$	1.375	1.69

Der Teilsicherheitsbeiwert beträgt $\gamma_{F,1}$ = 2.3 für Bereich 1 und $\gamma_{F,1}$ = 1.4 für Bereich 2.

12.4 Bemessungswerte der Einwirkung

Die Bemessungseinwirkungen für die beiden Homogenbereiche sind:

Tab. 12.5 *Beispielrechnung: Bemessungseinwirkung.*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
F_k	1'487 kN	995 kN
γ_F	2.3	1.4
F_d	2'683 kN	981 kN

Die maximale Bemessungseinwirkung ist $F_{d,max} = \max\{F_{d,1}, F_{d,2}\}$ = 2'683 kN.

Es werden die Verhältnisse $\vartheta_i = F_{d,max}/F_{d,i}$ gebildet:

Tab. 12.6 *Beispielrechnung: Verhältnisse .*

	Homogenbereich 1	**Homogenbereich 2**
ϑ_i	1	2.73

Nur bei einem Homogenbereich ist $\vartheta_i < 1.5$, deshalb ist $n_\vartheta = 1$, und entsprechend ist die massgebende Bemessungseinwirkung:

$$F_d = F_{d,max} = 2'683 \text{ kN}$$

Dazu kommen noch die Konstruktionsbeiwerte wie bis anhin.

Bemessungswert der statischen Ersatzlast für sprödes Versagen (C = 1.2):

$$A_d = F_d \cdot C = = 3'220 \text{ kN}$$

Bemessungswert der statischen Ersatzlast für duktiles Versagen (C = 0.4):

$$A_d = F_d \cdot C = = 1'073 \text{ kN}$$

13 Vergleich der Bemessungskonzepte

In diesem Kapitel werden das aktuelle und das überarbeitete Bemessungskonzept verglichen. Für das aktuelle Bemessungskonzept wird von $m_k = m_{100}$,$v_k = v_{0.95}$ und $\gamma_F = 1$ ausgegangen. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die prozentuale Veränderung der Bemessungslasten durch das überarbeitete Bemessungskonzept. Beim Vergleich ist wichtig anzumerken, dass der in den Abbildungen angegebenen Ziel-Zuverlässigkeitsindex β nur für die Bemessungseinwirkung aus dem überarbeiteten Bemessungskonzept gilt.

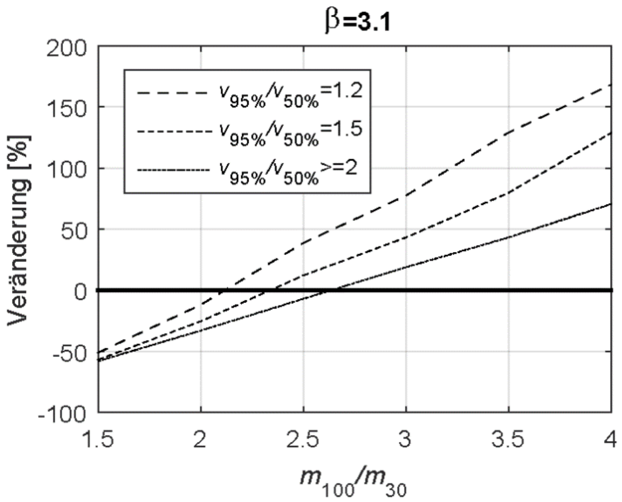


Abb. 13.1 *Prozentuale Veränderung der Bemessungslast durch das überarbeitete Bemessungskonzept für kleine Konsequenzen ($\rho < 2$ und Ziel-Zuverlässigkeitsindex $\beta = 3.1$).*

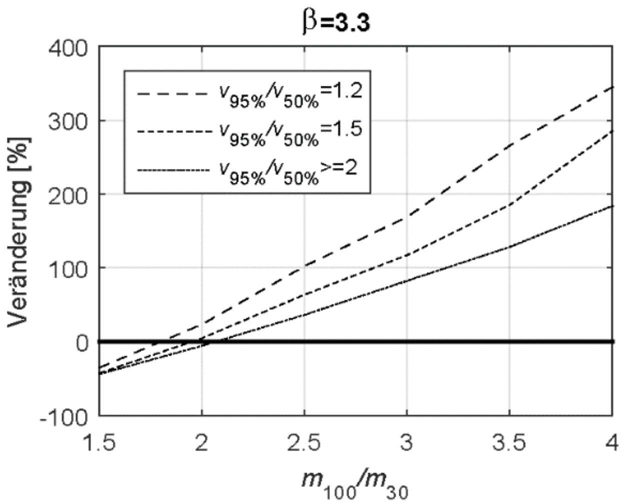


Abb. 13.2 *Prozentuale Veränderung der Bemessungslast durch das überarbeitete Bemessungskonzept für mittlere Konsequenzen ($2 < \rho < 5$ und Ziel-Zuverlässigkeitsindex $\beta = 3.3$).*

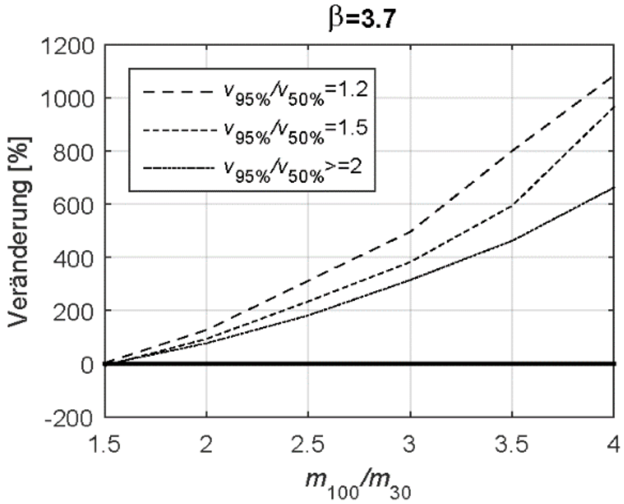


Abb. 13.3 *Prozentuale Veränderung der Bemessungslast durch das überarbeitete Bemessungskonzept für grosse Konsequenzen (5 < ρ < 10 und Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.7).*

Wurden bisher Steinschlagereignisse als aussergewöhnliche Einwirkungen berücksichtigt, zeigen die Diagramme in Abb. 13.1 bis Abb. 13.3 direkt, welche Änderung der Bemessungswerte notwendig wäre. Grosse Streuungen der Aufprallgeschwindigkeiten ergeben kleinere Teilsicherheitsbeiwerte, da die Streuung bereits im charakteristischen Wert der Bemessungsgleichung (11.1) eingeflossen ist. Grosse Massen der Steinblöcke mit Wiederkehrperiode 100 Jahre im Vergleich zur Wiederkehrperiode 30 Jahre bedeuten ein grösseres kumuliertes Risiko und erfordern deshalb grössere Teilsicherheitsfaktoren.

Bei kleinen Konsequenzen (ρ < 2 und Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.1) sind bei einer Behandlung der Steinschlageinwirkung als Leiteinwirkung (γ_F = 1.5) mit dem bisherigen Vorgehen je nach Verhältnis $v_{95\%}/v_{50\%}$ alle Fälle bis m_{100}/m_{30} von 2.7 bzw. von 3.7 abgedeckt.

Bei grossen Konsequenzen (5 < ρ < 10 und Ziel-Zuverlässigkeitsindex β = 3.7) wären in Extremfällen hingegen sogar zweistellige Teilsicherheitsfaktoren erforderlich. Dies zeigt, dass damit wohl die Grenzen des Partialsicherheitskonzepts erreicht bzw. überschritten sind und andere Bemessungsmethoden oder sogar andere Schutzmassnahmen anzuwenden wären.

14 Handlungsempfehlungen und Ausblick Teil B

14.1 Handlungsempfehlungen

Aufgrund der Ausführungen in diesem Bericht, können folgende Handlungsempfehlungen gemacht werden:

- Die Richtlinie ASTRA 12006 basiert auf Forschungsresultate aus den 1990er Jahren. Es wird empfohlen die Richtlinie ASTRA 12006 unter Berücksichtigung der Forschung der letzten 20 Jahren zu überarbeiten.
- Das Bemessungskonzept der Richtlinie ASTRA 12006 sollte in mindestens folgenden zwei Belangen revidiert werden:
    - Die Bedeutung von «charakteristischen Wert» definieren.
    - Das Bemessungsereignis definieren.
- Um in jeder Bemessungssituation eine angemessene Sicherheit gewährleisten zu können, wird empfohlen das Bemessungskonzept
    - auf ein transparentes probabilistisches Modell abzustützen, und
    - das Sicherheitsniveau einer Galerie in Funktion des durchschnittlichen Tagesverkehrs (DTV) und der Variabilität der Steinschlageinwirkung festzulegen.

  Da die Variabilität der Steinschlageinwirkungen (m_{100}/m_{30} und $v_{95\%}/v_{50\%}$) einen grossen Einfluss hat und einen grossen Wertebereich abdeckt, ist es nicht möglich, feste Werte für den erforderlichen Teilsicherheitsbeiwert vorzuschlagen.
- In Teil B dieses Berichts wird ein überarbeitetes Bemessungskonzept vorgeschlagen, das die vorangehenden Punkte erfüllt. Es wird empfohlen, dieses in einer Überarbeitung der Richtlinie ASTRA 12006 zu berücksichtigen.
- Bei der Überprüfung von bestehenden Galerien wird empfohlen, dass die Konstruktionsbeiwerte bauwerkspezifisch bestimmt werden (aus Abb. 11.4) und, dass probabilistische Analysen zugelassen werden.

14.2 Ausblick

Einige Fragenstellungen bleiben offen. Es wird empfohlen, diese weiter zu untersuchen:

- In den letzten 10 Jahren wurden an der ETH Zürich drei Doktorarbeiten zum Tragwerkverhalten von Steinschlagschutzgalerien geschrieben ([Schellenberg 2008], [Ghadimi Khasraghy 2011] und [Röthlin 2017]). Das überarbeite Bemessungskonzept berücksichtigt die Erkenntnisse aus diesen Arbeiten nur teilweise, insbesondere da bei den Arbeiten eine Umsetzung in ein Bemessungskonzept noch erfolgen muss. Die möglichen Implikationen der drei Doktorarbeiten auf die Bemessung einer Galerie müssen erarbeitet werden.
- In Kapitel 9.3.2 wurde die Einwirkung gemäss der Gleichung aus ASTRA 12006 mit Versuchsergebnisse verglichen. Die Vergleiche deuten darauf hin, dass die Gleichung der dynamischen Einwirkung in der Richtlinie eine gültige Form hat; jedoch auch, dass systematische Abweichungen vorhanden sind, die innerhalb einer Versuchsserie konstant sind, aber zwischen Versuchsserien unterschiedlich. Der Grund für die systematischen Abweichungen konnte nicht identifiziert werden und sollte in Zukunft weiter untersucht werden.
- Die Steinmassen m_{30} und m_{100} sind massgebende Parameter zur Bestimmung der Bemessungseinwirkung. Expertenschätzungen können mit grossen Unsicherheiten verbunden sein. In diesem Bericht und im Bemessungskonzept wurde diese Unsicherheit berücksichtigt aber nicht weiter thematisiert. Diese sollte in Zukunft weiter untersucht und quantifiziert werden.
- Bei der Zusammenführung der Bemessungseinwirkungen aus unterschiedlichen Homogenbereiche (Kapitel 10.8) wurden einige Grenzwerte vorgeschlagen. Diese müssen vor einer Implementierung in eine Richtlinie gegebenenfalls angepasst werden.

- Der Kraftzeit-Verlauf ist hier als sinusförmig angenommen. Dies sollte in Zukunft anhand von Versuchen überprüft werden.
- Im Bericht werden für neue und bestehende Galerien Ziel-Zuverlässigkeiten empfohlen, die den kleinsten gesellschaftlich akzeptierten Werte entsprechen. Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen würden bei der Überprüfung von bestehenden Galerien in noch kleineren Zuverlässigkeiten resultieren. Es ist abzuklären, inwiefern eine kleinere Zuverlässigkeit bei Schutzbauten von der Gesellschaft akzeptieren werden können.

Bezeichnungen Teil B

Lateinische Grossbuchstaben

A_d	Bemessungswert der Ersatzkraft
B	Einsturzlänge/breite des Galleriedachs
C	Konstruktionsbeiwert
C_B	Baukosten
C_d	Bemessungsbeiwert
CoV_e	Variationskoeffizient der Erdeindeckung e
CoV_F	Variationskoeffizient der Einwirkung F
CoV_{Me}	Variationskoeffizient des Zusammendrückungsmoduls M_e
CoV_m	Variationskoeffizient der Steinmasse m
CoV_R	Variationskoeffizient des Tragwerkwiderstandes R
CoV_v	Variationskoeffizient der Aufprallgeschwindigkeit v
CoV_ρ	Variationskoeffizient der Steindichte ρ
CoV_φ	Variationskoeffizient des Reibungswinkels φ
C_T	(finanzielle) Konsequenzen eines Ereignisses
C_W	Wiederherstellungskosten einer Gallerie
C_0	fixe Baukosten
C_1	Sicherheitskosten
DTV	durchschnittlicher täglicher Verkehr
E	Einwirkung bzw. Auswirkung
E'	normalisierte Einwirkung bzw. Auswirkung
E_d	Bemessungswert der Auswirkung
$E[\ldots]$	Erwartungswert einer Grösse …
E_T	erwartete Anzahl Todesfälle bei Gallerieversagen
F	Einwirkung am Aufprallort
F	variable Last
F_d	Bemessungswert der variablen Last
$F_{d,\max}$	grösster Bemessungswert der variablen Lasten aus allen Homogenbereichen
$F_{d,i}$	Bemessungswert der variablen Last des Steinblocks aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
F^*	Einwirkung unter Berücksichtigung der Modellunsicherheit
F_k	charakteristischer Wert der Einwirkung am Aufprallort
$F_{k,i}$	charakteristischer Wert der Einwirkung des Steinblocks aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
F_1	Leiteinwirkung
G	ständige Last/Einwirkung
G'	normalisierte ständige Last
G_d	Bemessungswert der der ständigen Last
GK	Grenzwert für die Kosten der Rettung eines Menschenlebens
L	Fahrzeuglänge
L_W	Wiederherstellungslänge

M_E	statischer Zusammendrückungsmoduls der Eindeckung
$M_{E,k}$	charakteristischer Wert des statischen Zusammendrückungsmoduls der Eindeckung
N	Anzahl Homogenbereiche
$P[\ldots]$	(Überschreitungs-)Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses …
P_f	Versagenswahrscheinlichkeit
$P_{f,opt}$	wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit
$P_{f,zulässig}$	maximal zulässige Versagenswahrscheinlichkeit zur Einhaltung des Grenzwertes des Indiviidualrisikos
$P_{T,Chauffeur}$	wirtschaftlich optimale Versagenswahrscheinlichkeit
Q_d	Bemessungslast
R	Tragwerkswiderstand
R'	normalisierter Tragwerkswiderstand
$R(m_k)$	Wiederkehrperiode des Bemessungsereignises mit Masse m_k
R_d	Bemessungswert des Widerstands
R_{Fk}	Wiederkehrperiode der Einwirkung F_k
R_m	Belastungsspitze
S_H	Bremsweg
T	Eigenschwingzeit
T	Reaktionszeit
$VAR[\ldots]$	Varianz einer Grösse …
W	Distanz zwischen Fahrzeug und Einschlagort
X_E	Modellunsicherheit des Auswirkungsmodells
X_F	Modellunsicherheit der Steinschlageinwirkung
X_G	Modellunsicherheit des Eigengewichts
X_R	Modellunsicherheit des Widerstandsmodells

Lateinische Kleinbuchstaben

a	Bremsbeschleunigung
c	Steigung der Regressionsgeraden
e	Schichtstärke der Eindeckung
e_k	charakteristischer Wert der Schichtstärke der Eindeckung
$g(\boldsymbol{X})$	Grenzzustandsfunktion
$g_d(\boldsymbol{X}_d)$	Grenzzustandsfunktion auf Bemessungsniveau
h	Fallhöhe
i	Nummer des Homogenbereichs
i	Diskontierungszinssatz
m	Masse des Steinblocks/Fallkörpers
m_k	charakteristischer Wert der Masse des Steinblocks
$m_{k,i}$	charakteristischer Wert der Masse des Steinblocks aus dem Homogenbereich i, $i = 1, 2, \ldots, N$
m_{30}	Masse des Steinblocks mit Wiederkehrperiode 30 Jahre
$m_{30,i}$	Masse des Steinblocks mit Wiederkehrperiode 30 Jahre aus dem Homogenbereich i, $i = 1, 2, \ldots, N$
m_{100}	Masse des Steinblocks mit Wiederkehrperiode 100 Jahre

$m_{100,i}$	Masse des Steinblocks mit Wiederkehrperiode 100 Jahre aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
n_{ϑ}	Anzahl Homogenbereiche mit relevanter Bemessungseinwirkung
p	jährliche Unterschreitungswahrscheinlichkeit
p	globaler Sicherheitsfaktor/Bemessungsvariable
p'	globaler Sicherheitsfaktor bei üblicher Bemessung
p_{direkt}	Wahrscheinlichkeit eines direkten Treffers
$p_{T\|direkt}$	Todesfallwahrscheinlichkeit im Falle eines direkten Treffers
$p_{indirekt}$	Wahrscheinlichkeit eines indirekten Treffers
$p_{T\|indirekt}$	Todesfallwahrscheinlichkeit im Falle eines indirekten Treffers
p_T	Wahrscheinlichkeit, dass es bei einem Ereignis zu einem Todesfall kommt
q	Fraktil
r	Radius der Ersatzkugel
r_i	Radius der Ersatzkugelzum Steinblock aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
r^2	Bestimmtheitsmass der linearen Regression
t_d	Einwirkungsdauer
v	Aufprallgeschwindigkeit
v_{car}	Fahrgeschwindigkeit, signalisierte Höchstgeschwindigkeit
v_{impact}	Fahrgeschwindigkeit beim Aufprall
v_k	charakteristischer Wert der Aufprallgeschwindigkeit
$v_{50\,\%}$	50 %-Fraktliwert der Aufprallgeschwindigkeit
$v_{50\%,i}$	50 %-Fraktliwert der Aufprallgeschwindigkeit aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
$v_{95\,\%}$	95 %-Fraktliwert der Aufprallgeschwindigkeit
$v_{95\,\%,i}$	95 %-Fraktliwert der Aufprallgeschwindigkeit aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N

Griechische Kleinbuchstaben

α	Anteil ständige Last
α_F	Anteil Leiteinrichtung
β	durchschnittlicher Besetzungsgrad eines Fahrzeuges
β	Ziel-Zuverlässigkeitsindex
γ	Teilsicherheitsbeiwert
γ_F	Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen
$\gamma_{F,i}$	Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen aus dem Homogenbereich i, i = 1, 2, …, N
γ_G	Teilsicherheitsbeiwert für ständige Lasten
γ_M	Teilsicherheitsbeiwert fürs Material
ϑ_i	Verhältnis von maximaler Bemessungseinwirkungen zu jener aus Homogenbereich i
κ	Regressionsparameter
λ	Regressionsparameter
μ	Plastifizierungsgrad
μ_E	Erwartungswert der Einwirkung bzw. Auswirkung E

μ_G	Erwartungswert der ständigen Last *G*
μ_R	Erwartungswert des Tragwiderstands *R*
μ_κ	Mittelwert des Regressionsparameters λ
μ_λ	Mittelwert des Regressionsparameters λ
ρ	Steindichte
ρ	Konsequenz-Quotient
ρ_F	Faktor für Quantil der variablen Last
ρ_G	Faktor für Quantil der ständigen Last
ρ_R	Faktor für Quantil des Tragwiderstands
φ	Reibungswinkels des Eindeckungsmaterials
φ_k	charakteristischer Wert des Reibungswinkels des Eindeckungsmaterials
ψ_2	Reduktionsbeiwert für den quasi-ständigen Wert einer veränderlichen Einwirkung
ψ_i	Reduktionsbeiwerte für veränderliche Einwirkungen
ω	obsolence rate (Kehrwert der Nutzungsdauer)

Griechische Grossbuchstaben

Ψ	Kovarianz-Matrix

Glossar

Begriff	Bedeutung
Aufprallkraft	Kraft zwischen Aufprallkörper und Eindeckung, bestimmt aus Masse und Verzögerung des Aufprallkörpers.
CoV	Variationskoeffizient. Das Verhältnis zwischen Standardabweichung und Mittelwert einer Variable.
Dehnrate	Dehngeschwindigkeit, insbesondere gebraucht in zusammengesetzten Begriffen wie "Dehnrateneffekt"
Diskrete-Elemente-Methode (DEM)	Netzfreie, diskontinuumsmechanische nummerische Modellierungsmethode für granulare Medien mit starren Partikeln und weichen Kontaktstellen.
Diskontinuierliches Spannungsfeld	Bereich mit mathematisch beschreibbarem Spannungszustand, an dessen Grenzen nur die Gleichgewichts- nicht aber Verträglichkeitsbedingungen eingehalten werden (statische Diskontinuitätslinien bzw. -flächen).
Dissipationsenergie	plastische Formänderungsenergie
Dissipationsleistung	irreversible Anteil der Entropierate
Dissipationsvermögen	Fähigkeit Stossenergie in plastische Deformationen umzuwandeln
DTV	Durchschnittlicher Tagesverkehr.
Dynamische Einwirkung	Maximalwert der dynamischen Kraft, die bei gegebenem Steinschlagereignis auftritt.
Dynamische Festigkeit	Festigkeit bei grossen Dehnraten, wie sie bei Stossvorgängen auftreten
Elastischer Stoss	Stoss bei dem die kinetische Energie des Systems erhalten bleibt.
Energie(erhaltungs)satz	Die (zeitliche) Ableitung der kinetischen Energie eines Systems ist gleich der wirklichen Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte.
Fliessgelenklinie	Kinematische Diskontinuitätslinie bei Platten, an der sich die Biegeverzerrungen in einem engen Bereich konzentrieren und durch einen Gelenkwinkel ausgedrückt werden können.
GK	Grenzwert für die Kosten zur Rettung eines Menschenlebens festgelegt, bis zu dem eine Sicherheitsinvestition als sinnvoll erachtet wird.
Globaler Sicherheitsfaktor p	Mass für die Sicherheit eines Tragwerks. Ist wie folgt definiert $p = E[R]/E[S]$, wobei $E[\ldots]$ der Erwartungswertoperator ist, R der Widerstand eines Tragwerks und S die Einwirkung.
Homogenbereich	Homogener Steinablösungsbereich; dadurch gekennzeichnet, dass die Wahrscheinlichkeit einer Steinablösung über den gesamten Bereich konstant ist.
Impulsbelastung	Kraftstoss mit Dauer gegen Null gehend, so dass der gestossene Körper nach dem Stoss augenblicklich eine Anfangsgeschwindigkeit aufweist, auch Dirac-Stoss genannt.
Impulserhaltungssatz	Die zeitliche Ableitung des bezüglich eines Inertialsystems berechneten Gesamtimpulses eines Körpers K ist gleich der Summe der äusseren Kräfte.
JCSS	Joint Committee on Structural Safety.

Kapazitätsbemessung	Bemessen/Nachweisen der spröden Bereiche mit Einwirkungen, die durch das massgebende duktile Versagen gegeben und damit beschränkt sind.
Knotenkraft	Konzentrierte Querkraft am Schnittpunkt einer Fliessgelenklinie mit einem freien Rand (Typ I) oder mit andern Fliessgelenklinien (Typ II).
Konservative Kräfte	Kräfte, die als Gradient einer Potentialfunktion formuliert werden können (Gravitation, Elastizität, Auftrieb)
Konstruktionsbeiwert	Faktor, der mit der dynamischen Einwirkung multipliziert wird, um nichtlineares Tragwerksverhalten zu berücksichtigen.
Kraftstoss	Integral der Anprallkraft über die Stosszeit
Lebenszykluskosten	Kosten für Planung, Erstellung, Betrieb, Erhaltung und Rückbau eines Bauwerks.
Modalform	Verschiebungsfeld im Zeitpunkt einer maximalen Verschiebung nach Abklingen der Anregung, auch Eigenform genannt.
Modellunsicherheit	Unsicherheiten die bei der Modellierung durch fehlendes Wissen oder vereinfachende Annahmen entstehen.
Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb	Ansatz für das Bruchverhalten von Beton (Fliessbedingungen) mit Kohäsion und Winkel der inneren Reibung mit Begrenzung der Zugfestigkeit
Monoton (ansteigende) Belastung	Steigende Belastung ohne Entlastungsphasen oder Lastzyklen.
Nichtkonservative Kräfte	Kräfte, die nicht als Gradient einer Potentialfunktion formuliert werden können (Reibung, Plastifizierung, Dämpfung)
Normalmomenten-Fliess-bedingung	Fliessbedingung für beliebig orientierte Gelenklinien in orthogonal bewehrte Platten, formuliert mit den plastischen Momenten in den Bewehrungsrichtungen
Optimales Sicherheitsniveau	Sicherheitsniveau, dass aus einer wirtschaftliche Optimierung (Minimierung der Gesamtkosten) hervorgeht. Das optimale Sicherheitsniveau ist nie alleine Massgebend und muss jeweils im gesellschaftlichen Kontext der Risikoakzeptanz beurteilt werden.
Plastischer Stoss	Beim (vollkommen) plastischem, idealpalstischem oder vollkommen unelastischem Stoss bewegen sich die beiden Körper nach dem Stoss mit derselben Geschwindigkeit
Plastisches Potential	Fliessfunktion (Fliessfläche im Spannungsraum), zu der der Verzerrungsvektor orthogonal ist
Prinzip der virtuellen Leistungen	Modifikation des Prinzips der virtuellen Arbeiten durch Ersatz der virtuellen Verschiebungen durch deren zeitliche Ableitungen (virtuelle Geschwindigkeiten).
Prinzip von d'Alembert	Erweiterung der (statischen) Gleichgewichtsbedingungen um die von Masse und Beschleunigung abhängigen Trägheitskräfte
Sicherheitskosten	Baukosten für die Erhöhung des globalen Sicherheitsfaktors p um 1.
Statische Ersatzlast	Umgerechnete dynamische Einwirkung unter Berücksichtigung der Nichtlinearität des Tragwerksverhalten.
Thermomechanik	Verknüpfung von Kontinuumsmechanik und Thermodynamik
Traglastverfahren	Auf den oberen und den unteren Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie gestütztes Verfahren um für eine einparametrige Belastung die Traglast einzugrenzen.
Transmittierte Aufprallkraft	Kraft zwischen Stahlbeton(verbund)platte und deren Unterlage, gemessen mit Lastzellen
Verformungsbedarf	Im vorliegenden Fall:

	Maximale dynamische, plastische Durchbiegung der Stahlbetonplatte am Aufprallort infolge eines aufprallenden Körpers
Verformungsvermögen	Im vorliegenden Fall: Resultierende Einsenkung am Aufprallort infolge Rotationsvermögen der plastischen Gelenkbereiche, auch globale Verschiebeduktilität genannt.
Verzerrungsarbeit	Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte, virtuelle Formänderungsarbeit
Virtuelle (äussere) Ergänzungsarbeit	Skalarprodukt von virtuellen äusseren Kräften und den zugehörigen Verschiebungen
Viskos	Dehnratenabhängig
Zuverlässigkeitsindex	Mass für die Zuverlässigkeit eines Tragwerks.

Literaturverzeichnis

Alvarez, M., (1998), "**Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 236, Dissertation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998, 182 pp. www.research-collection.ethz.ch

Alvarez, M., Köppel, S., and Marti, P., (2000), "**Rotation Capacity of Reinforced Concrete Slabs**", *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No. 2, 2000, pp. 235-244. www.research-collection.ethz.ch

Ammann, W., Mühlematter M., und Bachmann, H., (1982), "**Versuche an Stahlbeton- und Spannbetontragwerken unter stossartiger Belastung**", Teil 1: Zugversuche an Bewehrungs- und Spannstahl mit erhöhter Dehngeschwindigkeit, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *Versuchsbericht Nr. 7709-1*, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1982. www.research-collection.ethz.ch

Ammann, W., (1983), "**Stahlbeton- und Spannbetontragwerke unter stossartiger Belastung**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 142, Dissertation Nr. 7285,* , Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1983, 285 pp. www.research-collection.ethz.ch

Asprone, D., Cadoni, E., and Prota, A., (2009)a, "**Experimental Analysis on Tensile Dynamic Behavior of Existing Concrete under High Strain Rates**", *ACI Structural Journal*, Vol. 106, No. 1, 2009, pp. 106-113.

Asprone, D., Cadoni, E., and Prota, A., (2009)b, "**Tensile High Strain-Rate Behavior of Reinforcing Steel from an Existing Bridge**", *ACI Structural Journal*, Vol. 106, No. 4, 2009, pp. 523-529.

ASTRA/SBB, (1998), "**Einwirkung auf Steinschlagschutzgalerien**", *Richtlinie*, Bundesamt für Strassen, Baudirektion SBB, Eidgenössische Drucksachen- und Materialzentrale, Bern.

ASTRA 82006, (2003), "'**Steinschlag': Naturgefahr für die Nationalstrassen**", *Schlussbericht,* ASTRA-Expertengruppe.

ASTRA, SBB, (2008), "**Einwirkungen infolge Steinschlags auf Schutzgalerien**", *Richtlinie Ausgabe 2008, V2.03*, Bundesamt für Strassen, in Zusammenarbeit mit SBB AG Infrastruktur, 22 pp. www.astra.admin.ch

ASTRA (2012), "**Naturgefahren auf den Nationalstrassen: Risikokonzept**", *Dokumentation v2.10*, ASTRA 89001, 95pp www.astra.admin.ch

ASTRA (2014)a, "**Risikoanalyse für Tunnel der Nationalstrassen**", *Richtlinie v1.01*, ASTRA 19004, 42 pp. www.astra.admin.ch

ASTRA (2014)b, "**Risikokonzept für Tunnel der Nationalstrassen**", *Dokumentation v1.00*, ASTRA 89005, 180 pp. www.astra.admin.ch

ASTRA, (2016), "**RoadRisk**", *Website*, http://www.roadrisk.admin.ch (letzter Zugriff: 11.04.2017).

Bachmann, H., und Thürlimann, B., (1965), "**Versuche über das plastische Verhalten zweifeldriger Stahlbetonbalken**", Institut für Baustatik, ETH Zürich, *Berichte Nr. 6203-1 und 2*, 1965, 131 pp. und 103 pp.

Bachmann, H. (1967), "**Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 13, Dissertation*, Juris Druck + Verlag Zürich, 1967, 188 pp. www.research-collection.ethz.ch

Bachmann, H., (1997), "**Tragwiderstand und Duktilität für Stoss- und Erdbebeneinwirkung**", *Beton- und Stahlbetonbau, IBK Sonderdruck Nr. 0015*, Vol. 92, Heft 8 + 9, 1997, 11 pp.

Basler, E., (1966), "**Der Druckstoss und seine Auswirkungen auf Bauwerke**", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 84, Heft Nr. 12, Zürich, 1966, pp. 217-221.

BauGrundRisk GmbH., (2016), "**Valserstrasse – Instandsetzung Galerie Rieinertobel – Geologische Abklärungen probabilistischer Ansatz Steinschlag**", *Bericht*, Projekt Nr. 748.

Beckmann, B., Hummeltenberg, A., Weber, T., and Curbach, M., (2012), "**Strain Behaviour of Concrete Slabs under Impact load**", *Structural Engineering International*, Vol. 4, 2012, pp. 562-568.

Beeby, A. W., (1997), "**Ductility in Reinforced Concrete: Why is it Needed and How is it Achieved?**", *The Structural Engineer*, Vol. 75, No. 18, 1997, pp. 311-318.

Biggs, J. M., (1964), "**Introduction to structural dynamics**", New York, McGraw-Hill, 1964, 341 pp.

Bischoff, P. H., and Perry, S. H., (1991), "**Compressive Behaviour of Concrete at High Strain Rates**", *Materials and Structures*, Vol. 24, No. 6, 1991, pp 425-450.

Bodner, S. R., and Symonds, P. S., (1962), "**Experimental and Theoretical Investigations of the Plastic Deformation of Cantilever Beams Subjected to Impulsive Loading**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, No. 4, 1962, pp. 719-728.

Bucher, K., (1997), "**Dynamische Berechnung von Steinschlageinwirkung**", *Proceedings*, Schweizerische Gesellschaft für Boden und Felsmechanik, Montreux.

Brooks, N. B., and Newmark, N. M., (1953), "**The Response of Simple Structures to Dynamic Loads**", *Technical Report, Civil Engineering Studies SRS-051*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1953, 49 pp.

Bundesamt für Zivilschutz, (1994), "**TWK 1994, Technische Weisungen für die Konstruktion und Bemessung von Schutzbauten**", Bern, 1994, 101 pp.

Cadoni, E., Labibes, K., Albertini, C., Berra, M. and Giangrasso, M., (2001), "**Strain-rate effect on the tensile behaviour of concrete at different relative humidity levels**", *Materials and Structures*, Vol. 34, 2001, pp. 21-26.

Calvetti, F. (2008), "**Discrete modelling of granular materials and geotechnical problems**", *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, Vol. 12, 2008, pp. 951-965.

Campbell, J. D., and Cooper, R. H., (1966), "**Yield and flow of low-carbon steel at medium strain rates**", *Proceedings*, Conference on the Physical Basis of Yield and Fracture, Institute of Physics and Physical Society, London, 1966, pp. 77-87.

CEB Comité Euro-International du Béton, (1988), "**Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading**", *Synthesis report, Bulletin d'information, No. 187*, Lausanne, 1988, 162 pp.

CEB Comité Euro-International du Béton, (1993), "**CEB-FIP Model Code 1990**", *Bulletin d'Information, No. 213/214*, Lausanne, 1993, 437 pp.

Chen, W. F., and Drucker, D. C., (1969), "**Bearing Capacity of Concrete Blocks or Rock**", *Journal of the Engineering Mechanics, Proceedings of the ASCE*, Vol. 95, No. 4, 1969, pp. 955-978.

Clyde, D. H., (1979), "**Nodal Forces as Real Forces**", *Final Report*, IABSE Colloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Copenhagen 1979, Vol. 29, 1979, pp. 159-166.

Cottrell, A. H., (1964), "**The mechanical properties of matter**", John Wiley & Sons Inc., New York, 1964, 430 pp.

Cowper, G. R., and Symonds, P. S., (1957), "**Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams**", *Division of Applied Mathematics, Brown University, Report No. 28*, 1957.

Cox, A. D., and Morland, L. W., (1959), "**Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates**", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 7, 1959, pp. 229-241.

Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. (1979), "**A discrete numerical model for granular assemblies**", *Géotechnique*, London 29, 1979, pp. 47-65.

Curbach, M., (1987), "**Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten**", *Heft Nr. 1, Dissertation*, Karlsruhe, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 1987, 154 pp.

Custer, R., Fischer, K., Schubert, M., Güngerich, A., (2016), "**Grenzkosten als Festsetzung im Rahmen von Nutzen-Kosten-Analysen für Sicherheitsmassnahmen**", *Studie*, im Auftrag von Bundesamt für Verkehr (BAV), Bundesamt für Umwelt (BAFU) und Bundesamt für Strasse (ASTRA).

Custer, R., Schubert, M., Hess, R., Schellenberg, K., (2017), "**Safety level evaluation for existing rockfall protection gallery Rieinertobel**", *Proceedings*, 39th IABSE Symposium – Engineering the Future, September 21-23 2017, Vancouver, Canada, pp. 3384-3391.

Dargel, H. J., (1984), "**Zur rechnerischen Analyse von Stahlbetontragwerken unter stossartiger Beanspruchung**", *Dissertation*, Fachbereich Konstruktiver Ingenieurbau, Technische Hochschule Darmstadt, 1984, 199 pp.

Drucker, D. C., Greenberg, H. J., and Prager, W., (1951), "**The Safety Factor of an Elastic Plastic Body in Plane Strain**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, pp. 371-378.

Drucker, D. C., Prager, W., and Greenberg, H. J., (1952), "**Extended Limit Design Theorems for Continuous Media**", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 9, No. 4, 1952, pp. 18-28.

Dual, J., (2011), "**Wellenausbreitung in Festkörpern**", *Autographie, Vorlesung an der ETH Zürich*, Zentrum für Mechanik, 2011, 121 pp.

EMPA, (1966), "**Fallversuche an Elementen für Steinschlaggalerien**", *Bericht, Auftrag EMPA-Nr. 24040*, Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe, Dübendorf/ZH, 1966.

Faber, M.H., Sørensen, J., (2003), "**Reliability based code calibration – the JCSS Approach**", *Proceedings*, 9th International Mechanisms for Concrete Structures in Civil Engineering (ICASP), pp. 927-935.

fib fédération internationale du béton, (2013), "**Model Code for Concrete Structures 2010**", International Federation for Structural Concrete (fib), Lausanne, 2013, 402 pp.

Florence, A. L., and Firth, R. D., (1965), "**Rigid-plastic beams under uniformly distributed impulses**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, 1965, pp. 481-488.

Gabrieli, F., Cola, S., and Calvetti, F., (2009), "**Use of an up-scaled DEM model for analysing the behaviour of a shallow foundation on a model slope**", *Geo-mechanics and Geoengineering*, Vol. 4, No. 2, 2009, pp. 109-122.

Gerber, W., (2008), "**Impaktversuche: Experimentelle Untersuchung von Steinschlag auf Böden**", *Rohdaten*, Eidg. Forschungsanstalt für Wald, Schnee und Landschaft (WSL), Birmensdorf.

Ghadimi Khasraghy, S. (2011), "**Numerical simulation of rockfall protection galleries**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 334, Dissertation Nr. 19931*, Zürich, 2011, 174 pp. www.research-collection.ethz.ch

Gvozdev, A. A., (1936), "**The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation**", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 1, No. 1, 1960, pp. 322-335. (Englische Übersetzung von Haythornthwaite, R. M.; ursprüngliche Veröffentlichung in den Proceedings "Conference on Plastic Deformations", Akademiia Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 1936, pp. 19-38)

Hall, R. G., Al-Hassani, S. T. S., and Johnson, W., (1971), "**The impulsive loading of cantilevers**", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 13, 1971, pp. 415-430.

Heinzmann, D., (2012), "**Stringer-Tafelmodelle für Stahlbeton**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 341, Dissertation Nr. 20303, Zürich*, 2012, 187 pp. www.research-collection.ethz.ch

Heinzmann, D., Etter, S., Villiger, S., and Jaeger, T., (2012), "**Punching Tests of RC Slabs with and without Shear Reinforcement**", *ACI Structural Journal*, Vol. 109, No. 6, 2012, pp. 787-794.

Hill, R., (1948), "**A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity**", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 1, 1948, pp. 18-28.

Hill, R., (1951), "**On the State of Stress in a Rigid-Plastic Body at the Yield Point**", *The Philosophical Magazine*, Series 7, Vol. 42, No. 331, 1951, pp. 868-875.

Hillerborg, A. (1975), "**Strip Method of Design**", Viewpoint, London, 1975, 256 pp.

Hjorth, O., (1976), "**Ein Beitrag zur Frage der Festigkeiten und des Verbundverhaltens von Stahl und Beton bei hohen Beanspruchungsgeschwindigkeiten**", *Schriftenreihe des Institutes für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig, Heft Nr. 32 (Dissertation)*, Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen, Braunschweig, Germany, 1976, 188 pp.

Hofmann, P., (2015), "**Härte von Böden**", *Bachelorarbeit an der ZHAW*, in Zusammenarbeit mit der Eidg. Forschungsanstalt für Wald, Schnee und Landschaft (WSL), Birmensdorf.

Hopkins, H. G. and Prager, W., (1954), "**On the Dynamics of Plastic Circular Plates**", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 5, 1954, pp. 317-330.

Hrynyk, T. D., (2013), "**Behaviour and Modelling of Reinforced Concrete Slabs and Shells under Static and Dynamic Loads**", *Doctoral Thesis*, Graduate Department of Civil Engineering University of Toronto, 2013, 436 pp.

Hsu, S. S., and Jones, N., (2004), "**Quasi-static and dynamic axial crushing of thin-walled circular stainless steel, mild steel and aluminium alloy tubes**", *International Journal of Crashworthiness*, Vol 9, No. 2, 2004, pp. 195-217.

Hummeltenberg, A., Beckmann, B., Weber, T., and Curbach, M., (2011), "**Betonplatten unter Stossbelastung – Fallturmversuche**", *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 106, Heft Nr. 3, 2011, pp. 160-168.

IABSE, (1986), "**Protective Structures: Part I**", *IABSE Periodica 2/1986, IABSE Structures C-37/86*, Constructions AIPC IVBH Bauwerke, Zürich, 1986, pp. 29-51.

Ingerslev, A., (1923), "**The strength of rectangular slabs**", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 1, No. 1, 1923, pp. 3-14.

Irvine, M., (1986), "**Structural dynamics: for the practising engineer**", Allen & Unwin, London, 1986, 208 pp.

Itasca Consulting Group, Inc. (2003), "**PFC3D (Particle Flow Code in 3 Dimensions)**", Version 3.0., 2003, 656 pp.

Jacquemoud, J., (1999), "**Swiss guideline for the design of rockfall protection galleries: Background, safety concept and case histories**", *Proceedings*, Joint Japan-Swiss Scientific Seminar on Impact by Rock Falls and Design of Protection Structures, Kanazawa, Japan, 1999.

Jäger, T., Marti, P. (2005), "**Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 294*, 2005, 358 pp. www.research-collection.ethz.ch

Jäger, T., (2007), "**Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 305, Dissertation Nr. 17403*, 2007, 114 pp. www.research-collection.ethz.ch

Jäger, T., (2009), "**Stahlbeton III**", Institut für Baustatik und Konstruktion, *Autographie*, ETH Zürich, 2009, 164 pp.

JCSS (2001), "**JCSS Probabilistic Model Code**", Joint Committee on Structural Safety.

Johansen, K.W., (1943), "**Brudlinieteorier**", *Doctoral Thesis*, Technical University of Denmark, 1943, 191 pp.

Johansen, K.W., (1962), "**Yield-line Theory**", Cement and Concrete Association, London, 1962, 181 pp.

Jones, N., (1971), "**A theoretical study of the dynamic plastic behavior of beams and plates with finite-deflections**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, 1971, pp. 1007-1029.

Jones, N., (1989), "**Recent studies on the dynamic plastic behavior of structures**", *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 42, No. 4, 1989, pp. 95-115.

Jones, N., (1995), "**Quasi-static Analysis of Structural Impact Damage**", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 33, 1995, pp. 151-177.

Jones, N., Kim, S.-B., and Li, Q. M., (1997), "**Response and Failure of Ductile Circular Plates Struck by a Mass**", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Transaction of the ASME, Vol. 119, 1997, pp. 332-342.

Jones, N., (2003), "**On the mass impact loading of ductile plates**", *Defence Science Journal*, Vol. 53, No. 1, 2003, pp. 15-24.

Jones, N., (2006), "**Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures**", *Ships and Offshore Structures*, Woodhead Publishing Ltd, Vol. 1, No. 1, 2006, pp. 37-44.

Jones, N., (2012), "**Structural impact**", Cambridge University Press, second edition, Cambridge, 2012, 584 pp.

Kaliszky, S., (1969), "**Approximate Solutions for Impulsively-loaded Rigid-plastic Structures and Continua**", *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Vol. XVII, No. 5, 1969, pp. 263-268.

Kaliszky, S., (1970), "**Approximate solutions for impulsively-loaded rigid-perfectly plastic structures and continua**", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 5, 1970, pp. 143-158.

Kaliszky, S., (1973), "**Large Deformations of Rigid-Viscoplastic Structures under Impulsive and Pressure Loading**", *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 1, No. 3, 1973, pp. 295-317.

Kaliszky, S., (1981), "**Kinematical method for the analysis of inelastic structures under dynamic loading**", *Advances in Mechanics*, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 29-47.

Kaliszky, S., (1984), "**Plastizitätslehre, Theorie und technische Anwendungen**", VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1984, 497 pp.

Kaliszky, S., (1989), "**Plasticity, Theory and Engineering Application**", *Studies in Applied Mechanics*, 1989, 505 pp.

Kishi, N., Okada, S.-Y., and Kon-No, H., (2009), "**Numerical Impact Response Analysis of Rockfall Protection Galleries**", *Structural Engineering International*, Vol. 3, 2009, pp. 313-320.

Kishi, N., Mikami, H., and Kurihashi, Y., (2010), "**Static and impact loading tests of RC slabs with various supporting conditions**", *Journal of Structural Engineering*, JSCE, Vol. 56A, 2010, in Japanese, pp. 1160-1168.

Koiter, W. T., (1953), "**Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic- plastic materials with a singular yield surface**", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 11, Nr. 3, 1953, pp. 350-354.

Kolsky, (1949), "**An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading**", *Proceedings of the Physical Society*, 1949, B62, pp. 676-700.

Kon-No, H., Yamaguchi, S., Nishi, H., Kishi, N. and Kurihashi, Y., (2010), "**Falling-weight impact test for 2/5 scale model of rockfall protection gallery with/without sand cushion**", *Proceedings*, Advances in Geomaterials and Structures, Third edition, Djerba, 2010, pp. 355-360.

Konno, H., Kishi, N., Kurihashi, Y., Yamaguchi, S. and Nishi, H., (2010)a, "**Falling-weight impact test for small scale model of RC type rock-shed without sand cushion**", *Journal of Structural Engineering*, JSCE, 2010, in Japanese, pp. 1102-1112.

Konno, H., Kishi, N., Yamaguchi, S., and Nishi, H., (2010)b, "**Falling-weight impact test of large-scale two-side simply supported RC slabs**", *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 32, No. 2, 2010, in Japanese, pp. 733-738.

Konno, H., Yamaguchi, S., Kishi, N., and Kurihashi, Y., (2011), "**Impact loading tests on sand cushion with various sand thickness**", *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, Hokkaido 2011 Annual meeting, No. A-54, 2011, in Japanese, 4 pp.

Kon-No, H., and Yamaguchi, S., (2012), "**Field test on absorbing performance of sand cushion layer, Outline**", *Internal Report*, Structural Research Team, Civil Engineering Research Institute for Cold Region, Public Work Research Institute, Japan, 2012, Unpublished.

Konno, H., Kishi, N., Nishi, H., Yamaguchi, S., and Okada, N., (2012), "**Falling-weight impact test of sand cushion with various conditions**", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 3, 2012, in Japanese, pp. 1051-1063.

König, G. and Dargel, H. J., (1982), "**A Constitutive Law for Reinforced Concrete with Consideration to the Effect of High Strain Rates**", *Proceedings*, RILEM/CEB/IABSE/IASS Interassociation Symposium, Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading, BAM, Berlin, 1982.

Körmeling, H. A., Zielinski, A. J., and Reinhardt, H. W., (1980), "**Experiments on concrete under single and repeated uniaxial tensile loading**", *Stevin Report*, No. 5-80-3, Delft, 1980.

Krajcinovic, D., (1972), "**On approximate solutions for rigid-plastic structures subjected to dynamic loading**", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 7, 1972, pp. 571-575.

Krauthammer, T., (2008), "**Modern protective structures**", Band 22, CRC Press, 2008, 528 pp.

Kurihashi, Y., (2016), *Persönliche Kommunikation* vom 10.04.2016, ETH Zürich.

Lee, E. H., and Symonds, P. S., (1952), "**Large Plastic Deformation of Beams under Transverse Impact**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 3, 1952, pp. 308.

Lee, L. S. S., and Martin, J. B., (1970), "**Approximate Solutions of Impulsively loaded Structures of a Rate Sensitive Material**", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 21, 1970, pp. 1011-1032.

Lee, L. S. S., (1972), “**Mode Responses of Dynamically Loaded Structures**”, *Journal of Applied Mechanics*, 1972, pp. 904-910.

Lubliner, J., (2005), “**Plasticity Theory**“, Revised Edition (PDF), University of California at Berkeley, 2005, 516 pp.

Malvar L. J., (1998), “**Review of Static and Dynamic Properties of Steel Reinforcing Bars**”, *ACI Materials Journal*, Vol. 95, Nr. 5, 1998, pp. 609-616.

Malvar L. J., and Ross, C. A., (1998), “**Review of Strain Rate Effects for Concrete in Tension**”, *ACI Materials Journal*, Vol. 95, Nr. 6, 1998, pp. 735-739.

Malvern, L. E., (1951), “**The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect**“, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, pp. 203-208.

Manjoine, M. J., (1944), “**Influence of Rate of Strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel**”, *Journal of Applied Mechanics*, 1944, pp. 211-218.

Marti P., (1980), “**Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton**“, Institut für Baustatik und Konstruktion, *IBK Bericht Nr. 104, Dissertation*, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1980, 176 pp. www.research-collection.ethz.ch

Marti, P., (1990), “**Design of Concrete Slabs for Transverse Shear**”, *ACI Structural Journal*, Vol. 87, No. 2, 1990, pp. 180-190.

Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., and Sigrist, V., (1998), “**Tension Chord Model for Structural Concrete**”, *Structural Engineering International*, Vol. 4, 1998, pp. 287-298.

Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., und Sigrist, V., (1999), “**Tragverhalten von Stahlbeton**“, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Publikation SP-008*, 1999, 301 pp. www.research-collection.ethz.ch

Marti, P., und Stoffel, P., (1999), “**Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Betonbauten**“, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Publikation SP-009*, 1999, 87 pp. www.research-collection.ethz.ch

Marti, P., (2003), “**Kraftfluss in Stahlbetonplatten**”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 98, Heft Nr. 2, 2003, pp. 85-93.

Marti, P., (2014), “**Baustatik**“, 2. Auflage, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 2014, 683 pp.

Martin J. B., (1964), “**Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua**”, *Proceedings ASCE*, Engineering Mechanics Division, Vol. 90, EM 5, 1964, pp. 27-42.

Martin, J. B., and Symonds, P. S., (1966), “**Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures**”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Vol. 92, 1966, pp. 43-66.

Martin J. B., (1967), “**Time and displacement bound theorems for viscous and rigid-visco-plastic continua subjected to impulsive loading**”, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Pergamon Press, Vol. 3, 1967, pp. 1-22.

Martin, J. B., (1972), “**Extremum Principles for a Class of Dynamic Rigid-plastic Problems**”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, 1972, pp. 1185-1204.

Martin, J. B., (1981), “**The Determination of Mode Shapes for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Structures**”, *Meccanica*, 1981, pp. 42-45.

Matasaka F., Kishi, N., Mikami, H., and Kurihashi, Y., (2011), “**Static and impact loading test on impact resistant behavior of RC slab with various support condition**”, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 33, No. 2, 2011, in Japanese, pp. 799-804.

Meyboom, J., and Marti, P., (2001), “**Experimental Investigation of Shear Diaphragms in Reinforced Concrete Slabs**“, Institut für Baustatik und Konstruktion, *IBK Bericht Nr. 243*, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001, 165 pp. www.research-collection.ethz.ch

Meyboom, J., (2002), “**Limit Analysis for Concrete Slabs**“, Institut für Baustatik und Konstruktion, *IBK Bericht Nr. 276, Dissertation*, ETH Zürich, vdf-Hochschulverlag, Zürich, 2002, 116 pp. www.research-collection.ethz.ch

Monotti, M., (2004), "**Reinforced Concrete Slabs – Compatibility Limit Design**", Institut für Baustatik und Konstruktion, I*BK Bericht Nr. 288, Dissertation*, ETH Zürich, vdf-Hochschulverlag, Zürich, 2004, 90 pp. www.research-collection.ethz.ch

Montani, S., Descoedres, F., (1996). "**Etude expérimentale de la chute de blocs impactant une dalle en béton armé recouverte par des matériaux amortissants**" (Experimentelle Studie von Steinschlägen auf eine mit Dämpfmaterialien überdeckte armierte Betondecke), EVED, Bundesamt für Strassen, *Forschungsbericht Nr. 524*, VSS, Zürich, 93 pp. & annexe. http://www.mobilityplatform.ch

Morales W. J., and Nevill, G. E., (1970), "**Lower bounds on deformations of dynamically loaded structures**", *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 11, 1970, pp. 2043-2047.

Morales W. J., (1972), "**Displacement bounds for blast loaded structures**", *Proceedings ASCE*, Journal Engineering Mechanics Division, EM 4, 1972, pp. 965-974.

Muttoni, A., Schwartz, J. und Thürlimann, B., (1996), "**Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern**", Birkhäuser, Basel, 1996, 145 pp.

Nayfeh, A. and Prager, W., (1969), "**Response Time of Impulsively Loaded Structures**", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 95, No. EM 3, 1969, pp. 813-819.

Nielsen, M. P., (1964), "**Limit analysis of reinforced concrete slabs**", *Acta Poly-technica Scandinavica*, Civil Engineering and Building Construction Series, No. 26, Copenhagen, 1964, 167 pp.

Nielsen, M. P., and Hoang, L. C., (2011), "**Limit Analysis and Concrete Plasti-city**", 3rd edition, CRC Press, New York, 2011, 788 pp.

Norris, C., Hansen, R. J., Holley, J. R., M. J., Biggs, J. M., Namyet, S., and Minami, J., (1959), "**Structural design for dynamic loads**", McGraw-Hill Book Co., New York, 1959, 453 pp.

Nurrick, G. N., and Martin, J. B., (1989), "**Deformation of Thin Plates subjected to Impulsive Loading – A Review, Part I: Theoretical Consideration**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 8, No. 2, 1989, pp. 159-170.

Okada, N., Kishi, N., Konno, H., and Yamaguchi, S., (2011)a, "**Impact loading tests on sand cushion with various degrees of compaction**", *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, Hokkaido 2011 Annual meeting, No. A-55, 2011, in Japanese, 4 pp.

Okada, N., Kishi, N., Konno, H., and Yamaguchi, S., (2011)b, "**Weight falling impact tests of RC slab varying support conditions with sand cushion**", *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 33, No. 2, 2011, in Japanese, pp. 805-810.

Ožbolt, J., Rah, K. K., and Meštrović, D., (2006), "**Influence of loading rate on concrete cone failure**", *International Journal of Fracture*, Vol. 139, 2006, pp. 239-252.

Parkes, E. W., (1955), "**The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip**", *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A (Mathematical and Physical Sciences), Vol. 228, 1955, pp. 462-476.

Passer, H., (1980), "**Statische Bearbeitung von Schutzgalerien**", *Zement und Beton*, 25. Jahrgang, Heft Nr. 3, 1980.

Paulay, T., Bachmann, H., und Moser, K., (1990), "**Erdbebenbemessung von Stahlbetonhochbauten**", Birkhäuser Verlag, 1990, 562 pp.

Perrone, N., (1965), "**On a simplified method for solving impulsively loaded structures of rate-sensitive materials**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, 1965, pp. 489-492.

Perzyna, P. (1963), "**The constitutive equations for rate sensitive plastic material**", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 20, 1963, pp. 321-332.

Petersen, Ch., (2000), "**Dynamik der Baukonstruktionen**", korrigierter Nachdruck, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden, 2000, 1272 pp.

Ploch, J., and Wierzbicki, T., (1981), "**Bounds for large plastic deformations of dynamically loaded continua and structures**", International *Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, 1981, pp. 183-195.

Popovics, S. (1973), “**A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete**”, Cement and Concrete Research, Vol. 3, No. 5, 1973, pp. 583-599.

Prager, W., and Hodge, P. G., (1951), “**Theory of perfectly plastic solids**“, Wiley & Sons, first edition, 1951, 264 pp.

Prager, W., (1952), “**General theory of limit design**”, *Proceedings*, Eighth International Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Istanbul 1952, Istanbul 1953, Vol. 2, pp. 65-72.

Prager, W., (1955), “**Probleme der Plastizitätstheorie**“, Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften, Band 17, Birkhäuser, Basel, 1955, 100 pp.

Rackwitz, R., (2000), “**Optimization – The Basis of Code-Making and Reliability Verification**“, *Structural Safety*, vol. 22, no. 1, pp. 27-60.

Raphael, J. M., (1984), “**Tensile Strength of Concrete**“, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 81, No. 3, 1984, pp. 158-165.

Rawlings, B., (1964), “**Mode Changes in Frames deforming under Impulsive Loads**”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 327-336.

Rawlings, B., (1965), “**Dynamic Changes of Mode in Rigid Plastic Structures**”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 91, No. EM2, 1965, pp. 1-20.

Reid, S. R., Edmunds, A. J., and Johnson, W., (1981), “**Bending of long steel and aluminium rods during end impact with a rigid target**”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 23, 1981, pp. 85-92.

Reid, S. R., and Gui, X. G., (1987), “**On the elastic-plastic deformation of cantilever beams subjected to tip impact**”, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 6, No. 2, 1987, pp. 109-127.

Reinhardt, H. W., (1982), “**Concrete under impact loading. Tensile strength and bond**”, *HERON*, Vol. 27, No. 3, 1982, Delft, 48 pp.

Reinhardt, H. W., Rossi, P., and van Mier, J. G. M., (1990), “**Joint investigation of concrete at high rates of loading**”, *Materials and Structures*, Vol. 23, 1990, pp. 213-216.

Reinhardt, H. W., and Weerheijm, J., (1991), “**Tensile fracture of concrete at high loading rates taking account of inertia and crack velocity effects**”, *International Journal of Fracture*, Vol. 51, 1991, pp. 31-42.

Restrepo-Posada, J. I., Dodd, L. L., Park, R., and Cooke, N., (1994), “**Variables affecting cyclic behavior of reinforcing steel**”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 120, No. 11, 1994, pp. 3178-3196.

Ross, C. A., Thompson, P. Y., and Tedesco, J. W., (1989), “**Split-Hopkinson Pressure-Bar Tests on Concrete and Mortar in Tension and Compression**”, *ACI Materials Journal*, Vol. 86, No. 5, 1989, pp. 475-481.

Ross, C. A., Tedesco, J. W., and Kuennen S. T., (1995), “**Effects of Strain Rate on Concrete Strength**”, *ACI Materials Journal*, Vol. 92, No. 1, 1995, pp. 37-45.

Ross, C. A., Jerome, D. M., Tedesco, J. W. and Hughes, M. L., (1996), “**Moisture and Strain Rate Effects on Concrete Strength**”, *ACI Materials Journal*, Vol. 93, No. 3, 1996, pp. 293-300.

Röthlin, C., Calvetti, F., Yamaguchi, S., and Vogel, T., (2013), “**Numerical simulation of rockfall impact on a rigid reinforced concrete slab with a cushion layer**”, *Proceedings*, Protect 2013, Fourth International Workshop on Performance, Protection and Strengthening of Structures, 2013, 10 pp.

Röthlin, C., Kurihashi, Y., Yamaguchi, S., Konno, H., Kishi, N., and Vogel, T., (2015), “**Drop weight Tests on Full-Scale Specimen of Rockfall Protection Galleries**“, Institute of Structural Engineering, *IBK Bericht Nr. 362*, ETH Zurich, 2015, 400 pp. www.research-collection.ethz.ch

Röthlin, K., (2017), “**Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien**“, *Dissertation Nr. 24322* , ETH Zürich, 198 pp. www.research-collection.ethz.ch

Sargin, M., (1971), “**Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete**“, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo Ontario, 1971, 167 pp.

Sawczuk, A., und Jaeger, T., (1963), “**Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten**“, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963, 522 pp.

Sayir, M. B., und Ziegler, H., (1969), "**Der Verträglichkeitssatz der Plastizitätstheorie und seine Anwendung auf räumlich unstetige Felder**", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Band 20, Heft Nr. 1, 1969, pp. 78-93.

Sayir, M. B., und Kaufmann, S., (2005), "**Ingenieurmechanik 3 Dynamik**", Erste Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005, 278 pp.

Schellenberg, K. (2008), "**On the design of rockfall protection galleries**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 334, Dissertation Nr. 17924*, Zürich, 2008, 177 pp.

Schellenberg, K., and Vogel, T., (2009), "**A dynamic design method for rockfall protection galleries**", *Structural Engineering International*, Vol. 19, No. 3, 2009, 321-326 pp.

Schellenberg K, Schubert M, Vogel T. 2011, "**A performance based design concept for rockfall protection galleries**", *Proceedings*, 9th International Conference on Shock & Impact Loads on Structures; Nov 16-18, 2011; Fukuoka, Japan.

Schubert, M., Straub, D., Faber, M.H. 2005, "**Reliability of rock fall protection galleries – A case study with a special focus on the uncertainty modelling**", *Proceedings*, International Conference on Structural Safety & Reliability ICOSSAR, vol. 5, Italy, Rome, pp. 1333-1340.

Schubert, M., Faber, M.H., 2009, "**Beurteilung von Risiken und Kriterien zur Festlegung akzeptierter Risiken in Folge aussergewöhnlicher Einwirkungen bei Kunstbauten**". *ASTRA Bericht 616*, Forschungsauftrag AGB 2002/020, 120 pp. http://www.mobilityplatform.ch

Schubert, M., Faber, M.H., Jacquemond, J., Straub, D., 2010, "**RiskNow- Falling Rocks Excel-basiertes Werkzeug zur Risikoermittlung bei Steinschlagschutzgalerien**", *ASTRA Bericht 639*, Forschungsauftrag 2008/003, 120 pp. http://www.mobilityplatform.ch

Schlüter, F.-H., (1987), "**Dicke Stahlbetonplatten unter stossartiger Belastung – Flugzeugabsturz**", Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, Heft Nr. 2, *Dissertation*, 1987, 196 pp.

SIA 260 (2013), "**Grundlagen der Projektierung von Tragwerken**", *Schweizer Norm 505 260*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2013, 44 pp.

SIA 261 (2014), "**Einwirkung auf Tragwerke**", *Schweizer Norm 505 261*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2013, 132 pp.

SIA 262 (2013), "**Betonbau**", *Schweizer Norm 505 262*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2013, 102 pp.

SIA 269 (2011), "**Grundlagen der Erhaltung von Tragwerken**", *Schweizer Norm 505 269*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2013, 28 pp.

Sigrist, V., und Marti, P., (1993), "**Versuche zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 202*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, 90 pp. www.research-collection.ethz.ch

Sigrist, V., (1995), "**Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 210, Dissertation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995, 159 pp. www.research-collection.ethz.ch

Straub, D., Schubert, M., (2008), "**Modeling and managing uncertainties in rockfall hazards**", *Georisk*, Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, Volume 2, Issue 1, pp. 1-15.

Stronge, W. J., (1983), "**Lower bounds to large displacements of impulsively loaded rigid-plastic structures**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, 1983, pp. 1049-1063.

Stronge, W. J., (1985), "**Accuracy of bounds on plastic deformation for dynamically loaded plates and shells**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, 1985, pp. 97-104.

Stronge, W. J. and Yu, T. X., (1993), "**Dynamic Models for Structural Plasti-city**", Springer Verlag, London, 1993, 279 pp.

Stronge, W. J., (2000), "**Impact Mechanics**", Cambridge University Press, 2000, 280 pp.

Suiker, A. S. J., and Fleck, N. A., (2004), "**Frictional collapse of granular assemblies**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, 2004, pp. 350-358.

Symonds, P. S., (1967), "**Survey of methods of analysis for plastic deformation of structures under dynamic loading**", *Final report*, Brown University Report BU/NSRDC/1-67, 1967, 251 pp.

Symonds, P. S., (1973), "**Approximation techniques for impulsively loaded structures of rate sensitive plastic behavior**", *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 25, No. 3, 1973, pp. 462-473.

Symonds, P. S., and Wierzbicki, T., (1975), "**On an Extremum Principle for Mode Form Solutions in Plastic Structural Dynamics**", *Journal of Applied Mechanics*, 1975, pp. 630-640.

Symonds, P. S., and Chon, C. T., (1978), "**On dynamic plastic mode-form solutions**", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 26, 1978, pp. 21-35.

Symonds, P. S., (1980), "**The Optimal Mode in the Mode Approximation Technique**", *Mechanics Research Communications*, Vol. 7, No. 1, 1980, pp. 1-6.

Symonds, P. S., and Fleming, W. T., (1984), "**Parkes revisited: On rigid-plastic and elastic-plastic dynamic structural analysis**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 2, No. 1, 1984, pp. 1-36.

Symonds, P. S., and Frye, C. W. G., (1988), "**On the relation between rigid-plastic and elastic plastic predictions of response to pulse loading**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 2, 1988, pp. 1-36.

Tedesco, J. W., and Ross, C. A., (1998), "**Strain-Rate-Dependent Constitutive Equations for Concrete**", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 120, 1998, pp. 398-405.

Thürlimann, B., und Ziegler, H., (1963), "**Plastische Berechnungsmethoden**", *Autographie*, Fortbildungskurs für Bau- und Maschinen-Ingenieure, 1963, 138 pp.

U.S. Army, (1957), "**Design of Structures to Resist the Effects of Atomic Weapons**", *Corps of Engineers Manual*, EM 1110-435-415, 1957.

van Mier, J. G. M., (1997), "**Fracture Processes of Concrete, Assessment of Material Parameters for Fracture Models**", CRC Press, 1997, 448 pp.

Vegt, I., Weerheijm, J., and Van Breugel, K., (2007), "**The fracture energy of concrete under impact tensile loading – a new experimental technique**", *Proceedings*, CONSEC Conference, France, 2007.

Vogel, T., Labiouse, V., Masuya, H. (2009), "**Rockfall Protection as an Integral Task**", *Structural Engineering International*, Vol. 3, 2009, pp. 304-312.

Volkwein, A, (2016), "**Durchführung und Auswertung von Steinschlagversuchen auf eine Stahlbetongalerie**", *Versuchsbericht Pardè*, Eidg. Forschungsanstalt für Wald, Schnee und Landschaft (WSL), Birmensdorf.

von Mises, R., (1928), "**Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen**", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 8, Heft Nr. 3, 1928, pp. 159-185.

von Karman, T., and Duwez, P. (1950), "**The propagation of plastic deformation in solids**", *Proceedings*, Sixth International Congress for Applied Mechanics, Vol. 21, 1950, pp. 987-994.

Vos, E., and Reinhardt, H. W., (1980), "**Bond Resistance of Deformed Bars, Plain Bars and Strands under Impact Loading**", *Report 5-80-6*, Delft University of Technology, 1980.

Weerheijm, J., (1992), "**Concrete under impact tensile loading and lateral compression**", *Doctoral Thesis*, Delft University of Technology, The Netherlands, 1992, 171 pp.

Weerheijm, J. (Ed.), (2013), "**Understanding the tensile properties of concrete**", *Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering*, 48, Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2013, 378 pp.

Weerheijm, J., and Reinhardt, H. W., (1989), "**Concrete in Impact Tensile Tests**", *Proceedings*, First International Conference, Structures under Shock and Impact, Cambridge, Massachusetts, 1989, pp. 29-40.

Weerheijm, J., and Van Doormaal, J. C. A. M., (2007), "**Tensile failure of Concrete at high loading rates: New test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 34, 2007, pp. 609-626.

Westine, P. S., Baker, W. E., (1975), "**Energy solutions for predicting deformations in blast-loaded structures**", *Report*, EM-CR-76027, No. 6, Southwest Research Institute, San Antonio, 1975, 33 pp.

Wierzbicki, T., and Florence, A. L., (1970), "**A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular plastic and viscoplastic plates**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, 1970, pp. 553-568.

Wierzbicki, T., (1971), "**Lower bound on deformations in impulsive loading problems**", *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Vol. 19, 1971, pp. 291-296.

Wierzbicki, T., (1972), "**Comment on lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua**", *AIAA Journal*, Vol. 10, 1972, pp. 364-365.

Wolfensberger, R., (1964), "**Traglast und optimale Bemessung von Platten**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht Nr. 2, Dissertation*, Zürich, 1964, 119 pp. www.research-collection.ethz.ch

Wood, R., H., (1961), "**Plastic and elastic design of slabs and plates**", Thames and Hudson, London, 1961, 344 pp.

Woodward, R. L., and Baxter, B. J., (1986), "**Experiments on the impact bending of continuous and notched steel beams**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 4, No. 1, 1986, pp. 57-68.

Yamaguchi, S., Nishi, H., Kon-no, H., Kishi, N., Kurihashi, Y. and Ushiwatari, Y., (2011), "**Large-scale falling-weight impact test on RC slabs with cushion material**", *Proceedings*, 9th International Conference on Shock & Impact Loads on Structures, Japan, 2011, pp. 677-684.

Youngdahl, C. K., (1970), "**Correlation parameters for eliminating the effect of pulse shape on dynamic plastic deformation**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, 1970, pp. 1127-1142.Youngdahl, C. K., (1971), "Influence of pulse shape on the final plastic deformation of a circular plate", Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, 1971, pp. 744-752.

Youngdahl, C. K., (1971), "**Influence of pulse shape on the final plastic deformation of a circular plate**", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, 1971, pp. 744-752.

Youngdahl, C. K., and Krajcinovic, D., (1986), "**Dynamic plastic deformation of an infinite plate**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, No. 8, 1986, pp. 859-881.

Youngdahl, C. K., (1987), "**Effect of Pulse Shape and Distribution on the Plastic Deformation of a Circular Plate**", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, No. 8, 1987, pp. 1179-1189.

Zheng, S., (1996), "**Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hopkinson-Bar-Technik**", *Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie*, Universität Karlsruhe, Heft Nr. 27, Dissertation, 1996, 207 pp.

Zhu, G., Huang, Y.-G., Yu, T. X. and Wang, R., (1986), "**Estimation of the plastic structural response under impact**", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 4, No. 4, 1986, pp. 271-282.

Ziegler, H., (1983), "**An Introduction to Thermomechanics**", *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*, 1983, 355 pp.

Zielinski, A. J., Reinhardt, H. W., and Körmeling, H. A., (1981), "**Experiments on concrete under uniaxial impact tensile loading**", *Materials and Structures*, No. 80, 1981, pp. 103-112.

Zweidler, S., (2015), "**Kraftfluss in Stahlbetonplatten**", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *Dissertation Nr. 22856*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2015, 156 pp. www.research-collection.ethz.ch

Projektabschluss

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Bundesamt für Strassen ASTRA

FORSCHUNG IM STRASSENWESEN DES UVEK

Version vom 09.10.2013

Formular Nr. 3: Projektabschluss

erstellt / geändert am: 04.05.2018

Grunddaten

Projekt-Nr.: AGB 2011/014

Projekttitel: Grundlagen zur Überprüfung und Bemessung von Steinschlagschutzgalerien

Enddatum: 04.05.2018

Texte

Zusammenfassung der Projektresultate:

Teil A befasste sich mit der näherungsweisen Modellierung des Tragverhaltens und Verformungsvermögens von duktilen Stahlbetonplatten mit granularer Eindeckung, als typischem Tragelement von Steinschlagschutzgalerien, unter Aufprallstoss im Versagenszustand auf der Basis der Plastizitätstheorie.
Der Vergleich des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens mit Experimenten lieferte folgende Erkenntnisse:
- Die Annahme eines Verschiebungsfeldes respektive Geschwindigkeitsfeldes basierend auf der Fliessgelenklinientheorie konnte verifiziert werden.
- Die sich einstellende (bleibende) Modalform respektive das Rissbild der Stahlbetonplatte unter Aufprallstoss stimmt mit den Fliessgelenklinien für statische Lasten überein.
- Die Nachrechnungen der Versuche ergeben plausible Resultate und zeigen das Potential des Ansatzes auf, da eine mit zahlreichen Unsicherheiten verbundene kraftbasierte Berechnung unter Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der granularen Eindeckung umgangen werden kann.
- Die Voraussetzung für das Auftreten eines duktilen Biegebruchs von Stahlbetonplatten ist das Ausbleiben eines vorzeitigen lokalen Versagens infolge Durchstanzens am Aufprallort respektive eines spröden Querkraftversagens der Platte.

Im Teil B wird vorerst die dynamische Steinschlageinwirkung gemäss ASTRA-Richtlinie mit experimentellen Aufprallkräften von vier Versuchsreihen (zwei davon innerhalb des Projekts) verglichen. Die Vergleiche deuten darauf hin, dass die Formulierung den Einfluss von Steinmasse und Aufprallgeschwindigkeit auf die Einwirkungskraft angemessen berücksichtigt, dass es aber systematische Abweichungen gibt, die innerhalb einer Versuchserie konstant sind, zwischen den Versuchsserien aber unterschiedlich. Der Grund für diese Abweichungen konnte im Rahmen dieses Projektes nicht identifiziert werden. Es wird vorgeschlagen, die Gleichung so anzupassen, dass sie im Mittelwert mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt.
Die Konstruktionsbeiwerte in der Richtlinie berücksichtigen dynamische Baustofffestigkeiten und eine elasto-plastische Antwort und ihre Herleitung entspricht nach wie vor dem Stand des derzeitigen Wissens.
Das vorgeschlagene Bemessungskonzept wird auf ein transparentes probabilistisches Modell abgestützt, um für jede Galerie eine angemessene Sicherheit gewährleisten zu können. Dazu werden die Unsicherheiten der Einwirkung, die Konsequenzen eines Versagens der Steinschlagschutzgalerie und der Sicherheitskosten modelliert. Damit lassen sich wirtschaftlich sinnvolle Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten für Steinschlagschutzgalerien bestimmen, sowie Teilsicherheitsbeiwerte zu deren Einhaltung. Aus der Modellierung wird ein überarbeitetes Bemessungskonzept abgeleitet, das kohärent zu den Bemessungsprinzipen der SIA-Normen ist, aber eine gewichtige Neuerung enthält. Die grosse Mehrheit der Normen legt einen einzigen Teilsicherheitsbeiwert für alle Bemessungssituationen fest. Da jedoch die Anforderungen an Steinschlagschutzgalerien stark von den lokalen Gegebenheiten wie Häufigkeit und Grösse von Steinschlagereignissen und dem Verkehrsaufkommen abhängen, ist es schwierig mit einem einzigen Teilsicherheitsbeiwert Sicherheit und Wirtschaftlichkeit in allen Bemessungssituationen sicherzustellen. Deshalb wird die Ziel-Zuverlässigkeit als explizite Funktion des Verkehrsaufkommens festgelegt und die Teilsicherheitsbeiwerte sind eine Funktion der Ziel-Zuverlässigkeit und des Variationskoeffizienten der Steinschlageinwirkung.

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Bundesamt für Strassen ASTRA

Zielerreichung:

1. Weiterentwicklung der am IBK erarbeiteten dynamischen Modelle anhand neuer Erkenntnisse aus experimentellen, numerischen und theoretischen Untersuchungen:
=> Erreicht
2. Erarbeiten von Grundlagen für die Überprüfung und Massnahmenplanung sowie für die Bemessung und die konstruktive Durchbildung von Steinschlagschutzgalerien:
=> Teilweise erreicht; mit dem verformungsbasierten Verfahren der Kapazitätsbemessung steht ein alternatives Bemessungskonzept für globales Versagen zur Verfügung, das die Unsicherheiten des Einflusses der Überdeckung umgeht.
3. Ableitung von relevanten Regeln für die Überprüfungs- und Bemessungspraxis:
=> Erreicht; es wurde ein Vorschlag für die Anpassung der Lastbeiwerte erarbeitet, der eine wirtschaftliche Bemessung/Überprüfung erlaubt, ohne die gesellschaftlich akzeptierten Versagenswahrscheinlichkeiten zu überschreiten.
4. Vergleich der entwickelten Modelle mit Versuchsresultaten, um Modellunschärfen für zukünftige Forschungsarbeiten aufzuzeigen:
=> Teilweise erreicht, da probabilistische Auswertung nur für das klassische lastbasierte Verfahren der ASTRA-Richtlinie.
5. Die Forschungsresultate sollen dem praktisch tätigen Ingenieur ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung stellen, anhand dessen eine Aussage über das dynamische Tragwerksverhalten sowohl von bestehenden als auch für neu zu projektierende Steinschlagschutzgalerien gemacht werden kann.
=> Teilweise erreicht; Umsetzung in revidierte Richtlinie steht noch bevor.

Folgerungen und Empfehlungen:

Teil A:
Für duktile Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien mit Kieseindeckung wird ein starr-plastisches Näherungsverfahren vorgeschlagen, welches auf dem Modalform-Konzept beruht. Der Stoss wird als Aufprallstoss idealisiert. Ausgehend von der Annahme eines Geschwindigkeitsfeldes entsprechend der Mechanismuskonfiguration auf der Basis der Fliessgelenklinientheorie von Stahlbetonplatten wird mithilfe des Impulserhaltungssatzes und des Prinzips der virtuellen Leistungen die plastische Durchbiegung am Aufprallort berechnet (Verformungsbedarf).
Teil B:
Es wird empfohlen die Richtlinie ASTRA 12006 unter Berücksichtigung der Forschung der letzten 20 Jahren zu überarbeiten und in deren Bemessungskonzept die Bedeutung von «charakteristischem Wert» und das Bemessungsereignis zu definieren.
Um in jeder Bemessungssituation eine angemessene Sicherheit gewährleisten zu können, wird empfohlen das Bemessungskonzept auf ein transparentes probabilistisches Modell abzustützen und das Sicherheitsniveau einer Galerie in Funktion des durchschnittlichen Tagesverkehrs (DTV) und der Variabilität der Steinschlageinwirkung festzulegen.
Das überarbeitete Bemessungskonzept erfüllt die vorangehenden Punkte und es wird empfohlen, dieses in einer Überarbeitung der Richtlinie ASTRA 12006 zu berücksichtigen.

Publikationen:

- C. Röthlin (2012): Dynamic behaviour of rockfall protection galleries; Proceedings of the 9th FIB International PhD Symposium in Civil Engineering : Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 22 - 25 July 2012, Karlsruhe, Germany, 221-227, Karlsruhe: KIT Scientific Publ., 2012.
- K. Schellenberg, C. Röthlin, S. Ghadimi-Khasraghy and T. Vogel (2012): A Review on the Design of Rock Sheds with a Cushion Layer; Proceedings of the 11th International Symposium on Landslides and 2nd North American Symposium on Landslides, 2: 1221-1226, Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.
- S. Ghadimi Khasraghy, N. Kishi, T. Vogel and M. Alvarez (2013): A Numerical Investigation for Optimization of the Load Carrying Capacity of a Swiss Rockfall Protection Gallery; IABSE report, 99: 134-135, Zürich: International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE, 2013.
- C. Roethlin, F. Calvetti, S. Yamaguchi and T. Vogel (2013): Numerical simulation of rockfall impact on a rigid reinforced concrete slab with a cushion layer; Proceedings, Fourth International Workshop on Performance, Protection and Strengthening of Structures under Extreme Loading (Protect 2013), Mysore, India, August 26-27, 2013, 2013.
- C. Röthlin, Y. Kurihashi, Sa. Yamaguchi, H. Konno, N. Kishi and T. Vogel (2015): Drop weight tests on full-scale specimen of rockfall protection galleries; IBK Bericht, 362, Zürich: Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich, 2015.
- C. Röthlin (2017): Stahlbetonplatten von Steinschlagschutzgalerien; Dissertation, ETH Zürich, 2017.

Der Projektleiter/die Projektleiterin:

Name: Vogel Vorname: Thomas

Amt, Firma, Institut: ETH Zürich, Institut für Baustatik und Konstruktion

Unterschrift des Projektleiters/der Projektleiterin:

Forschung im Strassenwesen des UVEK: Formular 3 Seite 2 / 3

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Bundesamt für Strassen ASTRA

FORSCHUNG IM STRASSENWESEN DES UVEK
Formular Nr. 3: Projektabschluss

Beurteilung der Begleitkommission:

Beurteilung:

La commission relève à la fois
- la pertinence et la bonne conduite de la recherche effectuée,
- l'important apport des résultats obtenus,

ainsi que la formulation de propositions concrètes et novatrices dans le contexte
- de la conception et du dimensionnement de galeries en béton armé de protection contre les chutes de pierres,
- de la vérification des galeries existantes.

Umsetzung:

Les résultats et conclusions de la recherche mettent notamment à disposition des ingénieurs un concept et des outils de dimensionnement respectivement de vérification des galeries de protection.
Afin d'en faciliter la mise en oeuvre et l'application, il convient d'accéder à la proposition de réviser la Directive OFROU 12006 est proposée.

weitergehender Forschungsbedarf:

Points ouverts constituant des thèmes de recherches ultérieures : intégration des conclusions de très récentes thèses et recherches dans le concept révisé de dimensionnement, étude de la divergence observée lors de la comparaison entre les forces expérimentales et l'action dynamique selon la Directive OFROU 12006, discussion et prise en compte des incertitudes en ce qui concerne les estimations des masses de blocs et des périodes de retour.
Enfin, l'acceptation par la société d'un taux plus petit de fiabilité pour des galeries existantes doit encore être débattu et clarifié.

Einfluss auf Normenwerk:

Proposition de révision de la Directive OFROU 12006 en prenant en compte les résultats des recherches récentes et les propositions formulées dans le présent rapport de recherche.

Der Präsident/die Präsidentin der Begleitkommission:

Name: Putallaz Vorname: Jean-Christophe

Amt, Firma, Institut: Service de la mobilité, DMTE, Etat du Valais

Unterschrift des Präsidenten/der Präsidentin der Begleitkommission:

Forschung im Strassenwesen des UVEK: Formular 3 Seite 3 / 3

Verzeichnis der Berichte der Forschung im Strassenwesen

Das Verzeichnis der in der letzten Zeit publizierten Schlussberichte kann unter www.astra.admin.ch heruntergeladen werden.